F1130

REFERATIVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX NUMĂRUL 1 ANUL 1967
IANUARIE—FEBRUARIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT BUDAPEST

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX — NUMĂRUL 1

IANUARIE—FEBRUARIE
1967

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici* ; Prof. Dr. Docent *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli* ; Conf. Dr. *S. Călin* ; Acad. Prof. Dr. Docent *D. Dumitrescu* ; Prof. *S. Gâdea* ; Conf. Dr. *I. Grădișteanu*, Prof. *C. Ionescu-Bujor* ; Prof. Dr. Docent *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu* ; Prof. *St. Mantea* ; Prof. Dr. *N. Marinescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu* ; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *R. Rădulet* ; Prof. *Al. Rău* ; Prof. *Al. Spătaru* ; Prof. *L. Stoicescu* ; Prof. Dr. Docent *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

I. M. Miu

Théorèmes de moyenne et de différences divisées généralisées . . . 17

CHIMIE ANALITICA

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Metode pentru dozarea 2-dietilamino 1-cloretan 45

TEHNOLOGIE CHIMICA

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

Dizolvarea anodică a manganului și aliajelor de mangan în curent continuu și ondulat cu formare de permanganat 49

I. Blum, Fr. Barca, D. Nichitovici

Studiul posibilităților de reducere a consumului de liant pentru obținerea cocsului brichete 59

T. D. Ionescu, Gh. Tudorache

Recuperarea cuprului din apele reziduale rezultate de la purificarea gazului pentru sinteza amoniacului cu ajutorul cationiților anorganici . . 67

FIZICA

H. N. Fuia, I. I. Ponner

A New Improved Radioactive Viscosimeter 73

MECANICA

К. Гуцэ, Ал. Маринеску

Оптимальный маневр стыковки двух космических аппаратов с минимальным запасом топлива летающих по круговым орбитам . . . 79

TEORIA MECANISMELOR

П. А. Лебедев, Б. Н. Певзнер

Перемещения механизма с соприкасающимися рычагами 99

N. I. Manolescu, L. Buda

Contributions to the Unifying of the Graphical Calculations for the Railway Traction by Adopting the Unitarian Scales 109

ORGANE DE MAȘINI

M. R. Mustafa

Asupra distribuției statistice a temperaturii pe suprafețele corpurilor în frecare fără ungere 129

AUTOMATICA

A. Petrescu

Transformări duale ale rețelelor folosite în modelarea problemelor de curgere cu suprafață liberă în medii poroase 145

Резюме

OSZTÁLYOS MAGYAR KOMMENTÁCIÓS SKÓLA 1883

Д. К. 517.5 : 517.9

И. М. Миу

Теоремы обобщенных средних и делимых разностей

В данной работе автор использует теорему : допустим что $f(x)$ постоянная и непреьывная функция в замкнутом интервале [а, в,] и производная в незамкнутом интервале (а, в). Затем допускается : функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$ постоянны и ограничены [а, в,] и непрерывны (а, в).

Между двумя последовательными нулями интервала (а, в) функций $f(x)$ находится минимум один нуль одной из функций.

$$\varphi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; \varphi(x).$$

С помощью этой теоремы устанавливается задача, позволяющая большие обобщения теорем обобщенных средних и делимых разностей. Теоремы даны как для функций переменной, так и для функций многопеременной. Автор демонстрирует широкое поле применения работы в дифференциальном и интегральном вычислениях и в дифференциальных уравнениях.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 545.2 : 545.81 : 66.028 : 546

Гр. Теодореску, Ил. Никулеску

Объёмный и колориметрический методы для дозирования двух диэтиламинов и одного хлорэтана

При прямом объёмном методе использован нитрат серебра как реактив для дозировки, а при косвенном методе вещество осаждается солью Рейнеха.

При колориметрическом методе использована, как реактив для осаждения, соль Рейнеха. Образовавшийся осадок был разбавлен в ацетоне и окрашен в колориметре типа Ланге.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 541.135. : 669.745 : 621.3.024 : 546.711
661.871.27-17 : 621.3.035.224

И. Атанасиу, Л. Блум Лазэр, М. Константинеску

Анодное растворение марганца и его сплавов при постоянном и асимметричном переменном токе с образованием перманганата

Рассматривается анодное растворение марганца и его сплавов с железом и кремнием для непосредственного получения перманганата калия.

Устанавливаются наилучшие условия при постоянном токе и наблюдается деполяризующее действие наложенного переменного тока в зависимости от отношения Ia/Ic, чистоты переменного тока и. т. д

При асимметричном переменном токе выход по току возрастает на 10% и затрата энергии уменьшается.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Summary

D.C. 517.5 : 517.9

I. M. Miu

Theorems of Means and Generalized Divided Differences

In the present paper the author uses his own theorem :

Let $f(x)$ be a definite and continuous function in the closed interval $[a, b]$ and derivable in the open interval (a, b). Let then be the functions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ defined and limited on $[a, b]$, and continuous (a, b)

Between two consecutive zeros in the interval $[a, b]$ of the function $f(x)$, there is at least one zero of one of the functions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; \varphi(x)$$

The theorem is used to establish a lemma giving very high generalizations of mean theorems and of generalized divided differences. The theorems are given both for functions of one variable and for functions of several variables. The paper is accompanied by various applications. The author clearly shows the wide applicability of the present paper to differential calculus, integral calculus and differential equations.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 545.2 : 545.81 : 66.028 : 546

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Volumetric and Colorimetric Method for Metering 2-Diethylamino 1-Chloretrane

In the direct volumetric method silver nitrate was used as metering reagent and in the indirect method the substance was precipitated with Reinecke salt.

Reinecke salt was used as precipitant reagent in the colorimetric method. The formed precipitate was solved in acetone and a Lange-type colorimeter was used to measure the colour intensity.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 541.135 : 669.745 : 621.3.024 : 546.711 : 661.871.27—17 : 621.3.035.224

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

The Anodic Dissolution of Manganese and its Alloys in Direct and Asymmetric Alternatig Current for Obtaining Permanganate

We studied the anodic dissolution of manganese and its alloys ferro- and silicomanganese for obtaining directly potassium permanganate.

The best conditions of the electrolysis in direct current are established and the depolarizing effect of the alternating superposed current dependent on the ratio I_a/I_c the frequency of the alternating current, etc is studied.

We obtain at the electrolysis in asymmetric alternating current an increase of the current yield nearly 10% compared to the value obtained at the electrolysis in direct current as well as a decrease of the specific energy consumption.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 662.815 : 666.9 : 66.04

И. Блум, Фр. Барка, Д. Никитович

Изучение путей снижения расходов вяжущего вещества для получения брикетного кокса

Работа на основе лабораторных исследований показывает возможности снижения раходов вяжущего вещества и соответственно количества летучих веществ при производстве брикетного кокса, полученного путем последующей термохимической окислительной обработки.

Работа предлагает использования эмульсионного вяжущего вещества вместо расплавленного и дробленого.

Устанавливаются параметры, которые обусловливают возможности использование эмульсионного вяжущего вещества, условия брикетирования и их влияние на качество кокса.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 661.183.123.2 : 661.856.712

Т. Д. Ионеску, Г. Т дораке 8 : 628.54 : 661.53 : 546 : 56

Извлечение меди из медно-аммиачных водостоков в цехе очистки газа для синтеза аммиака путем ионообмена

Экспериментально были исследованы катиониты из кремнистого гела, полученные из металлических шлаков с селективной на обмен способностью для тяжелых металлов. Соответствующие катиониты количественно задерживают медь из аммиачных водостоков формиата или аустата меди. Медь, задержанную катионитами, количественно элуируют (разбавляют) растворами 3—5 уксусной кислоты в виде аустата меди или растворами 3—5 муравьиной кислоты в виде формиата меди. Полученные элуаты могут быть вновь пущены в оборот в процессе очистки газа для синтеза после надлежащей переработки с целью получить первичный состав и концентрацию медноаммиачного щелока.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 539.16 : 532 : 531.7 : 621.38 : 539.155.2

Х. Н. Фуйа, И. И. Поннер

Радиоактивный измеритель вязкости

Предлагаемый радиоактивный измеритель вязкости основан на принципе падения радиоактивного шарика в изучаемой жидкости. Скорость падения шарика определяется повышением совокупности величин скорости, обозначенной r (t), функцией времени падения шарика t с помощью электродного устройства детектор-счетчик, управляемой нестабильным поливибратором. Калибровка прибора производится путем измерения скорости, обозначаемой r (x), функцией расстояния x подвешенного шарика.

Точность определения коэффициента вязкости силиконного масла (ОЕИ018/100000) этим измерением до 2%.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

К. Гуцэ, А. Маринеску Д. К. 621.19 : 621.825 : 621-9

Оптимальный маневр встречи двух космических аппаратов, работающих с минимальным расходом топлива по круговым орбитам

В работе изучается оптимальный маневр встречи с минимальным расходом горючего двух космических аппаратов, движущихся по круговым орбитам как для случая с сопротивлением, так и без него.

Предполагается, что спутник является целью (спутник без двигательной системы), а перехватчик движется по орбите, ближайшей к первой, и имеет двигательную систему малой мощности.

Выяснение оптимальных условий изменения параметров движения перехватчика приводит в наастоящей работе к вариационной задаче условного экстремума для оптимального маневра.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 662.815 : 666.9 : 66.04

I. Blum, Fr. Barca, D. Nichitovici

Study upon of Binding Material Consumption Reduction for Coke Briquette Production

This paper indicates, on basis of laboratory researches, the possibility of reducing of binding material consumption and of volatile substances respectively, for coke briquettes produced by oxidizing thermo-chemical treatment.

It suggests the use of emulsioned binding material instead of the molten or ground one.

The parameters, conditioning the possibilities for emulsioned binding material using, briquetting conditions as well as their influences on coke qualities ,are determined.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 661.183.123.2 : 661.856.712.8 : 628.54 : 661.53 : 546.56

T. D. Ionescu, Gh. Tudorache

Recovery by Ionic Exchange, of the Copper From the Cupro-Ammonia Waste Water of the Gas Purifying Section in the Synthesis of Ammonia

Cationetes obtained from metallurgic slags, having a selective exchange capacity for heavy metals were experimented upon, on a basis of silica gel. The respective cationites quantitatively retain the copper from the residual ammonia waters of copper acetate or formiate. The copper retained by the cationites is quantitatively eluated by means of 3—5 m acetic acid solutions, in the form of copper acetate, or by means of 3—5 m formic acid solutions, in the form of cupper formiate. The eluants obtained can be re-cycled in the purifying process of the synthesis gas after the necessary processing view of obtaning the composition and concentration of the initial cupro -ammonia lye.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 539.16 : 532 : 531.7: 621.38 : 539.155.2

H. N. Fuia, I. I. Ponner

A New Improved Radioactive Viscosimeter

The proposed radioactive viscosimeter relies on the principle of a ball sinking in the liquid under investigation. The ball sinking rate is determined t by measuring a set of $r(t)$ counting rate values depending on ball sinking time with an electronic scaler — detector commanded by an astable multivibrator.

Device calibration is carried out by measuring $r(x)$ counting rate function of x-depth at which the ball is suspended in liquid.

The accuracy at silicone oil (OE 4018/100.000) viscosity coefficient determination with this viscosimeter is under 2%.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C. Guţă, Al. Marinescu D.C. 621.19 : 621.825 : 621—9

Optimum Meeting Manoeuvre with Minimum Fuel Consumption, for Cosmic Apparatus Moving on Circular Orbits

This paper studies the optimum meeting manoeuvre with minimum fuel consumption for two cosmic apparatuses moving on circular orbits, both for the case when the effect of resistance to forward movement is taken into account, and when it is not.

It is assumed that the tracked apparatus is an earth satellite in motion (without any propulsive system) on a circular orbit, and the tracking apparatus moving on a close orbit is provided with a small power propulsive system.

In the present work and for the above mentioned optimum manoeuvre, the problem of finding the optimum variation laws of the motion parameters of the tracking apparatus amounts to a variational problem of conditioned extremum.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 621-2 : 621.8 : 677

П. А. Лебедев, Б. Н. Певзнер

Перемещения механизма с соприкасающимися рычагами

Устанавливается аналитическое выражение позиции ведомого элемента пространственного механизма с двумя подвижными элементами в контакте через высшую пару в позиционной функции φ ведущего элемента. Выражение $\psi = \psi(\varphi)$ можно использовать в шагающих механизмах.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 621-23 : 621.8.02 : 625.2

Н. И. Манолеску, Л. Буда

Унификация графических расчетов тяги поездов путем применения единой шкалы

В работе представлены методы установления отношений между масштабами, имеющими понятие шкалы, как отношение между единицей измерения физических величин и числом миллиметров, которыми единица представлена на чертеже.

Таким образом определяется производная шкала, по которой измеряется пройденный путь, время и расход горючего или электроэнергии, а также разгон и замедление поезда на участке прицепления.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 531.4 : 536.5 : 621.89 : 621-2 : 539.2

М. Р. Мустафа

О статическом распределении температуры при сцеплении материала во время торможения без смазки

Из-за неровностей поверхности детали действительный контакт имеет прерывистый характер.

Принимая во внимание неодинаковую высоту неровностей, их различную нагрузку и, следовательно, различные источники тепла, считаем, что местные температуры покажут определенное отклонение от средних температур соприкасающихся поверхностей.

В работе на основе статических элементов устанавливается отклонение, с помощью которого определена местная температура по отношению к средней температуре поверхностного слоя.

Результаты могут быть использованы также для вычисления разницы температур (средних) между двумя поверхностями с различными неровностями.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Д. К. 621.316 : 621.314 : 621.3.015.621:311.1

А. Петреску

Дуальное преобразование сеток для моделирования задач течения со свободной поверхностью в пористой среде

В работе показываются преимущества дуальных преобразований сеток для моделирования задач течения со свободной поверхностью в пористой среде.

Исходя из двух систем аналогий между гидравлическими и электрическими величинами, автор рассматривает конкретный случай преобразований сеток для моделирования задачи водянных конусов, которые встречаются при эксплуатации нефти.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 621—2 : 621.8 : 677

P. A. Lebedev, B. N. Pevzner

Movement of a Contacting Lever Mechanism (upper coupling at Mechanism

The analytic expression of the ψ position of the conducted element of the spatial mechanism having two contacting mobile elements by upper coupling is established, function of the φ position of the conducting element.

The determination of the $\psi = \psi(\varphi)$ expresion allows its application in palpating mechanisms.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 621—23 : 621.8.02 : 625.2

N. I Manolescu, L. Buda

Contributions to the Unifying of the Graphical Calculations for the Railway Traction by Adopting the Unitarian Scales.

In the paper are shown the methods of establishing the relations between the scales used for the graphical calculations of traction using the notion of scale for the ratio between the unit of measure of the physical quantity and the number of millimetres by which this is represented in the drawing.

Thus, the derivative scales, in which time fuel consumption or electric power, are measured, as well as the acceleration or deceleration of the train on the railway-traction section, are determined.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 531.4 : 536.5 : 621.89 : 621—2 : 539.3

M. R. Mustafa

On the Statistical Distribution in Material Couples in Friction without Lubrication.

Owing to the roughness on the part surfaces, the actual contact has a discontinuous character. Because of the unequal height of the asperities, these are differently loaded and, therefore, the heat sources are different, the local temperatures marking a certain deviation as against the average temperature of the contact surfaces. The paper determines — based on the statistical calculus elements — the deviation of the local temperature as against the average temperature of the superficial layer.

Results may also be used to estimate the temperature differences (averages) between two surfaces having different asperities.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.C. 621.316 : 621.314 : 621.3.015 : 621.311.1

A. Petrescu

Dual Transformations of the Networks Used in Modelling Problems of Flow with Free Surface in Porous Media

The paper shows the advantages of dual transformation of networks on which are modelled problems of flowing with free surface through porous media.

Starting with two analogy systems between the hydraulic quantities and the electric ones, the precise case of transformation of some networks is studied, on which the water flow problem occurring in oil exploitation, is modelled.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Résumé

C.D. 517.5 : 517.9

I. M. Miu

Théorèmes de moyenne et différences divisées généralisées

Dans cet ouvrage, l'auteur utilise le théorème suivant, qui lui est propre :

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b). Soit ensuite les fonctions $\psi(x)$ $\varphi(x)$ définies et bornées, sur $[a, b]$ et continues sur (a, b).

Entre deux zéros consécutifs de l'intervalle $[a, b]$ de la fonction $f(x)$ il y a au moins un zéro de l'une des fonctions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; \varphi(x)$$

A l'aide de ce théorème, l'auteur établit un lemme par lequel il donne des généralisations très étendeus de théorèmes de moyennes et de différences divisées généralisées. Les théorémes sont donnés tant pour des fonctions à une variable que pour des fonctions à plusieurs variables. L'ouvrage est accompagné de différentes applications. L'auteur indique aussi les grandes possibilités d'extension de cet ouvrage au calcul différentiel, au calcul intégral et au équations différentielles.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 545.2 : 545.81 : 66.028 : 546

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Methode volumétrique et colorimétrique pour le dosage du 2-diéthylamino 1-chloréthane

Pour la méthode volumétrique directe on a utilisé l'azotate d'argent comme réactif de dosage et pour la méthode indirecte on a précipité la substance à l'aide de sel Reinecke.

Pour la méthode colorimétrique on a employé le sel de Reinecke comme réactif précipitant. Le précipité formé a été dissous dans de l'acétone et pour mesurer l'intensité de la couleur, on a employé un colorimètre du type Lange.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 541.135 : 669.745 : 621.3.024 : 546.717 :
661.871.27—17 : 621.3.035.224

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

La dissolution anodique du manganèse et ses alliages en courant continu et alternatif asymétrique avec la formation de permanganate

On étudie la dissolution anodique du manganèse et de ses alliages de fer et silicium afin d'obtenir directement le permanganate de potassium.

On établit les meilleures conditions pour l'électrolyse en courant continu et on poursuit l'effet dépolarisant du courant alternatif superposé en fonction du rapport I_a/I_c de la fréquence du courant alternatif, etc.

Une augmentation du rendement du courant de presque 10% est obtenue dans l'électrolyse en courant alternatif asymétrique par rapport à la valeur résultée de l'électrolyse en courant continu ; en même temps se produit une diminution de la consommation spécifique d'énergie électrique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

Zusammenfassung

D.K. 517.5 : 517.9

I. M. Miu

Mittelwersätze und verallgemeinerte Teildifferenzen

In dieser Arbeit benützt der Verfasser seinen folgenden Lehrsatz:
Sei $f(x)$ eine bestimmte und ununterbrochene Funktion in dem geschlossenen Zwischenraum $[a, b]$ und eine abgeleitete in dem offenen Zwischenraum $[a, b]$. Seien darauf die Funktionen $\psi(x)$, $\varphi(x)$ bestimmte und begrenzte in $[a, b]$ und ununterbrochene (a, b).

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullpunkten in dem Zwischenraum $[a, b]$ der Funktion $f(x)$, befindet sich wenigstens ein Nullpunkt einer de Funktionen:

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; \varphi(x)$$

Mit Hilfe dieses Lehrsatzes wird ein Lemma festgelegt, das sehr umfassende Verallgemeinerungen von Mittelwertsätzen und Teildifferenzen gibt. Diese Sätze sind sowohl für die Funktionen mit einer Veränderlichen, als auch für die Funktionen mit mehreren Veränderlichen gegeben. Die Arbeit wird von verschiedenen Abbildungen begleitet. Der Verfasser zeigt das weite Ausdehnungsfeld der vorliegenden Arbeit, bei der Differentialrechnung, der Integralrechnung und den Differentialgleichungen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 545.2 : 545.81 : 66.028 : 546

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Volumetrische und kolorimetrische Methode zur Dosierung des 2-Aminodiäthyl 1-Chloräthan

In der direkten volumetrischen Methode wurde als Dosierungsreagent das Silbernitrat benützt, während bei der indirekten die Lösung mit Reineckesalz gefällt wurde.

In der kolorimetrischen Methode wurde als Niederschlagreagens das Reineckesalz angewendet. Der entstandene Bodensatz wurde in Azeton aufgelöst und bei einem Kolorimeter, Typ Lange, kolorimetriert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 541.135 : 669.745 : 621.3.024 : 546.717 : 661.871.27—17 : 621.3.035.224

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

Die anodische Auflösung des Mangans und seiner Legierungen im Gleichstrom und asymetrischen Wechselstrom zur Permanganatbildung

Es wird die anodische Auflösung des Mangans und seiner Ferro-und Silizium- Legierungen zur direkten Darstellung des Kaliumpermanganats studiert.

Es werden die optimalen Bedingungen im Gleichstrom festgelegt und es wird die depolarisierende Wirkung des überlagerten Wechselstroms in Abhängigkeit vom Verhältnis I_a/I_c, des Frequenzwechselstroms, etc verfolgt.

Bei der Elektrolyse mit asymmetrischem Wechselstrom erzielt man eine Steigerung der Stromausbeute von ungenfähr 10% im Vergleich zu dem sich aus der Elektrolyse mit Gleichstrom ergebenden Werten sowie eine Verringerung des spezifischen Energieverbrauchs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 662.815 : 666.9 : 66.04

I. Blum, Fr. Barca, D. Nichitovici

Études des possibilités de réduction de la consummation de liant pour l'obtention du coke en briquettes

A partir des recherches effectuées dans le laboratoire, cet ouvrage indique les possibilités de réduction de la consommation de liant et par conséquent de la quantité des matières volatiles du coke en briquettes fabriqué par post-traitement thermochimique oxydatif.

On propose l'utilisation du liant émulsionné à la place du liant fondu ou broyé.

On établit les paramètres qui conditionnent les possibilités d'emploi du liant émilsionné, les conditions de briquetage et leur influence sur la qualité du coke.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 661.183.123.2 : 661.856.712.8 : 628.54 : 661.53 : 546.56

T. D. Ionescu, Gh. Tudorache

Récupération du cuivre des eaux résiduaires cupro-ammoniacales de la section de purification du gaz pour la synthèse de l'ammoniaque, par échange ionique

Les cationites obtenus des scories métallurgiques ayant une capacité sélective d'échange pour les métaux lourds ont été soumis à des expériences à base de gel silicieux. Les cationites respectifs retiennent quantitativement le cuivre des eaux résiduaires ammoniacales de formiate ou d'acétate de cuivre. Le cuivre retenu par les cationites est élué quantitativement à l'aide de solutions d'acide acétique 3—5 m, sous forme d'acétate de cuivre, ou de solutions d'acide formique 3—5 m, sous forme de formiate de cuivre. Les éluants obtenus peuvent être recirculés dans le processus de purification du gaz de synthèse, après la préparation requise en vue d'obtenir la composition et la concentration de la lessive cupro-ammoniacale initiale.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 539.16 : 532 : 531.7 : 621.38 : 539.155.2

H. M. Fuia, I. I. Ponner

Un viscosimètre radioactif

Le viscosimètre radioactif proposé est basé sur le principe de la chute d'une bille radioactive dans le liquide étudié. La vitesse de chute de la bille est déterminée par l'augmentation de l'ensemble des valeurs de la vitesse de dénombrement $r(t)$, fonction du temps de chute de la bille t, à l'aide d'une installation électronique détecteur-compteur, commandée par un multivibrateur astable. Le calibrage de l'appareil s'effectue en mesurant la vitesse de dénombrement $r(x)$, fonction de la distance x à laquelle la bille est suspendue dans le liquide. La précision de détermination du coefficient de viscosité de l'huile de silicone (OEU 18/100.000 à l'aide de ce viscosimètre est inférieure à 2%.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C. Guţă, Al. Marinescu C.D. 621.19 : 621.825 : 621—9

Manoeuvre optimum de rencontre des appareils (engins) cosmiques evoluant sur orbite circulaire, avec une consommation minimum de combustible

Cet article étudie la manoeuvre opimum de rencontre, avec consommation minimum de combustible, de deux appareils (engins) cosmiques sur orbite circulaire, pour le cas où on ne tient pas compte de l'effet de la résistance à l'avancement ainsi que pour le cas où cet effet est considéré.

On suppose que l'appareil (engin) poursuivi soit un satellite de la terre se déplaçant (sans installation propulsive) sur une orbite circulaire, tandis que l'appareil poursuivant, qui se déplace sur une orbite proche, soit équipé d'une installation propulsive de faible traction.

Le problème de la détermination des lois optimum de variation des paramètres du mouvement de l'appareil (engin) poursuivant revient à un problème variationnel d'extrémum conditionné.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

I. Blum, Fr. Barca, D. Nichitovici D.K. 662.815 : 666.9 : 66.04

Das Studium der Reduziermöglichkeiten des Bindemittelverbrauchs zur Erlangung der Koksbrikette

Auf Grund der durchgeführten Laborversuche gibt diese Arbeit die Möglichkeit der Herabsetzung des Bindemittelverbrauchs und dement sprechend der Quantität von Volatilstoffen aus den Koksbriketten, die durch eine oxidierende thermochemische Nachbehandlung hergestellt wurden, an.

Sie schlägt die Benützung des emulgierten Bindemittels, an Stelle des geschmolzenen oder gemahlenen Bindemittels vor.

Es werden die Parameter bestimmt, die die Anwendungsmöglichkeit des emulgierten Bindemittels, die Brikettierungsbedingungen und ihren Einfluss auf die Qualität des Kokses bedingen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 661.183.123.2 : 661.856.712.8 : 628.54 : 661.53 : 546.56

T. D. Ionescu, Gh. Tudorache

Die Rückgewinnung des Kupfers aus den Kupfer-ammoniakalen Abwasser der Gasreinigungsabteilung für die Ammoniaksynthese durch Ionenaustausch

Es wurden die durch Silikagel aus Metallurgieschlacke mit selektiver Austauschfähigkeit für Schwermetall erhaltenen Kationenaustauscher erprobt.

Die entsprechenden Kationenaustauscher halten das Kupfer aus den Ammoniakalen, Formiat- oder Kupferazetat-Abwasser quantitativ zurück. Das durch die Kationenaustauscher zurückgehaltene Kupfer wird mit Hilfe der Lösungen von 3—5 m Essigsäure, in Form von Kupferazetat, oder mit der Lösung von 3—5 m Ameisensäure, in Form von Kupferformiat quantitativ eluiert.

Die erlangten Eluaten können nach der zur Erhaltung der Zusammensetzung und Konzentration der initialen Kupfer-ammoniakalen Lauge notwendigen Bearbeitung in dem Reinigungsprozess des Synthesegases im Umlauf gesetzt werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

H. N. Fuia, I. I. Ponner D.K. 539.16 : 532 : 531.7 : 621.38 : 539.155.2

Ein radioaktives Viskosimeter

Das vorgeschlagene radioaktive Viskosimeter stützt sich auf das Prinzip des Falls einer radioaktiven Kugel in die untersuchte Flüssigkeit. Die Fallgeschwindigkeit wird durch die Hebung der Wertegruppe der Zählgeschwindigkeit $r\ (t)$, in Abhängigkeit von der Fallzeit der Kugel t und mit Hilfe der durch einen nichtstabilen Multivibrator gesteuerten elektronischen Detektor — Zähleranlage bestimmt.

Die Kalibrierung des Geräts wird durch die Messung der Zählgeschwindigkeit $r\ (x)$, in Abhängigkeit von der Entfernung x in der die Kugel in der Flüssigkeit aufgehängt ist, bestimmt.

Mit diesem Viskosimeter liegt die Bestimmungsgenaugkeit des Silikonöl — Viskositätskoeffizients (OEUO18/100.000) unter 2%.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C. Guţă, Al. Marinescu D.K. 621.19 : 621.825 : 621—9

Optimales Begegnungsmanöver der kosmischen Apparate die sich in Kreisbahnen mit einem minimalen Brennstoffverbrauch fortbewegen

In der Arbeit wird das optimale Begegnungsmanöver mit einem minimum von Brennstoff von zwei kosmischen Apparaten in Kreisbahnen studiert, sowohl für den Fall in dem man von dem Effekt des Vorrückwiderstandes keine Rechnung trägt, als auch dann, wenn man es tut.

Es wird angenommen, dass der verfolgte Apparat sich ein in einer Kreisbahn in Bewegung befindender Erdsatellit (ohne Vortriebsanlage) ist und der verfolgte Apparat, der sich in einer nahegelegenen Bahn bewegt mit einer Vortriebsanlage von geringer Zugkraft versehen ist.

Das Problem, das an die Erhaltung der optimalen Variatonsgesetze der Bewegungsparameter des verfolgten Apparats gebunden ist, wird in vorliegender Arbeit für das oben angeführte Manöver, ein Variationsproblem mit bedingtem Extremum.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 621—2 : 621.8 : 677

P. A. Lebedev, B. N. Pevzner

Mouvement d'un mécanisme à leviers en contact (à couple supérieur) mécanisme spatial

Les auteurs établissent l'expression analytique de la position ψ de l'élément dirigé du mécanisme spatial ayant deux éléments mobiles en contact par couple supérieur, en fonction de la position φ de l'élément conducteur.

La détermination de l'expression $\psi = \psi(\varphi)$ permet son application dans les mécanismes palpeurs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 621—23 : 621.8.02 : 625.2

N. I. Manolescu, L. Buda

Contributions a l'unification des calculs graphiques dans la traction des trains, par l'adoption d'echelles unitaires

On présente dans cet article les méthodes employées en vue d'établir des relations entre les échelles, en utilisant la notion d'échelle comme le rapport entre l'unité de mesure de la grandeur physique et le nombre de millimètres par lequel celle-ci est représentée sur le dessin.

On détermine ainsi les échelles dérivées auxquelles on mesure le chemin parcouru, le temps et la consommation de combustible ou d'énergie électrique, ainsi que l'accélération ou la décélération du train, par section de remorquage.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 531.4 : 536.5 : 621.89 : 621—2 : 539.3

M. R. Mustafa

Sur la distribution statistique de la température aux couples de matériau en frottement sans lubrification

A cause des aspérités existant a la surface des pièces, le contact réel a un caractère discontinuu. Etant donné les hauteurs inégales des aspérités, celles-ci seront différemment chargées et en conséquence, les sources de chaleur seront différentes, les températures locales marquent une certaine déviation par rapport à la température moyenne des surfaces de contact. L'auteur détermine dans l'ouvrage, à partir des élèments de calcul statistique, la déviation présentée par la température locale par rapport à la température moyenne de la couche superficielle.

Les résultats peuvent aussi servir pour évaluer les différences de température (moyennes) entre deux surfaces ayant des aspérités différentes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

C.D. 621.316 : 621.314 : 621.3.015 : 621.311.1

A. Petrescu

Transformations duales des réseaux utilisés dans le modelage des problèmes d'écoulement à surface libre en milieux poreux

L'auteur présente dans l'ouvrage les avantages des transformations duales des réseaux sur lesquels on modèle les problèmes d'écoulement à surface libre à travers des milieux poreux.

A partir de deux systèmes d'analogie entre les grandeurs hydrauliques et les grandeurs électriques, l'auteur étudie les cas concrets de la transformation de certains réseaux sur lesquels on modèle le problème de l'écoulement de l'eau rencontré dans l'extraction du pétrole brut.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 621—2 : 621.8 : 677

P. A. Lebedev, B. N. Pevzner

Die Bewegung eines Mechanismus, mit in Kontakt befindenden Hebeln (obere Kupplung), Raummechanismus

Es wird der analytische Ausdruck der Stellung ψ des geführten Elements des Raummechanismus mit zwei, durch die obere Kupplung in Kontakt befindende bewegliche Elementen, in Abhängigkeit von der Stellung des führenden Elements festgelegt.

Die Bestimmung des Ausdrucks $\psi = \psi(\varphi)$ gestattet die Anwendung derselben in den Tastermechanismen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 621—23 : 621.8.02 : 625.2

N. I. Manolescu, L. Buda

Beiträge zur Vereinheitlichung der graphischen Berechnungen in der Zugförderung durch Aneignung einheitlicher Masstäbe

In der Arbeit werden die Bestimmungsmethoden der Verhältnisse zwischen den Masstäben vorgestellt, indem man den Begriff eines Masstabes als Verhältnis zwischen der Masseinheit der physikalischen Grösse und der Anzahl von Millimetern durch die diese auf der Zeichnung wiedergegeben ist, benützt.

Auf diese Art werden die abgeleiteten Masstäbe mit deren Hilfe der zurückgelegte Weg, die Zeit und der Verbrauch an Brennstoff oder elektrischer Energie bestimmt, sowie die Beschleunigung oder Verlangsamung des Zugs in der Schleppabteilung gemessen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 531.4 : 536.5 : 621.89 : 621—2 : 539.3

M. R. Mustafa

Über die statische Verteilung der Temperatur bei ohne Schmierung reibenden Materialpaarungen

Infolge der Oberflächenrauhigkeit, hat der wirkliche Kontakt einen diskontinuierlichen Charakter. Die verschieden hohen Oberflächenvorsprünge erhalten unterschiedliche Belastungen, dem zufolge sind auch die Wärmequellen veschieden, da die lokalen Temperaturen eine gewisse Abweichung gegenüber der Durchschnittstemperatur der Berührungs — flächen vorweisen.

Auf Grund der statistischen Berechnungselemente wird in der Arbeit die Abweichung bestimmt, die die örtliche Temperatur gegenüber der Durchschnittstemperatur der Oberflächenschicht aufweist.

Die Ergebnisse können ebenfalls zur Bewertung des (durchschnittlicher) Temperaturunterschiedes zwischen zwei Oberflächen mit unterschiedlichen Rauheiten dienen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

D.K. 621.316 : 621.314 : 621.3.015 : 621 : 311.1

A. Petrescu

Duale Wandlungen der in der Modellierung der Strömungsfragen mit freier Oberfläche in porösen Medien angewendeten Netze.

In der Arbeit werden die Vorteile der dualen Wandlungen der Netze vorgestellt, in denen Fragen des Strömung mit freier Oberfläche durch poröse Medien modelliert werden.

Von zwei Analogiesystemen zwischen den hydraulischen und elektrischen Grössen ausgehend, wird der konkrete Fall der Wandlung von Netzen studiert, in denen die Frage, des bei der Erdölförderung gefundenen Wassers modelliert wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 1/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLYA 1883

MATEMATICĂ

C.Z. : 517.5 : 517.9

THÉORÈMES DE MOYENNE ET DE DIFFÉRENCES DIVISÉES GÉNÈRALISÉES *)

I. M. Miu

Dans nôtres ouvrages [2], [3] nous avons donné des génèralisations du théorème de la moyenne de Cauchy.

Dans ce qui suit nous donnerons encore des généralisations plus grandes. Les formules que nous allons établir peuvent être considérées comme des généralisations des différences divisées d'une fonction dans le cas des noeuds distincts ou répétés. Ces formules se réfèrent aux fonctions avec une ou plusieurs variables, et par leurs particularisations on obtient des formules et des théorèmes connues.

Dans ce qui suit nous utiliserons la suivante théorème donnée par nous en nôtres ouvrages [2], [4], [5] :

Théorème : Soient les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$, bornées et définies sur l'intervalle $[a, b]$, telle que :

1°. La fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b).

2°. Les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ sont continues sur (a, b).

Entre deux zéros consécutifs de la fonction $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$, on trouve au moins un zéro de l'une des fonctions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x);\ \varphi(x)$$

Théorème affirme aussi qu'entre deux zéros consecutifs de la fonction $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$ on trouve au total un nombre impair de zéros des fonctions $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$.

D'après ce théorème il résulte qu'entre deux zéros consecutifs de la fonction $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$ on trouve au moins un zéro — et toujours un nombre impair — de la fonction :

$$\psi(x) f(x) + f'(x).$$

*) Ouvrage reçue au redaction à 10 Janvier 1966.

Dans ce qui suit, pour abréger les formules, nous allons noter les déterminants par une ou deux colonnes ainsi :

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nk} \end{matrix} \right|_{k=1,2\,..\,n} \qquad \text{où } \Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \ldots \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{matrix} \right|,$$

où

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{1k} & b_1 \\ a_{2k} & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{nk} & b_n \end{matrix} \right|_{k=1,2\,\ldots\,n-1} \qquad \text{où } \Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,\,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,\,n-1} & b_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdots \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n,\,n-1} & b_n \end{matrix} \right|$$

Chapitre I

Théorèmes de moyenne dans le cas des fonctions d'une variablie et noeuds distincts.

Nous démontrerons tout d'abord le suivant :

§ 1. Lemme

Soit $f(x)$ une fonction définie et dérivable p fois sur l'intervalle $[a, b]$ et les fonctions $\lambda_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots p-1$, continues et définies sur $[a, b]$.

Si la fonction $f(x)$ a n zéros dans l'intervalle (a, b), la fonction :

$$T(x) = \lambda_0(x) f(x) + \lambda_1(x) f'(x) + \cdots + \lambda_{p-1}(x) f^{(p-1)}(x) + f^{(p)}(x), \qquad (1)$$

a au moins $n - p$ zéros dans l'intervalle (a, b).

Nous allons démontrer ce lemme par la méthode de l'induction complète.

a) D'après nôtre théorème, il résulte que si la fonction $f(x)$ a n zéros dans $[a, b]$, la fonction :

$$\lambda_0(x) f(x) + f'(x),$$

a au moins $n - 1$ zéros dans (a, b).

b) Nous considérons le lemme vrais pour la fonction :

$$H(x) = \mu_0(x) f(x) + \mu_1(x) f'(x) + \cdots + \mu_{p-2}(x) f^{(p-2)}(x) + f^{(p-1)}(x), \qquad (2)$$

où les fonctions $\mu_j(x)$, $j = 0, 1, 2 \ldots p-2$, sont continues sur $[a, b]$.

Dans l'hypothèse considérée, la fonction $f(x)$ ayant n zéros dans $[a, b]$, il résulte que la fonction $H(x)$ a au moins $n - p + 1$ zéros dans (a, b).

Il faut démontrer que la fonction :

$$T(x) = \lambda_0(x) f(x) + \lambda_1(x) f'(x) + \cdots \lambda_{p-1}(x) f^{(p-1)}(x) + f^{(p)}(x), \qquad (1)$$

où les fonctions $\lambda_k(x)$ sont continues sur $[a, b]$, a au moins $n - p$ zéros dans l'intervalle (a, b).

L'hypothèse étant vraie pour les fonctions $\mu_j(x)$ continues sur l'intervalle $[a, b]$, nous considérons que ces fonctions sont dérivables sur cet intervalle.

Soit la fonction $g(x)$ continue sur $[a, b]$.

D'après nôtre théorème, il résulte que la fonction :

$$g(x)\ H(x) + H'(x)$$

a dans (a, b) au moins $n - p$ zéros.

Nous détérminons les fonctions $g(x)$, $\mu_j(x)$, $j = 1, 2, 3 \ldots p - 2$, tel que

$$g(x) H(x) + H'(x) \equiv T(x) \qquad (3)$$

De cette identité il résulte les conditions :

$$\left.\begin{aligned} g\mu_0 + \mu'_0 &= \lambda_0 \\ g\mu_1 + \mu'_1 + \mu_0 &= \lambda_1 \\ g\mu_2 + \mu'_2 + \mu_1 &= \lambda_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g\mu_{p-2} + \mu'_{p-2} + \mu_{p-3} &= \lambda_{p-2} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$g + \mu_{p-2} = \lambda_{p-1} \qquad (5)$$

Ce système d'équations différentielles peut être mis sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} \mu'_0 &= \lambda_0 + \mu_0(\mu_{p-2} - \lambda_{p-1}) \\ \mu'_1 &= \lambda_1 + \mu_1(\mu_{p-2} - \lambda_{p-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu'_{p-2} &= \lambda_{p-2} + \mu_{p-2}(\mu_{p-2} - \lambda_{p-1}) \\ g &= \lambda_{p-1} - \mu_{p-2} \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Dans le système d'équations différestielles (4'), les fonctions qui se trouvent dans les deuxièmes membres :

$$\lambda_k(x) + \mu_k[\mu_{p-2} - \lambda_{p-1}(x)] = \Gamma_k(x, \mu_k, \mu_{p-2}),$$

sont continues pour $x \in [a, b]$ et $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{p-1} \in R$.

D'après le théorème d'existence, il résulte que le système d'équations différentielles (4) admet au moins une solution $\mu_0(x), \mu_1(x), \mu_2(x) \ldots \mu_{p-1}(x)$ par chaque point du domaine de définition $[a, b] \times R^p$ de fonctions Γ_k.

La valeur de fonction $g(x)$ s'obtient de (5).

Il résulte de ce qui précède que pour toutes les fonctions $\lambda_j(x)$ continues sur $[a, b]$ on peut déterminer les fonctions $\mu_k(x)$ dérivable sur $[a, b]$ et une fonction $g(x)$ continue sur $[a, b]$, de telle sorte que nous avons l'identité (3). Comme la fonction $H(x)$ a par hypothèse $n - p + 1$ zéros dans $[a, b]$, d'après nôtre théorème il résulte de l'identité (3) que la fonction $T(x)$ a au moins $n - p$ zéros dans l'intervale $(a\ b)$.

§ 2. *Théorème I.*

Soient les fonctions $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ *dérivables* $p - 1$ *fois sur l'intervalle* $[a, b]$ *et l'ensemble ordonné de points :*

$$E = \{a = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_p = b\}.$$

Si le système d'équations :

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f_\tau(a_i)\,\alpha_\tau + f_n(a_i) = 0,\quad i = 1, 2 \ldots p$$

en rapport aux inconnues $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ *est compatible, pour toutes valeurs réelles des* $\lambda_{i_s n}$, *il existe des valeurs* $x = c_{i_s} \in (a, b)$ *de telle sorte que nous avons :*

$$\begin{vmatrix} f_k(a_1) \\ f_k(a_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k(a_p) \\ \lambda_{i_1 0} f_k(c_{i_1}) + \lambda_{i_1 1} f'_k(c_{i_1}) + \cdots + \lambda_{i_1, p_1 - 1} f_k^{(p_1 - 1)}(c_{i_1}) + f_k^{(p_1)}(c_{i_1}) \\ \lambda_{i_2 0} f_k(c_{i_2}) + \lambda_{i_2 1} f'_k(c_{i_2}) + \cdots + \lambda_{i_2, p_2 - 1} f_k^{(p_2 - 1)}(c_{i_2}) + f_k^{(p_2)}(c_{i_2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{i_j 0} f_k(c_{i_j}) + \lambda_{i_j 1} f'_k(c_{i_j}) + \cdots + \lambda_{i_j, p_j - 1} f_k^{(p_j - 1)}(c_{i_j}) + f_k^{(p_j)}(c_{i_j}) \end{vmatrix}_{k=1, 2 \ldots n} = 0 \qquad (6)$$

Dans le déterminant nous avons :

$$p + j = n,\ j \geqslant 0,\ p_1, p_2 \ldots p_j \leqslant p - 1$$

aussi nous avons :

— *tout au plus une ligne quand* $p_s = p - 1$

— *tout au plus 2 lignes quand* $p_s = p - 2$

. . . . . .

— *tout au plus p—1 lignes quand* $p_s = 1$

Démonstration :

Soit la fonction auxiliaire :

$$F(x) = \sum_{\tau=1}^{n-1} f_\tau(x)\,\alpha_\tau + f_n(x), \tag{7}$$

où les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ satisfont le système :

$$F(a_i) = 0,\ i = 1, 2, \dots p,\ p \leqslant n-1 \tag{8}$$

Nous utiliserons le lemme établi en considérant les fonctions λ_j constantes.

Conformément aux conditions (8), la fonction $F(x)$ ayant p zéros dans l'intervalle $[a, b]$, il résulte que pour toutes valeurs réelles des paramètres λ_j il existe des valeurs réelles $c_i \in (a, b)$ de telle sorte que nous avons :

$$\left.\begin{array}{c}
F(a_i) = 0,\ i = 1, 2 \dots p, \\
\lambda_{i_1 0} F(c_{i_1}) + F'(c_{i_1}) = 0,\ i = 1, 2, \dots p-1, \\
\lambda_{i_2 0} F(c_{i_2}) + \lambda_{i_2} F'(c_{i_2}) + F''(c_{i_2}) = 0,\ i = 1, 2, \dots p-2, \\
\lambda_{i_3 0} F(c_{i_3}) + \lambda_{i_3 1} F'(c_{i_3}) + \lambda_{i_3 2} F''(c_{i_3}) + F''(c_{i_3}) = 0,\ i = 1, 2, \dots p-3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_{i_s 0} F(c_{i_s}) + \lambda_{i_s 1} F'(c_{i_s}) + \dots + \lambda_{i_s, p-2} F^{(p-2)}(c_{i_s}) + F^{(p-1)}(c_{i_s}) = 0 \\
s = p-1,\ i = 1.
\end{array}\right\} \tag{9}$$

Le système (9) contient $\dfrac{p(p+1)}{2}$ équations avec les inconues

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$$

Comme les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}$ sont déterminées de telle sorte q'elles satisfassent le système (8), il résulte de là, que le système (9) est compatible.

Conformément au théorème de Capelli, il résulte que la matrice formée avec les coefficients de $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-}$ a le même rang avec la matrice formée avec les mêmes coefficients et les termes libres.

Nous supposons $p \leqslant n-1$ et $\dfrac{p(p+1)}{2} > n-1$

La matrice formée avec le coefficients de $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ a le rang $\leqslant n-1$.

Il résulte de là, que si $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ satisfassent le système (8), tous les déterminants d'ordre $\geqslant n$ de matrice du système (9) sont zéro.

Si nous considérons p équations $F(a_i) = 0$ de système (9) et autres certaines $n-p$ equations de (9), il résulte plusieurs formules de moyenne en écrivant que le déterminant des coefficients des $\alpha_1, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ et le termes libres des équations considérées est nul.

§ 3. *Théorème II*

Soient les fonctions $f_{j_1}(x)$, $f_{j_2}(x) \dots f_{j_n}(x)$; $j = 1, 2, \dots r$, *dérivables* $p_j - 1$ *fois respectivement sur les intervalles* $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots r$.
Nous considérons encore les ensembles ordonnés de points :

$$E_j = \{a_j = a_{1j} < a_{2j} < \dots < a_{pj} = b_j\},\ j = 1, 2, 3 \dots r$$

Si le système d'équations

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f_{j\tau}(a_{sj})\ a_\tau + f_{jn}(a_{sj}) = 0$$

$s = 1, 2, \dots p_j$; $j = 1, 2, 3 \dots r$ *est compatible, pour toutes valeurs réelles des* $\lambda^j_{i_s n}$ *il existe des valeurs* $c^j_{i_s} \in (a_j, b_j)$, $j = 1, 2, 3 \dots r$, *de telle sorte que nous avons :*

$$\left|\begin{array}{l} L_1 f_{1k}(a_1, b_1) \\ L_2 f_{2k}(a_2, b_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_r f_{rk}(a_r, b_r) \\ D_{q_1} f_{1k}(c^1) \\ D_{q_2} f_{2k}(c^2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{q_r} f_{rk}(c^r) \end{array}\right|_{k=1,2,\dots n} = 0 \qquad (10)$$

Dans le déterminanat nous avons noté :

— *avec :* $L_j f_{jk}(a_j, b_j)$, $j = 1, 2, 3 \dots r$ *les lignes suivantes :*

$$\begin{array}{l} f_{jk}(a_{1j}) \\ f_{jk}(a_{2j}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{jk}(a_{p_j j}) \end{array}$$

— *avec :* $D_{q_j} f_{jk}(c^j)$, $j = 1, 2, 3 \dots r$ *les lignes suivantes :*

$$\lambda^j_{i_1 0} f_{jk}(c^j_{i_1}) + \lambda^j_{i_1 1} f'_{jk}(c^j_{i_1}) + \dots + \lambda^j_{i_1, q_{j_1}-1} f^{(q_{j_1}-1)}_{jk}(c^j_{i_1}) + f^{(q_{j_1})}_{jk}(c^j_{i_1})$$

$$\lambda^j_{i_2 0} f_{jk}(c^j_{i_2}) + \lambda^j_{i_2 1} f'_{jk}(c^j_{i_2}) + \dots + \lambda^j_{i_2, q_{j_2}-1} f^{(q_{j_2}-1)}_{jk}(c^j_{i_2}) + f^{(q_{j_2})}_{jk}(c^j_{i_2})$$

. . . . . .

$$\lambda^j_{iu0} f_{jk}(c^j_{i_u}) + \lambda^j_{i_u 1} f'_{jk}(c^j_{i_u}) + \dots + \lambda^j_{i_u, q_{ju}-1} f^{(q_{ju}-1)}_{jk}(c^j_{i_u}) + f^{(q_{ju})}_{jk}(c^j_{i_u})$$

où $u = s_j$, et *nous avons :* $s_1 \geqslant 1$, $s_2 \geqslant 0, \dots s_r \geqslant 0$.

— *Aussi dans le déterminant nous avons :*

$$p_1 + p_2 + \dots p_r + s_1 + s_2 + \dots + s_r = n,$$

— *tout au plus une ligne quand* $q_{j_i} = p_j - 1$

— *tout au plus 2 lignes quand* $q_{j_i} = p_j - 2$

. . . . . .

— *tout au plus* $p_j - 1$ *lignes quand* $q_{j_i} = 1$

Démonstration :

Nous considérons les fonctions auxiliaires :

$$F_j(x) = \sum_{\tau=1}^{n-1} f_{j\tau}(x)\,\alpha_\tau + f_{jn}(x), \quad j = 1, 2 \dots r \tag{11}$$

où les constantes α_τ satisfont le système :

$$F_j(a_{\sigma j}) = \sum_{\tau=1}^{n-1} f_{j\tau}(a_{\sigma j})\,\alpha_\tau + f_{jn}(a_{\sigma j}) = 0 \tag{12}$$

$$\sigma = 1, 2 \dots p_j; \quad j = 1, 2 \dots r$$

Nous utiliserons aussi le lemme établi avec les fonctions λ_j constantes et procédons de la même manière comme dans le théorème I.

Conformément aux conditions (12) en tenant compte de lemme, il résulte que pour toutes valeurs réelles des paramètres $\lambda^j_{i_\nu \eta}$, il existe des valeurs réelles $c^j_{i_\nu} \in (a_j, b_j)$ de telle sorte que nous avons :

$$\left.\begin{gathered}
F_j(a_{\sigma j}) = 0; \ \sigma = 1, 2 \dots p_j; \ j = 1, 2 \dots r, \\
\lambda^j_{i_1 0} F_j(c^j_{i_1}) + F'_j(c^j_{i_1}) = 0 \\
i = 1, 2 \dots p_j - 1; \ j = 1, 2, \dots r. \\
\lambda^j_{i_2 0} F_j(c^j_{i_2}) + \lambda^j_{i_2 1} F'_j(c^j_{i_2}) + F''_j(c^j_{i_2}) = 0 \\
i = 1, 2 \dots p_j - 2; \ j = 1, 2, \dots r \\
. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
\lambda^j_{i_u 0} F_j(c^j_{i_u}) + \lambda^j_{i_u 1} F'_j(c^j_{i_u}) + \dots + \lambda^j_{i_u p_j - 2} F^{(p_j-2)}_j(c^j_{i_u}) + F^{(p_j-1)}_j(c^j_{i_u}) = 0 \\
i = 1, \ j = 1, 2, 3 \dots r \text{ et } u = p_j - 1
\end{gathered}\right\} \tag{13}$$

Comme le système (12) est compatible, en tenant compte de lemme etabli, aussi le système (13) est compatible, d'où il résulte le théorème II.

Observations :

1°. Les théorèmes I et II peuvent être énoncés aussi quand au lieux de constantes λ_k on considère fonctions $\lambda_k(x)$ qui satisfassent les conditions :

— dans le cas de théorème I les fonctions $\lambda_k(x)$ sont continues sur $[a, b]$ et dans le cas de théorème II les foncions $\lambda^j_{i_\nu}(x)$ sont continues sur $[a_j, b_j]$.

— dans les déterminants nous remplaçons des constantes λ_k respectivement par $\lambda_k(c_i)$, $c_i \in (a, b)$, et par $\lambda^j_{i_\nu}(c^j_i)$, $c^j_i \in (a_j, b_j)$.

2°. Le théorème II peut être énoncé dans le cas plus général pour les fonctions :

$$f_{j_1}(x),\ f_{j_2}(x) \dots f_{j_{n_j}}(x);\ j = 1, 2, 3 \dots r,$$

qui admettent analoguement des dérivées inclusif jusqu'à l'ordre $p_j - 1$ sur les intervales $[a_j, b_j]$.

Dans ce cas si $n = \sup\{n_1, n_2, \dots n_r\}$ nous complétons les fonctions f_{j_i}, ainsi :

$$f_{j_1}(x),\ f_{j_2}(x), \dots f_{j_{n_j}}(x),\ \varphi_{j_{n_j+1}}(x), \dots \varphi_{j_n}(x);\ j = 1, 2, \dots r.$$

Les fonctions $\varphi(x)$ sont assujeties aux conditions d'être dérivables comme les fonctions $f(x)$ (par exemple nous pouvons prendre les fonctions $\varphi(x)$ des constantes arbitraires).

Chapitre II.

Théorèmes de moyenne dans le cas des fonctions d'une variable et avec noeuds répétés

§ 1. *Considérations préliminaires*

Nous considérons les noeuds distincts et appliquons la formule de Taylor ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
f_k(a_2) &= f_k(a_1) + \frac{a_2 - a_1}{1!} f'_k(\xi_1) \\
f_k(a_3) &= f_k(a_1) + \frac{a_3 - a_1}{1!} f'_k(a_1) + \frac{(a_3 - a_1)^2}{2!} f''_k(\xi_2) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_k(a_{q+1}) &= f_k(a_1) + \frac{a_{q+1} - a_1}{1!} f'_k(a_1) + \dots + \frac{(a_{q+1} - a_1)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}_k(a_1) + \\
&\quad + \frac{(a_{q+1} - a_1)^q}{q!} f^{(q)}_k(\xi_q)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

où les nombres ξ_l sont situés dans un voisinage de a_1.

De ces rélations nous trouvons les valeurs des $f'_k(\xi_1)$, $f''_k(\xi_2)..,f^{(q)}_k(\xi_q)$. Dans le déterminant (6) du théorème I nous faisons les opérations suivantes:

— Retranchons la ligne 1 de la ligne 2, divisons les résultats par $a_2—a_1$, et ensuite faisons $a_2 \to a_1$. Les éléments de la ligne 2 deviennent $f'_k(a_1)$.

— Dans la ligne 3 nous faisons une combination avec les lignes 1 et 2 qui résulte de relations (14) ainsi :

$$\frac{f_k(a_3) - f_k(a_1) - \dfrac{a_3 - a_1}{1!} f'_k(a_1)}{\dfrac{(a_3 - a_1)^2}{2!}} = f''_k(\xi_2).$$

En faisant $a_3 \to a_1$, les éléments de la ligne 3 deviennent $f''_k(a_1)$.

— Plus loin on procéde de la même maniére avec les lignes suivantes jusqu'au ligne $q + 1$.

Les éléments des ces lignes deviennent :

$$f_k(a_1),\ f'_k(a_1),\ f''_k(a_1),\ ...\ f^{(q)}_k(a_1).$$

De même manière on continue plus loin avec autres groupes de lignes et on obtient le suivant

§ 2. *Théorème. I.*

Soient les fonctions $f_1(x), f_2(x), ... f_n(x)$, *dérivables* $m — 1$ *fois sur les intervalles* $[a, b]$ *et l'ensemble ordonnée de points :*

$$E = \{a = a_1 < a_2 < ... < a_p = b\}.$$

Si le système d'équations :

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f_\tau(a_j)\,\alpha_\tau + f_n(a_j) = 0;\ j = 1, 2, ... p$$

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f^{(l_j)}_\tau(a_j)\,\alpha_\tau + f^{(l_j)}_n(a_j) = 0$$

$$l_j = 1, 2, ... q_j;\ j = 1, 2 ... p$$

en raport aux inconnues $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_{n-1}$ *est compatible, pour toutes valeurs réelles de* λ_{l_j} *il existe des valeurs* $c_i \in [a, b]$ *de telle sorte que nous avons :*

$$\begin{vmatrix} I_{q_1}(f_k) \\ I_{q_2}(f_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{q_p}(f_k) \\ \lambda_{l_{10}} f_k(c_{i_1}) + \lambda_{i_{11}} f'_k(c_{i_1}) + ... + \lambda_{l_1,\ p_1-1} f^{(p_1-1)}_k(c_{i_1}) + f^{(p_1)}_k(c_{i_1}) \\ \lambda_{i_{20}} f_k(c_{i_2}) + \lambda_{i_{21}} f'_k(c_{i_2}) + ... + \lambda_{i_2,\ p_2-1} f^{(p_2-1)}_k(c_{i_2}) + f^{(r_2)}_k(c_{i_2}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{l_{j0}} f_k(c_{l_j}) + \lambda_{l_{j1}} f'_k(c_{l_j}) + ... + \lambda_{l_j\ p_j-1} f^{(p_j-1)}_k(c_{l_j}) + f^{(p_j)}_k(c_{l_j}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (15)$$

$k = 1, 2 ... n$

Dans le déterminant nous avons noté :

$I_{q_r}(f_k)$, $r = 1, 2 \ldots p$, les lignes :

$$f_k(a_r)$$

$$f'_k(a_r)$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$f_k^{(q_r)}(a_r)$$

$$0 \leqslant q_r \leqslant m - 1$$

— *aussi dans le déterminant nous avons :*

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_p + p + j = n, \; j \geqslant 1,$$

— *tout au plus une ligne quand* $p_s = m - 1$
— *tout au plus 2 lignes quand* $p_s = m - 2$
. . . . . .
— *tout au plus m—1 lignes quand* $p_s = 1$.

De même manière on peut trouver le théorème II, pour le cas des noeuds répétés :

§ 3. *Théorème II*

Soient les fonctions $f_{j_1}(x)$, $f_{j_2}(x) \ldots f_{j_n}(x)$; $j = 1, 2 \ldots r$, *derivables* $w_j - 1$ *fois respectivement sur les intervalles* $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \ldots r$.

Nous considérons les ensembles ordonnées de points :

$$E_j = \{a_j = a_{1j} < a_{2j} < \ldots < a_{p_j j} = b_j\}; \; j = 1, 2 \ldots r.$$

Si le système d'équations :

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f_{j\tau}(a_{sj})\, \alpha_\tau + f_{jn}(a_{sj}) = 0$$

$$s = 1, 2 \ldots p_j; \; j = 1, 2, \ldots r,$$

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f_{j\tau}^{(l_{sj})}(a_{sj})\, \alpha_\tau + f_{jn}^{(l_{sj})}(a_{sj}) = 0$$

$$l_{sj} = 1, 2, \ldots v_{sj}; \; s = 1, 2 \ldots p_j; \; j = 1, 2 \ldots r$$

est compatible, pour toutes valeurs réelles des $\lambda^{i}_{i_s \eta}$ *il existe des valeurs* $c^{i}_{i_s} \in [a_j, b_j]$, $j = 1, 2 \ldots r$, *de telle sorte que nous avons :*

$$\left| \begin{array}{l} M_1 f_{1k}(a_1, b_1) \\ M_2 f_{2k}(a_2, b_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_r f_{rk}(a_r, b_r) \\ D_{q_1} f_{1k}(c^1) \\ D_{q_2} f_{2k}(c^2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{qr} f_{rk}(c^r) \end{array} \right|_{k=1,2,3..n} = 0 \qquad (16)$$

Dans le déterminant nous avons noté :

— *les symboles :* $M_j f_{jk}(a_j, b_j)$, $j = 1, 2 \ldots r$, *représent les expressions :*

$$I_{v1_j}(f_{jk})$$
$$I_{v2_j}(f_{jk})$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$I_{vp_jj}(f_{jk})$$

— *les éxpressions* $I_v(f)$ *signifient des lignes du déterminant. Ainsi nous avons noté avec* $I_{v_{sj}}(f_{jk})$ *les lignes :*

$$f_{jk}(a_{sj})$$
$$f'_{jk}(a_{sj})$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$f^{(v_{sj})}_{jk}(a_{sj})$$

$s = 1, 2 \ldots p_j$; $j = 1, 2 \ldots r$; $v_{s_j} \geqslant 0$; $w_j = v_{1j} + v_{2j} + \ldots + v_{p_j j} + p_j$.

Les éxpressions D_q ont même significations que dans le théorème II chap. I. § 3.

Aussi dans le déterminant nous avons :

$$\sum_{j=1}^{r} (v_{1j} + v_{2j} + \ldots + v_{p_j j}) + r + s_1 + s_2 + \ldots + s_r = n,$$

$$s_1 \geqslant 1,\ s_2 \geqslant 0, \ldots s_r \geqslant 0,\ q_{j_i} \leqslant w_j - 1,$$

— *tout au plus une ligne quand* $q_{ji} = w_j - 1$
— *tout au plus 2 lignes quand* $q_{j_l} = w_j - 2$.

. . . . . .

— *tout au plus* $w_j - 1$ *lignes quand* $q_{j_l} = 1$.

Observation. Les observations faites au chapitre I sont aussi valables aux téorèmes précédents.

Chapitre III

Différences divisées généralisées

§ 1. *Le cas des noeuds distincts*

On désigne généralement [1] différence divisée d'ordre n avec $n + 1$ noeuds distincts, l'expression :

$$[a_1, a_2, \ldots a_{n+1}, f(x)] = \frac{1}{W_n} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots a_1^{n-1} & f(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots a_2^{n-1} & f(a_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \ldots a_{n+1}^{n-1} & f(a_{n+1}) \end{vmatrix} \qquad (1^-)$$

où $$W_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \ldots a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Nous donnerons une généralisation de cette formule avec le théorème 1, chap. I.

En faisant dans ce théorème :

$$j = 1,\ \lambda_{i_1 0} = \lambda_{i_1 1} = \ldots = \lambda_{i_1 p-1} = 0$$

$$E = \{a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b\},$$

et pour les fonctions nous prenons :

$f_1(x), f_2(x) \ldots f_{n+1}(x), f(x)$, dérivables n fois sur $[a, b]$.

D'après le théorème I, chap. I., résulte qu'il existe un nombre $c \in (a, b)$, de telle sorte que nous avons

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \dots & f_{n+1}(a_1) & f(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \dots & f_{n+1}(a_2) & f(a_2) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ f_1(a_{n+1}) & f_2(a_{n+1}) & \dots & f_{n+1}(a_{n+1}) & f(a_{n+1}) \\ f_1^{(n)}(c) & f_2^{(n)}(c) & \dots & f_{n+1}^{(n)}(c) & f^{(n)}(c) \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

Par analogie, on nomme différence divisée généralisée d'ordre n avec noeuds distincts, l'expression :

$$[a_1, a_2 \dots a_{n+1}, f_1(x), f_2(x) \dots f_{n+1}(x), f(x)] =$$

$$= -\frac{1}{n!\, V_n} \begin{vmatrix} f_k(a_1) & f(a_1) \\ f_k(a_2) & f(a_2) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f_k(a_{n+1}) & f(a_{n+1}) \\ f_k^{(n)}(c) & 0 \end{vmatrix}_{k=1,2\dots n+1} \tag{19}$$

où nous avons noté :

$$V_n = \begin{vmatrix} f_k(a_1) \\ f_k(a_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k(a_{n+1}) \end{vmatrix}_{k=1,2\dots n+1},$$

c étant un nombre situé dans l'intervalle (a, b).

De la relation (18), en tenant compte de (19) il résulte

$$[a_1, a_2, \dots a_{n+1}, f_1(x), f_2(x) \dots f_{n+1}(x), f(x)] = \frac{f_{(c)}^{(n)}}{n!}. \tag{20}$$

On peut tirer en particularisant ces résultats, la différence divisée avec n noeuds distincts d'ordre n de la fonction $f(x)$.

Ainsi dans les formules (18), (19), (20) on fait :

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2, \dots f_{n+1}(x) = x^n$$

et on aura :

— La formule (19) devient la formule de la différance divisée d'ordre n pour la fonction $f(x)$.

— La relation (20) devient :

$$[a_1, a_2, \dots a_{n+1}, f(x)] = \frac{f^{(n)}_{(c)}}{n!}. \tag{20'}$$

Cette relation exprime un théorème connu ([1] p. 160) concernant au différence divisée d'ordre n de la fonction $f(x)$, et la formule (20) est une généralisation de ce théorème.

§ 2. *Le cas des noeuds répétés*

On peut déduire de théorème I chap. II la formule et le théorème pour la différence divisée avec les noeuds répétés.

Dans ce théorème on pose :

$$j = 1\,,\ \lambda_{i_1 0} = \lambda_{i_1 1} \cdots = \lambda_{i_1 p-1} = 0$$

$$E = \{a = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1} = b\}.$$

Aussi nous considérons les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_{n+1}(x)$, $f(x)$ dérivables n fois sur $[a, b]$.

Il résulte du théorème cité, qu'existe un nombre $c \in (a, b)$ de telle sorte que nous avons :

$$\begin{vmatrix} I_{q_1}(f_k) & I_{q_1}(f) \\ I_{q_2}(f_k) & I_{q_2}(f) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ I_{q_p}(f_k) & I_{q_p}(f) \\ f_k^{(n)}(c) & f^{(n)}(c) \end{vmatrix}_{k=1,2\dots n+1} = 0 \tag{22}$$

où $q_1 + q_2 + \dots + q_p + p = n + 1$

Aussi on nomme différence généralisée avec noeuds répétés de la fonction $f(x)$ l'expression :

$$[\underbrace{a_1, a_1, \dots a_1}_{q_1}, \underbrace{a_2 \dots a_2}_{q_2}, \dots, \underbrace{a_p, a_p \dots a_p}_{q_p}, f_1, f_2 \dots f_{n+1}, f] =$$

$$= -\frac{1}{n!\,U_n} \begin{vmatrix} I_{q_1}(f_k) & I_{q_1}(f) \\ I_{q_2}(f_k) & I_{q_2}(f) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ I_{q_p}(f_k) & I_{q_p}(f) \\ f_k^{(n)}(c) & 0 \end{vmatrix}_{k=1,2,\dots n+1} \tag{23}$$

où :

$$U_n = \begin{vmatrix} I_{q_1}(f_k) \\ I_{q_2}(f_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{q_p}(f_k) \end{vmatrix}_{k=1,2,\ldots n+1}, \text{ et } c \in (a, b).$$

Il signifie qu'existe toujours un nombre $c \in (a, b)$ de telle sorte qu'on aura la relation (23).

La relation (22), en tenant compte de (23), donne :

$$[\underbrace{a_1 a_1, \ldots a_1}_{q_1}, \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{q_2}, \ldots \underbrace{a_p \ldots a_p}_{q_p}, f_1, f_2 \ldots f_{n+1}, f] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (24)$$

De la même manière comme dans le cas précédent, en particularisant ces résultats, on obtient la formule et le théorème classique ([1] *p.* 164) pour la différence divisée avec noeds répétés.

Ainsi dans les formules (22), (23), (24) on fait :

$$f_1(x) = 1, \; f_2(x) = x, \ldots f_{n+1}(x) = x^n.$$

Dans ce cas les formules (23), (24) deviennent respectivement :

$$[\underbrace{a_1, a_1 \ldots a_1}_{q_1}, \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{q_2}, \ldots, \underbrace{a_p \ldots a_p}_{q_p}, f] =$$

$$= -\frac{1}{n!\, U_n} \begin{vmatrix} I_{q_1}(x^k) & I_{q_1}(f) \\ I_{q_2}(x^k) & I_{q_2}(f) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ I_{q_p}(x^k) & I_{q_p}(f) \\ (x^k)^{(n)}_{x=c} & 0 \end{vmatrix}_{k=0,1,2 \ldots n}, \quad (23')$$

$$[\underbrace{a_1, a_1 \ldots a_1}_{q_1}, \underbrace{a_2 \ldots a_2}_{q_2}, \ldots \underbrace{a_p \ldots a_p}_{q_p}, f] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (24')$$

La formule (23′) exprime la différence divisée avec noeuds répétés pour la fonction $f(x)$ et (24′) exprime le théorème classique [1], p. 164.

Chapitre IV

Applications

On peut faire de nombreuses applications concernant les théorèmes établis dans les chapitres précédents.

Nous donnons seulement quelques applications.

Application 1

Particularisons le théorème I, chap. I ainsi :

Soit les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ dérivables $p-1$ fois sur $[a, b]$ et :

$$E = \{a = a_1 < a_2 < \ldots < a_p = b\}.$$

Si le système d'équations :

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} f_\tau(a_j)\,\alpha_\tau + f_n(a_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots p$$

$$\sum_{\tau=1}^{n-1} A_{k\tau}\,\alpha_\tau + A_{kn} = 0,\ k = 1, 2, \ldots m$$

avec $p + m = n - 1$ (où A_{ij} sont des constantes arbitraires) en raport aux inconnues $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$, este compatible, pour toutes valeurs réelles des λ_i, il existe des valeurs $c \in (a, b)$ de telle sorte que nous avons :

$$\begin{vmatrix} f_k(a_1) \\ f_k(a_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k(a_p) \\ A_{k_1} \\ A_{k_2} \\ \cdot \\ A_{k_m} \\ \lambda_0 f_k(c) + \lambda_1 f_k'(c) + \ldots + \lambda_{q-1} f_k^{(q-1)}(c) + f_k^{(q)}(c) \end{vmatrix}_{k=1,2\ldots n} = 0 \qquad (25)$$

Dans le déterminant nous avons $q \leqslant p - 1$.

Application 2.

En particularisant les théorèmes précédents on peut obtenir des nombreuses relations entre les valeurs en divers points des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Soit l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + \lambda_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \lambda_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + \lambda_1(x)\, y' + \lambda_0(x)\, y = 0 \qquad (26)$$

où les coefficients $\lambda_i(x)$ sont fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$.

Considérons $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$, un système fondamental de solutions de l'équation (26).

Soit l'ensemble de points :

$$E = \{a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b\},$$

et nous appliquons le théorème I, chap. I, pour les fonctions

$$f_1(x),\ f_2(x) \ldots f_n(x),\ f_{n+1}(x) = 1,\ f_{n+2}(x) = x$$

Il existe un nombre $c \in (a, b)$ de telle sorte que nous avons :

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \ldots & f_n(a_1) & 1 & a_1 \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \ldots & f_n(a_2) & 1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(a_{n+1}) & f_2(a_{n+1}) & \ldots & f_n(a_{n+1}) & 1 & a_{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_0(c) & \lambda_1(c) + \lambda_0(c)\, c \end{vmatrix} = 0 \qquad (27)$$

Si nous posons $\dfrac{\lambda_1(c)}{\lambda_0(c)} = \lambda(c)$ (supposons que $\lambda_0(x) \neq 0$ dans $[a, b]$), il résulte q'on aura :

$$(\lambda(c) + c) \begin{vmatrix} f_k(a_1) & 1 \\ f_k(a_2) & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f_k(a_{n+1}) & 1 \end{vmatrix}_{k=1,2\ldots n} - \begin{vmatrix} f_k(a_1) & a_1 \\ f_k(a_2) & a_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f_k(a_{n+1}) & a_{n+1} \end{vmatrix}_{k=1,2\ldots n} = 0 \qquad (27')$$

Application 3.

Considérons aussi l'équation différentielle (25) et soit $y = f(x)$ une solution de cette équation.

Nous nous proposons de trouver la relation entre les valeurs de $f(x)$ en $n + 1$ points situés dans $[a, b]$.

Soit ces points : $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$

Dans le théorème I chap. I nous prenons : $p = n + 1$, $j = 1$,

$$f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = x, \ldots f_{n+2}(x) = x^n.$$

Notons les valeurs de la fonction $f(x)$ dans les points considérés ainsi :

$$f(a_1) = A_1,\ f(a_2) = A_2 \ldots f(a_{n+1}) = A_{n+1}$$

Notons encore :

$$L_0(x) = \lambda_0(x)$$

$$L_1(x) = \lambda_1(x)[x]' + \lambda_0(x)x$$

$$L_2(x) = \lambda_2(x)[x^2]'' + \lambda_1(x)[x^2]' + \lambda_0(x)x^2$$

. . . . . .

$$L_n(x) = [x^n]^{(n)} + \lambda_{n-1}(x)[x^n]^{(n-1)} + \ldots + \lambda_1(x)[x^n]' + \lambda_0(x)x^n$$

En appliquant le théorème I, chap. I. quand au lieu des constantes λ nous considérons fonctions $\lambda(x)$ continues sur $[a, b]$, il résulte qu'existe un point $c \in [a, b]$ de telle sorte que nous avons :

$$\begin{vmatrix} A_1 & 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ A_2 & 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n+1} & 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \ldots & a_{n+1}^n \\ 0 & L_0(c) & L_1(c) & L_2(c) & \ldots & L_n(c) \end{vmatrix} = 0 \qquad (28)$$

Application 4.

Soit aussi $y = f(x)$ une solution de l'équation (26) et nous proposons de trouver la relation entre les valeurs de $f(x)$, $f'(x), \ldots f^{(n-1)}(x)$ dans les points $x = \alpha$, $x = \beta$; $\alpha, \beta \in (a, b)$.

Nous notons :

$$f(\alpha) = A_0,\ f'(\alpha) = A_1 \ldots f^{(n-1)}(\alpha) = A_{n-1}$$

Avec les notations de l'application précédent, en applicant le théorème II, chap. I, il résulte qu' éxiste un point $c \in [\alpha, \beta]$ de telle sorte que nous avons :

$$\begin{vmatrix} A_0 & 1 & \alpha & \alpha^2 & . & \alpha^n \\ A_1 & 0 & (\alpha)' & (\alpha^2)' & . & (\alpha^n)' \\ A_2 & 0 & 0 & (\alpha^2)'' & . & (\alpha^n)'' \\ A_3 & 0 & 0 & 0 & . & (\alpha^n)''' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n-1} & 0 & 0 & 0 & . & (\alpha^n)^{(n-1)} \\ f(\beta) & 1 & \beta & \beta^2 & . & \beta^n \\ 0 & L_0(c) & L_1(c) & L_2(c) & . & L_n(c) \end{vmatrix} = 0 \qquad (28')$$

On peut trouver avec les théorèmes précédents un multitude de formules pour les intégrales. Dans ce qui suit nous donnerons seulement deux applications :

Application 5

Soit les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ $f_3(x)$, qui ont leurs premières dérivées continues sur $[a, b]$.

D'après le théorème I, chap. I, il existe un point $c \in (a, b)$ de telle sorte qu'on aura :

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \\ f'_1(c) & f'_2(c) & f'_3(c) \end{vmatrix} = 0 \tag{29}$$

avec la condition que le système :

$$\begin{aligned} f_1(a)\,\alpha_1 + f_2(a)\,\alpha_2 + f_3(a) &= 0 \\ f_1(b)\,\alpha_1 + f_2(b)\,\alpha_2 + f_3(b) &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

soit compatible.

Le déterminant peut s'écrire :

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) - f_1(a) & f_2(b) - f_2(a) & f_3(b) - f_3(a) \\ f'_1(c) & f'_2(c) & f'_3(c) \end{vmatrix} = 0 \tag{29'}$$

On peut donner diverses valeurs aux fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ de telle sort que le mineur de $f_3(a)$ (ligne I) du déterminant soit nul. Nous prenos :

$$f_1(x) = g(x) + A,\ f_2(x) = g(x) + B,$$

où A et B sont constantes arbitraires. En substituant ces valeurs dans (29') on obtient :

$$[f_3(b) - f_3(a)]\ g'(c) = f'_3(c)\ [g(b) - g(a)]. \tag{29''}$$

Avec les valeurs des $f_1(x)$, $f_2(x)$ la condition que le système (30) soit compatible est que son déterminant soit $\neq 0$.

On obtient la condition :

$$g(a) \neq g(b)$$

Dans la relation (29'') nous faisons $f'_3(x) = f(x)$ et posons les conditions :

— la fonction $f(x)$ soit continue sur $[a, b]$;

— la fonction $g(x)$ soit dérivable sur $[a, b]$ et $g(a) \neq g(b)$.

De la relation (29″) il résulte :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [g(b) - g(a)]\,\frac{f(c)}{g'(c)},$$

où $c \in (a, b)$

On obtient ainsi une autre formule de moyenne pour une intégrale.

Application 6.

On applique le théorème II, chap. I. pour :

$f_{1i}(x) = A_i x^2 + B_i x + C_i$, $i = 1, 2, 3$, et $f_{14}(x) = \varphi(x)$ dérivable sur $[a, b]$

$$f_{2i}(x) = M_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2, 3; \quad f_{24} = M.$$

Il existe un point $c \in (a, b)$ de telle sorte qu'on a :

$$\left| \begin{array}{cc} A_i a^2 + B_i a + C_i & \varphi(a) \\ A_i b^2 + B_i b + C_i & \varphi(b) \\ M_i & M \\ 2A_i c + B_i & \varphi'(c) \end{array} \right|_{i=1,2,3} = 0 \tag{33}$$

avec la condition que le système

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} (A_i a^2 + B_i a + C_i)\,\alpha_i + \varphi(a) = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} (A_i b^2 + B_i b + C_i)\,\alpha_i + \varphi(b) = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} M_i \alpha_i + M = 0 \end{array}\right\} \tag{34}$$

soit compatible.

Le déterminant (33) peut s'écrire :

$$\left| \begin{array}{cc} A_i a^2 + B_i a + C_i & \varphi(a) \\ A_i (b^2 - a^2) + B_i (b - a) & \varphi(b) - \varphi(a) \\ M_i & M \\ 2A_i c + B_i & \varphi'(c) \end{array} \right|_{i=1,2,3} = 0 \tag{33'}$$

On met la condition que le mineur de $\varphi(a)$ (la ligne 1) soit nul et on aura :

$$\left| \begin{array}{c} A_i \\ B_i \\ M_i \end{array} \right|_{i=1,2,3} = 0 \tag{35}$$

La condition que le système (34) soit compatible est : (on tient compte de (35)).

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_i\,(a+b) + B_i \\ C_i \\ M_i \end{vmatrix}_{i=1,2,3} \neq 0 \qquad (36)$$

Nous faisons dans le déterminant (33') $\varphi'(x) = f(x)$ et il résulte :

— Si les constantes A_i, B_i, C_i, M_i, $i = 1, 2, 3$ satisfont les conditions (35), (36) et la fonction $f(x)$ est continue sur $[a, b]$, il existe un point $c \in (a, b)$ de telle sorte qu'on aura :

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \frac{(b-a)\,\Delta}{Q}\,f\,(c) + \frac{(b-a)\,(a+b-2c)\,M\,\delta}{Q} \qquad (37)$$

où : $Q = \begin{vmatrix} 2A_i c + B_i \\ C_i \\ M_i \end{vmatrix}_{i=1,2,3}$, $\delta = \begin{vmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{vmatrix}_{i=1,2,3}$

La formule (37) peut être particularisée pour $M = 0$

(Les déterminants sont notés abregés).

Chapitre V.

Fonctions de plusieures variables

I. *Le cas des noeuds distincts.*

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables on procede de la même manière, en apportant la problème à une fonction d'une variable.

Dans ce qui suit, nous considérons des cas analogues comme aux fonctions d'une variable.

§ 1. *Théorème I.*

Soit les fonctions $f_k(x_1, x_2 \ldots x_m)$, $k = 1, 2 \ldots n$ *definies pour* $x_i \in [a_i, b_i]$, $i=1, 2 \ldots m$, *qui admettent dérivées partielles inclusivement jusque l'ordre* $p - 1$ *par rapport avec les variables* x_i.

On considère les ensembles ordonnées de points $P_j\,(x_{1j}, x_{2j}, \ldots x_{mj})$, $j = 1, 2 \ldots p$, *situés sur le segment de droit* $P_1 P_p$, *c'est — à — dire les ensembles :*

$$E_i = \{a_i = x_{i1} < x_{i2} < \ldots x_{ip} = b_i\},\ i = 1, 2, \ldots m.$$

sont conditionnés par les relations :

$$\frac{x_{ij} - a_i}{b_i - a_i} = \mu_j,\ \text{où}\ x_{ij} - a_i = \mu_j h_i,\ h_i = b_i - a_i,$$

où μ_j *sont des constantes arbitraires de telle sorte que nous ayons les relations d'ordre dans les ensembles* E_i.

Si le système :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k(P_j)\,\alpha_k + f_n(P_j) = 0,\ j = 1, 2 \dots p$$

este compatible, pour toutes valeurs réelles des paramétres λ_{sv}, *il existe des valeurs* $x_i = c_{iv} \in (a_i, b_i)$, $i = 1, 2 \dots m$, *c'est-à-dire des points* P_v $(c_{1v}, c_{2v}, \dots c_{mp})$, qui sont *situés dans l'intérieure du segment* $P_1 P_p$ *de telle sorte qu'on aura :*

$$\left|\begin{array}{l} f_k(P_1) \\ f_k(P_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k(P_p) \\ \lambda_{10}\Delta^0 f_k(c_1) + \lambda_{11}\Delta^1 f_k(c_1) + \dots + \lambda_{1,p_1-1}\Delta^{p_1-1} f_k(c_1) + \Delta^{p_1} f_k(c_1) \\ \lambda_{20}\Delta^0 f_k(c_2) + \Delta_{21}\Delta^1 f_k(c_2) + \dots + \lambda_{2,p_2-1}\Delta^{p-1} f_k(c_2) + \Delta^{p_2} f_k(c_2) \\ \cdot \\ \lambda_{s0}\Delta^0 f_k(c_s) + \lambda_{s1}\Delta^1 f_k(c_s) + \dots + \lambda_{s,p_s-1}\Delta^{p_s-1} f_k(c_s) + \Delta^{p_s} f_k(c_s) \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ = 0 \\ \\ \\ \\ k=1, 2 \dots n \end{array} \qquad (38)$$

où $p + s = n$, $p_1, p_2, \dots p_s \leqslant p - 1$, $s \geqslant 1$

Dans le déterminant on a :

— *tout au plus une ligne quand* $p_v = p - 1$

— *tout au plus 2 lignes quand* $p_v = p - 2$

. . . . . .

— *tout au plus* $p - 1$ *lignes quand* $p_v = 1$

Dans le déterminant nous avons noté :

$$\Delta^0 f_k(c_v) = f_k(c_{1v},\ c_{2v} \dots c_{mv}) = f_k(P_v)$$

$$\Delta^r f_k(c_v) = \left[\sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{(r)} f_k(x_1,\ x_2, \dots x_m) \Bigg|_{\substack{x_1 = c_{1v} \\ x_2 = c_{2v} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m = c_{mv}}}$$

Demonstration.

Les points P_j sont assujettis de telle sorte qu'on aura :

$$\frac{x_{ij} - a_i}{b_i - a_i} = \mu_j$$

parce qu'ils se trouvent sur la regment de droit P_1P_j. En tenant compte de ces conditions, nous substituons, dans les fonctions considérées, les variables en fonction de t ainsi :

$$x_i = a_i + t h_i \tag{39}$$

où $t \in [0, 1]$, $h_i = b_i - a_i$

Il résulte qu'on aura :

$$x_{ij} = a_i + t_j h_i, \; i = 1, 2 \ldots m; \; j = 1. 2 \ldots p,$$

où $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p = 1$,
et les fonctions considérées deviennent :

$$f_k(t) = f_k(a_1 + t h_1, \; a_2 + t h_2, \ldots a_m + t h_m) \tag{40}$$

[En tenant compte de ce qui précéde — (avec l'hypothèse (39) — on obtient le théorème de moyenne pour les fonctions des plusieures variables de nôtre ouvrage [5]].

Pour démontrer le théorème considéré nous procedons de la même manière comme dans le chap. I, § 2.

Nous considérons la fonction auxiliaire :

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(t) \alpha_k + f_n(t),$$

et aussi le système d'équations :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k(t_j) \alpha_k + f_n(t_j) = 0, \; j = 1, 2 \ldots p$$

Ce système peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_{1j}, \; x_{2j}, \ldots x_{mj}) \alpha_k + f_n(x_{1j}, \; x_{2j}, \ldots x_{mj}) = 0; \; j = 1,2 \ldots p$$

En suivant les mêmes raisonnements comme dans le théorème I, chap. I, § 2, nous obtenons le théorème considéré :

Analogue on démontre le théorème suivant plus géneral.

§ 2. *Théorème II.*

Soit les fonctions $f_{j_1}(x_1, x_2 \ldots x_m)$, $f_{j_2}(x_1, x_2 \ldots x_m), \ldots f_{j_n}(x_1, x_2, \ldots x_m)$, $j=1,2 \ldots p$, *qui admettent dérivées partielles inclusivement jusque l'ordre* $p_j - 1$ *sur les intervalles :*

$$D_j = [a_{1j}, b_{1j}] \times [a_{2j}, b_{2j}] \times \ldots \times [a_{mj}, b_{mj}], \; j = 1, 2 \ldots r.$$

On considère les ensembles ordonnés de points :

$$E_j = \{ P_{j1}, P_{j2}, \ldots P_{jp_j} \}, \; j = 1, 2 \ldots r$$

situés sur les segments $P_{j1} P_{jp_j}$, *c'est-à-dire les points* $P_{j\eta}(x^{\eta}_{1j}, x^{\eta}_{2j}, \ldots x^{\eta}_{mj})$, où $\eta = 1, 2 \ldots p_j$; $j = 1, 2 \ldots r$.

il résulte qu'on aura :

$$a_{\nu j} = x_{\nu j}^1 < x_{\nu j}^2 < \ldots < x_{\nu j}^{p_j} = b_{\nu j}\ ;\ \nu = 1, 2 \ldots m\ ;\ j = 1, 2 \ldots r\ ,$$

$$x_{\nu j}^{\eta} - a_{\nu j} = \mu_{\eta j} h_{\nu j}\ ,\quad h_{\nu j} = b_{\nu j} - a_{\nu j}\ ,$$

où $\mu_{\eta j}$ *sont des constantes arbitraires de telle sorte que nous ayons les relations d'ordre précédentes.*

Si le système :

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{jk}(P_{j\eta})\,\alpha_k + f_{jn}(P_{j\eta}) = 0\ ,\quad \eta = 1, 2 \ldots p_j\ ;\quad j = 1, 2 \ldots r\ ,$$

est compatible, pour toutes valeurs réelles des paramètres $\lambda_{j_\nu \nu}$ *il existe des points*

$P_{j_\nu}(c_{1j_\nu}, c_{2j_\nu} \ldots c_{mj_\nu}) \in (a_{1j}, b_{1j}) \times (a_{2j}, b_{2j}) \times \ldots \times (a_{mj}, b_{mj})$, $j = 1, 2, 3 \ldots r$, *(c'est-à-dire des points situés sur les segments* $P_{j_1} P_{jp_j}$*) de tellle sorte que nous avons :*

$$\left| \begin{array}{l} L_1 f_{1k}(D_1) \\ L_2 f_{2k}(D_2) \\ \vdots \\ L_r f_{rk}(D_r) \\ M_{q_1} f_{1k}(c^1) \\ M_{q_2} f_{2k}(c^2) \\ \vdots \\ M_{q_i} f_{ik}(c^i) \end{array} \right|_{k = 1, 2 \ldots n} = 0$$

Dans le déterminant nous avons noté :

— avec $L_j f_{jk}(D_j)$, $j = 1, 2 \ldots r$ les suivantes lignes :

$$f_{jk}(P_{j_1})$$
$$f_{jk}(P_{j_2})$$
$$\vdots$$
$$f_{jk}(P_{jp_j})$$

— avec $M_{q_j} f_{jk}(c^j)$, $j = 1, 2 \ldots i$ les suivantes lignes :

$$\lambda_{j_1 0}\Delta^0 f_{jk}(c_{j_1}) + \lambda_{j_1 1}\Delta^1 f_{jk}(c_{j_1}) + \ldots + \lambda_{j_1, q_{j_1}-1}\Delta^{q_{j_1}-1} f_{jk}(c_{j_1}) + \Delta^{q_{j_1}} f_{jk}(c_{j_1})$$

$$\lambda_{j_2 0}\Delta^0 f_{jk}(c_{j_2}) + \lambda_{j_2 1}\Delta^1 f_{jk}(c_{j_2}) + \ldots + \lambda_{j_2, q_{j_2}-1}\Delta^{q_{j_2}-1} f_{jk}(c_{j_2}) + \Delta^{q_{j_2}} f_{jk}(c_{j_2})$$

. . . . . .

$$\lambda_{j_{s_j} 0}\Delta^0 f_{jk}(c_{j_{s_j}}) + \lambda_{j_{s_j} 1}\Delta^1 f_{jk}(c_{j_{s_j}}) + \ldots + \lambda_{j_{s_j},\, q-1}\Delta^{q_{j_{s_j}}-1} f_{jk}(c_{j_{s_j}}) + \Delta^{q} f_{jk}(c_{j_{s_j}})$$

et les expressions $\Delta^{\nu} f_{jk}(c)$ ont les mêmes significations comme dans le théorème précédent.

Dans le déterminant on a :

$$\sum_{j=1}^{r} p_j + \sum_{j=1}^{i} s_j = n \; ; \; i \leqslant r \; ; \; s_1 \geqslant 1 \; ; \; s_2 \geqslant 0 \, , \; s_3 \geqslant 0 \ldots s_i \geqslant 0 \, .$$

Aussi dans le déterminant nous avons :

— tout au plus une ligne quand $q_{j\varrho} = p_j - 1$

— tout au plus 2 lignes quand $q_{j\varrho} = p_j - 2$

. . . . . .

— tout au plus $p_j - 1$ lignes quand $q_{j\varrho} = 1$.

II. *Le cas des noeuds répétés*

Dans le cas de noeuds répétés on procéde analogue comme aux fonctions d'une variable et pour cela on transformera les fonctions, comme dans le cas précédent, en fonctions de t.

Ensuite, nous ecrivons pour les fonctions d'un variable le théorème I, chap. II § 1 et on aura :

§ 3. *Théorème III.*

Soit les fonctions $f_k(x_1, x_2 \ldots x_m)$, $k = 1, 2, \ldots n$, *definies pour* $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots m$, *qui admettent dérivées partielles inclusivement jusque l'ordre* $\mu - 1$ *par rapport à variables* x_i .

On considère les ensembles ordonnés de points $P_j (x_{1j} , x_{2j} \ldots x_{mj})$, $j = 1, 2 \ldots p$, *situées sur le segment de droit* $P_1 P_p$, *c'est-à dire les ensembles :*

$$E_i = \{ a_i = x_{i1} < x_{i2} < \ldots < x_{ip} = b_i \} , \; i = 1, 2, \ldots m ,$$

sont conditionnés par les relations :

$$x_{ij} - a_i = \mu_j h_i \; ; \; h_i = b_i - a_i ,$$

où μ_j *sont des constantes arbitraires de telle sorte que nous ayons les relations d'ordre dans les ensembles* E_i .

Si le système :

$$\left.\begin{aligned} a) \quad & \sum_{k=1}^{n-1} f_k(P_j)\, \alpha_k + f_n(P_j) = 0 \, , \quad j = 1\ 2 \ldots p \, , \\ b) \quad & \sum_{k=1}^{n-1} \Delta^{\varrho} f_k(P_j)\, \alpha_j + \Delta^{\varrho} f_n(P_j) = 0 \\ & \qquad\qquad \varrho = 1, 2 \ldots q_j \; ; \; j = 1, 2 \ldots p \end{aligned}\right\}$$

(la notation $\Delta^{\varrho} f_k (P)$ *a la même signification comme dans les théorèmes précédents) est compatible, pour toutes valeurs réelles des paramètres* $\lambda_{\nu\upsilon}$, *il*

existe des valeurs $c_{i_v} \in (a_i, b_i)$, $i = 1, 2 \ldots m$, *c'est-à-dire des points* $P_v(c_{1_v}, c_{2_v}, \ldots c_{m_v})$, *qui sont situés dans l'interieurs du segment* P_1P_p *de telle sorte qu'on aura :*

$$\begin{vmatrix} M_{q_1}(f_k) \\ M_{q_2}(f_k) \\ \vdots \\ M_{q_p}(f_k) \\ \lambda_{10}\Delta^0 f_k(c_1) + \lambda_{11}\Delta^1 f_k(c_1) + \ldots + \lambda_{1,p_1-1}\Delta^{p_1-1} f_k(c_1) + \Delta^{p_1} f_k(c_1) \\ \lambda_{20}\Delta^0 f_k(c_2) + \lambda_{21}\Delta^1 f_k(c_2) + \ldots + \lambda_{2,p_2-1}\Delta^{p_2-1} f_k(c_2) + \Delta^{p_2} f_k(c_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{s0}\Delta^0 f_k(c_s) + \lambda_{s1}\Delta^1 f_k(c_s) + \ldots + \lambda_{s,p_s-1}\Delta^{p_s-1} f_k(c_s) + \Delta^{p_s} f_k(c_s) \end{vmatrix}_{k=1,2..n.} = 0$$

Dans le déterminant nous avons noté :

— avec $M_{q_\sigma}(f_k)$, $\sigma = 1, 2 \ldots p$ les lignes :

$$\Delta^0 f_k(P_\sigma)$$
$$\Delta^1 f_k(P_\sigma)$$
$$\vdots$$
$$\Delta^{q_\sigma} f_k(P_\sigma)$$

où $0 \leqslant q_\sigma < \mu - 1$ (dans l'équations b) on a $q_j \geqslant q_\sigma$)

Aussi dans le déterminant on a :

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_p + p + s = n\ ;\quad s \geqslant 1\ ,$$

— tout au plus une ligne quand $p_v = \mu - 1$

— tout au plus 2 lignes quand $p_v = \mu - 2$

. . . . . .

— tout au plus $\mu - 1$ lignes quand $p_v = 1$.

Nous pouvons encore énoncer une théorème analogue au théorème II chap. II.

Observations.

1. Les théorèmes de cet ouvrage peuvent etre généralisés dans le cas quand les points considérés se trouvent sur divers courbes.

2. *Nous faisons la remarque importante, que les théorèmes précédents* peuvent être énoncer aussi quand dans les déterminants on met les coefficients des α_j des certaines n équations de systèmes respectives.

La chaire de matématique
Institut politechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Ionescu, D.V.*, Cuadraturi numerice. Editura Tehnică 1957.
2. *Miu, I. M.*, Sur une théorème et une généralisation du théorème de la moyenne. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti tom XXV, 1963.
3. *Miu, I. M.*, Sur une généralisation du théorème de la moyenne. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, tom. XXVI, 1964.
4. *Miu, I. M.*, Une Nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations. Buletinul Institutului politehnic, Bucureşti, tom XXV, 1963.
5. *Miu, I. M.*, Sur les zéros réels de certaines fonctions. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, tom. XXVI, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

CHIMIE ANALITICĂ

C.Z.: 545.2 : 545.81 : 66.028 : 546

METODE PENTRU DOZAREA 2-DIETILAMINO 1-CLORETAN *)

Metodă volumetrică pentru dozarea 2-dietilamino 1-cloretan

GR. TEODORESCU, IL. NICULESCU

Nota I.

În nota de față ne-am propus să instituim o metodă de dozare argentometrică pentru 2-dietilamino 1-cloretan, substanță intermediară necesară la prepararea unor produse farmaceutice.

Determinarea s-a făcut direct cu azotat de argint și indirect folosind ca reactiv de precipitare sarea lui Reinecke (tetratiocianatodiaminocromatul de amoniu) $[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4$.

În metoda directă, reacția s-ar putea explica astfel:

$$Cl-CH_2-CH_2-\ddot{N}(C_2H_5)_2+AgNO_3=AgCl+CH_2=CH-N(C_2H_5)_2+HNO_3$$

În metoda indirectă se precipită 2-dietilamino 1-cloretan cu sarea Reinecke cînd se formează o combinație complexă, de culoare liliachie insolubilă în apă și foarte solubilă în acetonă. Reacția care are loc este următoarea:

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4+Cl-CH_2-CH_2-\ddot{N}-(C_2H_5)_2+H_2SO_4=NH_4HSO_4+$$
$$+[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\cdot NH(C_2H_5)_2-CH_2-CH_2-Cl.$$

După separarea și solubilizarea complexului în acetonă, se adaugă exces de azotat de argint 0,1 n cînd are loc reacția:

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH(C_2H_5)_2-CH_2-CH_2-Cl+2AgNO_3=$$
$$=[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]Ag+2HNO_3+CH_2=CH_2-N(C_2H_5)_2+AgCl.$$

Titrarea excesului de soluție de azotat de argint cu soluție 0,1 n tiocianat de amoniu în prezență de alaun feric ca indicator, se face după filtrarea precipitatului format.

* Manuscris predat la redacție la 1 martie 1966.

Modul de lucru prin metoda directă

Se iau într-un flacon de titrare cu o semimicrobiuretă, 5→20 ml soluție de 2-dietilamino 1-cloretan, conținînd 0,250→0,210 g, se adaugă 25→30 ml azotat de argint 0,1 n, 2→3 picături de acid azotic, 1→2 ml alaun feric și se titrează cu soluție de tiocianat de amoniu cu factor cunoscut, excesul de azotat de argint.

Diferența dintre numărul de mililitri de azotat de argint 0,1 n adăugat în exces și mililitrii de tiocianat de amoniu, folosiți la titrarea excesului reprezintă mililitri de azotat de argint, care au reacționat cu substanța.

1 ml de azotat de argint 0, 1 n corespunde la 0,0135 g substanță.

Modul de lucru prin metoda indirectă

Se iau într-un pahar Berzelius de 50 ml, cu o semimicrobiuretă 5→20 ml soluție de 2-dietilamino 1-cloretan conținînd 0,0250—0,0210 g se acidulează cu acid sulfuric și se adaugă prin agitare picătură cu picătură din soluția de sare Reinecke proaspăt preparată (între 15→20 ml) astfel ca soluția de deasupra precipitatului să rămînă intens colorată. După completa precipitare se lasă să se depună precipitatul format și se filtrează apoi pe creuzet filtrant G_4. Se antrenează cantitativ precipitatul în creuzet spălîndu-se totodată cu soluție de reactiv de precipitare (3→4 ori) cu 3→5 ml soluție de fiecare dată apoi de 2→3 ori cu 2→3 ml apă distilată.

Se dizolvă după aceea precipitatul în acetonă direct pe creuzet filtrant prinzînd cantitativ filtratul în balon cotat de 100 ml, după care se adaugă 25→30 ml azotat de argint 0,1 n, cîteva picături de acid azotic și se aduce balonul la semn cu apă distilată. Se filtrează pe filtru cantitativ uscat prinzînd filtratul în sticlă brună uscată din care se iau cote parte de căte 25 ml, în flacoane de titrare. Se adaugă soluției 2→3 picături de acid azotic, 1→2 ml alaun feric și se titrează cu soluție de tiocianat de amoniu, cu factor cunoscut.

Din ecuație rezultă că jumătate din diferența dintre numărul de mililitri de azotat de argint 0,1 n adăugat în exces și numărul de mililitri de tiocianat de amoniu 0,1 n, cu care s-a titrat reprezintă numărul de mililitri azotat de argint ce a legat clorul din complexul

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ NH(C_2H_5)_2CH_2CHCl.$$

Deci 1 ml soluție azotat de argint 0,1 n corespunde la 0,0135/2 g 2-dietilamino 1-cloretan.

Rezultatele obținute prin metoda directă sînt concretizate în tabela 1 iar acelea obținute prin metoda indirectă în tabela 2.

Reactivi întrebuințați :

Soluție de 2-dietilamino 1-cloretan
Soluție 2% sare Reinecke
Soluție de spălare sare Reinecke 1%
Soluție de azotat de argint 0,1 n
Soluție tiocianat de amoniu 0,1 n
Soluție de alaun feric
Soluție de acid azotic diluat
Soluție de acid sulfuric diluat

Tabela nr. 1

Nr. crt.	ml sol. de analizat	g substanță de analizat	ml $AgNO_3$ $0,1^3n$	ml NH_4SCN 0,1n	ml $AgNO_3$ reacționat	g substanță dozată	g subs./ml	Diferența
1	2,5	0,0127	25	23,15	1,85	0,0126	0,0051	0,0000
2	5	0,0257	25	21,20	3,80	0,0255	0,0051	0,0000
3	7,5	0,0384	25	19,30	5,70	0,0384	0,0051	0,0000
4	10	0,0506	25	17,60	7,47	0,0504	0,0051	0,0002
5	12,5	0,0648	25	15,40	9,60	0,0648	0,0051	0,0000
6	15	0,0754	30	18,70	11,30	0,0756	0,0051	0,0002
7	17,5	0,0909	30	16,40	13,51	0,0911	0,0052	0,0002
8	20	0,1036	40	24,84	15,16	0,1037	0,0051	0,0001

Tabela nr. 2

Nr. crt.	ml sol. de analizat	g substanță de analizat	ml $AgNO_3$ $0,1^3n$	ml NH_4SCN 0,1n	ml $AgNO_3$ reacționat	g substanță dozată	g subs./ml	Diferența
1	2,5	0,0127	25	23,20	1,19	0,0127	0,0051	0,0000
2	5	0,0257	25	21,16	3,84	0,0259	0,0051	0,0002
3	7,5	0,0384	25	19,30	5,70	0,0384	0,0051	0,0000
4	10	0,0506	25	17,48	7,52	0,0503	0,0051	0,0001
5	12,5	0,0648	25	15,40	9,60	0,0648	0,0051	0,0000
6	15	0,0754	30	18,62	11,38	0,0754	0,0051	0,0000
7	17,5	0,0909	30	16,40	13,51	0,0911	0,0052	0,0002
8	20	0,1036	40	24,84	15,16	0,1037	0,0051	0,0001

Metodă colorimetrică pentru dozarea 2-dietilamino 1-cloretan

Nota II

După cum s-a arătat în Nota I, 2-dietilamino 1-cloretan, substanță intermediară necesară la prepararea unor produse farmaceutice, formează cu sarea Reinecke o combinațiie complexă de culoarea liliachie, de forma :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4 + Cl-CH_2-CH_2-\ddot{N}(C_2H_5)_2 + H_2SO_4 =$$
$$= [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH(C_2H_5)_2-CH_2-CH_2-Cl + NH_4HSO_4$$

Bazat pe faptul că produsul este insolubil în apă și foarte solubil în acetonă, s-a putut institui, în lucrarea de față, metoda colorimetrică de dozarea acestei substanțe.

Modul de lucru

Se iau cu o microbiuretă probe de soluție ce conțin 0,00051→0,00300 g substanță, se diluează, se adaugă în picătură soluție de sare Reinecke 2% pînă la completă precipitare. Se lasă precipitatul să se depună după care

se filtrează imediat pe creuzet G_4. Se antrenează cantitativ precipitatul în creuzot, folosind soluție apoasă de 0,1% reactiv de precipitare. Se spală precipitatul de 3→4 ori cu 2→5 ml soluție de reactiv 0,1%, iar la sfîrșit de 2→3 ori cu 1→3 ml apă distilată. Se trage apoi bine la trompă, se șterge fundul creuzetului cu hîrtie de filtru, se dizolvă precipitatul direct pe creuzet cu acetonă prinzînd cantitativ soluția în balon cotat de 100 ml și se completează balonul pînă la semn cu apă distilată după care se face colorimetrarea soluției obținute la fotocolorimetru tip B. Lange.

S-a lucrat prin metoda curbelor etalon. În acest scop s-a preparat soluție de sare Reinecke care să aibă titru T=0,0321 g/ml, solventul folosit fiind acetona.

Din soluție s-au luat cantități corespunzătoare cu o semimicrobiuretă și s-au diluat cu acetonă în baloane cotate în așa fel ca să se obțină soluții de concentrații T=0,000032; 0,000064; 0,000240; 0,000321 g/ml. După omogenizare s-a trecut la colorimetrarea soluțiilor și s-a trasat curba.

Odată curba de etalonare trasată, s-a trecut în aceiași zi la colorimetrarea soluțiilor de analizat și s-au obținut următoarele rezultate:

Grame substanță luată	*Grame substanță găsită*	*Eroare*
g/ml	g/ml	
0,00102	0,00100	—1,9%
0,00153	0,00156	+1,9%
0,00204	0,00209	+2,4%
0,00255	0,00248	—2,7%

Curba de etalonare are aliura următoare:

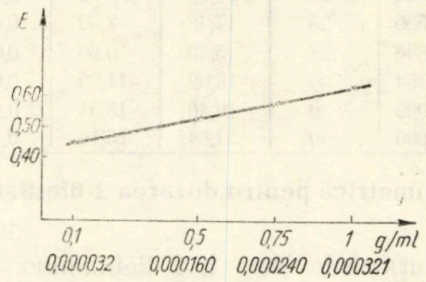


Fig. 1.

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

Spacu P. și *Teodorescu Gr.* Buletinul Institutului Politehnic Nr. 1, 1956.
Spacu P. și *Teodorescu Gr.* Buletinul Institutului Politehnic Nr. 1, 1956.
Spacu P. și *Teodorescu Gr.* Revista de chimie Nr. 1, 1957.
Teodorescu Gr. și *Dinescu A.* Buletinul Institutului Politehnic Nr. 1, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z : 541.135 : 669.745 : 621.3.024 : 546.717 : 661.871.27—17 : 621.3.035.224

DIZOLVAREA ANODICĂ A MANGANULUI ȘI ALIAJELOR DE MANGAN ÎN CURENT CONTINUU ȘI ONDULAT CU FORMARE DE PERMANGANAT *)

I. ATANASIU, L. BLUM LAZĂR, M. CONSTANTINESCU

Comportarea anodică a manganului și aliajelor de mangan, în special a aliajului Fe-Mn, a interesat mulți cercetători datorită faptului că dizolvarea anodică a manganului și aliajelor sale în mediu alcalin (de hidroxizi sau carbonați de Na sau K) ar putea constitui o metodă directă de obținere a permanganților, mai simplă decît metoda semielectrolitică.

Dacă se polarizează anodic un electrod de Mn sau un aliaj Fe-Mn se obține în soluția alcalină de electroliză permanganat, se degajă O_2 la anod, iar suprafața sa se acoperă cu un film subțire de MnO_2, prin a cărui oxidare se mijlocește formarea permanganatului. Deși primele încercări datează încă de la începutul secolului [1—4], studii mai amănunțite au început în 1923 [4—12], fără ca totuși metoda să capete o aplicare industrială datorită în special pasivării anodului, care aducea scăderi ale randamentelor și întreruperi în mersul electrolizei.

În ultimul timp cercetările au fost reluate în special de Agladze și colaboratorii [12—24] în scopul de a transforma procesul anodic de dizolvare a aliajelor de mangan într-o metodă industrială de preparare a permanganaților alcalini.

În prezenta lucrare ne propunem a studia, în același scop, dizolvarea anodică a manganului și a aliajelor sale de fier și siliciu, efectuînd electroliza în curent ondulat, prin suprapunerea peste curentul continuu a unui curent alternativ. Presupunem că influența depolarizantă a curentului ondulat (alternativ asimetric) ar trebui să ducă la o coborîre a potențialului anodic, la o micșorare a pasivității suprafeței anodice și, în consecință, la o mărire a randamentului de curent și la o micșorare a consumului specific de energie.

Pentru a avea un mijloc de comparare a rezultatelor, am făcut în prealabil o serie de cercetări în curent continuu, folosind parametrii optimi indi-

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

cați de literatura recentă. S-au folosit atît la electroliza în curent continuu cît și ondulat aceleași aliaje de mangan drept anozi și s-a urmărit influența acelorași factori fizico-chimici.

Electroliza în curent continuu.

Formarea permanganaților prin dizolvarea anodică a manganului și aliajelor sale în mediu alcalin este un proces complex care depinde de condițiile în care decurge electroliza. Grube și Metzger [4] au arătat că manganul poate trece în soluție cu toate gradele de valență pe care le posedă prin variația diferiților parametrii folosiți; au determinat și potențialele corespunzătoare acestor trepte de valență și au trasat curbele de polarizare la diferite temperaturi. La temperaturi ridicate de 96°C și 80°C au loc trei faze de dizolvare corespunzînd potențialelor —1, IV, —0, 3V și +0, 6V; la prima treaptă de potențial manganul se dizolvă sub formă de Mn^{2+}, la a doua sub formă de Mn^{3+}, iar la a treia ca Mn^{6+} și Mn^{7+}. La temperatura de 56°C dizolvarea decurge numai prin două stadii de valență, iar la 20°C există numai o singură treaptă în genere corespunzătoare Mn^{6+}.

Factorii cei mai importanți care influențează randamentul de curent sînt: compoziția aliajului care formează anodul, densitatea de curent, concentrația electrolitului, temperatura și durata electrolizei.

Din cercetările făcute pînă în prezent a rezultat că sînt convenabile temperaturile joase în jurul a 20°C, aliajele Fe-Mn cu un procent de peste 70% Mn și concentrații mai mari în alcalii.

Am căutat să stabilim condițiile optime în funcție de densitatea de curent, de concentrația în alcalii, de durata electrolizei și de compoziția aliajului de mangan.

Am folosit în acest scop un dispozitiv obișnuit de electroliză în care cuva de electroliză conținea ca electrolit o soluție de K_2CO_3, drept catod o placă de fier, iar drept anod mangan, fero-mangan sau silico-mangan. Catodul a fost introdus într-o diafragmă de porțelan poros. Temperatura a fost menținută constantă la 20°C printr-o spirală prin care circulă apă rece.

Influența densității de curent. S-a variat densitatea de curent într-un interval larg cuprins între 8—18 A/dm². Între aceste limite ale densității de curent rezultatele obținute arată o creștere continuă a randamentului de curent indiferent de compoziția anodului. Concomitent se observă o scădere a energiei electrice consumate. În tabela 1 se dau randamentele de curent și consumurile specifice de energie electrică la diferite densități de curent și pentru diferite compoziții ale aliajelor de mangan. La densități de curent mari este favorizată dizolvarea manganului la o treaptă de valență superioară.

Densități de curent prea mari sînt supărătoare, deoarece pe de o parte încălzesc electrozii, iar pe de altă parte ajută la fărămițarea mecanică a acestora; de asemenea accelerează pasivarea anozilor.

Tabela 1

Temp. = 21°C			Durata = 6 ore			Electrolit: K_2CO_3 6 N					
	Feromangan 73,38% Mn		Feromangan 74,58% Mn		Feromangan 93,04%		Mangan 98,7%		Silicomangan 81,3% Mn	
D_c A/dm²	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg
8	23,9	40,1	24,1	44,3	30,5	32,5	31,3	31,1	24,2	35,4
10	27,3	39,6	27,5	40,5	33,7	28,7	32,1	29,5	26,3	33,8
12	27,8	38,5	27,8	38,7	33,9	26,8	33,6	28,1	29,8	31,7
14	28,9	36,5	33,4	35,6	35,5	26,5	33,9	28,0	35,2	27,0
16	35,4	24,5	35,6	30,8	39,8	21,7	34,7	27,1	36,4	25,5
18	35,4	26,0	36,4	27,4	40,5	20,5	34,1	27,3	37,1	24,9

Influența concentrației în alcalii. Deoarece acțiunea acestui parametru a fost mult studiată s-au făcut determinări numai la două concentrații (6 N și 4 N în K_2CO_3) cuprinse între limitele la care s-au obținut randamentele cele mai bune. Rezultatele sînt prezentate în tabela 2 și arată că soluțiile de concentrație 6 N sînt mai convenabile indiferent de compoziția anodului.

Tabela 2

Temp. = 21°C			Durata = 6 ore			D_c = 12 A/dm²					
	Feromangan 73,38% Mn		Feromangan 74,58% Mn		Feromangan 93,04%		Mangan 98,7%		Silicomangan 81,3% Mn	
Conc.	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg
6 N	27,8	38,5	27,8	38,7	33,9	26,8	33,6	28,1	29,8	31,7
4 N	22,8	39,0	23,1	43,5	31,8	29,5	27,4	32,5	29,1	32,1

Soluțiile alcaline diluate favorizează formarea stratului de oxid și se mărește tendința de pasivare a anodului; în același timp se mărește consumul specific de energie. La concentrații mari viscozitatea electrolitului crește și viteza de difuziune a ionului OH^- la anod este mult micșorată.

Durata electrolizei. S-a acordat acestui factor o atenție deosebită deoarece în majoritatea cazurilor procesele anodice sînt influențate de timp. În condițiile în care am lucrat se observă că după 6 ore de electroliză randamentul începe să scadă indiferent de compoziția aliajului de mangan; rezultatele sînt prezentate în tabela 3.

Două cauze pot influența în acest caz randamentul: pasivarea suprafeței anodului și scăderea concentrației în ioni K^+ în jurul anodului.

Din cercetările noastre rezultă că randamentul de curent cel mai ridicat în permanganat de potasiu (40,5%) se obține lucrînd cu o soluție 6 N în K_2CO_3, la 21°C, cu un electrod de feromangan cu un conținut de 93% Mn la densitatea de curent de 18 A/dm² și urmărind durata electrolizei.

Tabela 3

Temp. = 21°C			Electrolit: K_2CO_3 6 N				D_c = 18 A/dm²			
	Feromangan 73,38% Mn		Feromangan 74,58% Mn		Feromangan 93,04% Mn		Mangan 98,7%		Silicomangan 81,3% Mn	
Durata ore	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg
2	30,3	41,0	31,3	34,9	32,3	25,5	31,9	34,8	32,3	31,4
4	33,9	39,1	35,1	31,0	37,9	20,2	33,9	32,9	37,9	26,3
6	35,4	26,0	36,4	27,4	40,5	20,5	34,1	27,3	37,1	24,9
8	30,3	37,1	29,9	36,3	30,7	30,5	32,5	34,0	30,7	33,0

Rezultatele obținute de noi concordă și cu observațiile altor cercetători.

De observat că electrodul de mangan datorită extremei sale fragilități se dezagrega mecanic în timpul electrolizei, ceea ce influențează negativ și randamentul de curent.

Electroliza în curent ondulat

Una din cauzele care influențează negativ randamentul de curent este pasivarea în timp a anodului care se acoperă cu o peliculă de oxizi.

Pentru a preveni acest proces am încercat să folosim un curent ondulat (alternativ asimetric) suprapunînd peste curentul continuu care dirijează electroliza un curent alternativ; deoarece curentul ondulat joacă rolul unui depolarizant aplicat în mare exces, el poate produce o coborîre a supratensiunii anodice (deci o micșorare a energiei electrice consumate), precum și o diminuare a pasivității anodice. Pentru a nu produce tulburări și în procesele catodice, am utilizat un montaj în care curentul ondulat acționa numai asupra anodului; în acest caz s-a folosit un anod auxiliar de aceeași compoziție și aceleași dimensiuni cu anodul inițial. Cei 2 anozi sînt legați în paralel la polul pozitiv al sursei de curent continuu; între ei se aplică sursa de curent alternativ.

Se cunoaște că la electroliza în curent ondulat procesele de electrod depind de raportul intensităților I_a/I_c și nu de valoarea absolută a curentului alternativ.

Pentru a obține rezultate perfect comparabile s-au menținut condițiile de lucru utilizate la electroliza în curent continuu.

S-a urmărit randamentul de curent și consumul specific de energie electrică în funcție de raportul intensităților I_a/I_c, durata electrolizei, variația frecvenței curentului alternativ și compoziția aliajului de mangan.

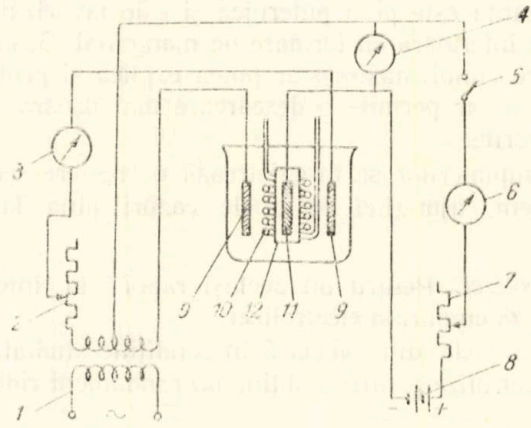


Fig. 1. *Dispozitiv de electroliză în curent alternativ suprapus.*

1 — Sursa de curent alternativ ; *2* — Reostate ; *3* — Ampermetru pentru înregistrarea curentului alternativ ; *4* — Voltmetru ; *5* — Întrerupător ; *6* — Ampermetru pentru înregistrarea curentului continuu ; *8* — Sursă de curent continuu ; *9* — Anozi ; *10* — Serpentină ; *11* — Catod ; *12* — Diafragmă.

Raportul intensităților. Indiferent de anodul folosit se constată existența unui maxim de eficacitate ; pentru condițiile de lucru folosite de noi acest maxim corespunde la raportul $I_a = 0{,}6\ I_c$. Rezultatele se pot urmări în tabela 4.

Tabela 4

Temp. = 21°C	Electrolit : K_2CO_3 6 N		Durata = 6 ore		Frecvența = 50 Hz			
	Feromangan 74,58% Mn		Feromangan 93,04% Mn		Mangan 98,7%		Silicomangan 81,3% Mn	
I_a/I_c	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg
2/10	33,2	35,0	41,9	21,6	39,9	21,7	42,6	22,0
4/10	39,9	29,0	45,0	20,1	40,3	21,5	43,0	21,8
6/10	43,9	26,5	48,3	18,7	44,7	19,7	43,4	21,6
8/10	29,5	39,3	38,8	23,3	41,4	20,8	38,7	24,2
10/10	25,5	46,4	37,5	24,1	39,1	22,1	31,2	30,1
12/10	24,5	47,5	30,3	29,7	37,3	23,2	28,7	32,7

Acțiunea favorabilă a curentului alternativ suprapus la densități mici ale curentului alternativ se poate atribui faptului că se menține în jurul anodului o alcalinitate ridicată ; la densități ridicate ale curentului alternativ acțiunea depolarizantă este prea puternică și este favorizată oxidarea la o treaptă de valență inferioară cu formare de manganat. Scăderea randamentului după atingerea unui maxim s-ar putea explica și prin micșorarea supratensiunii, ceea ce ar permite o descărcare mai ușoară a oxigenului la potențiale mai coborîte.

Conform presupunerilor se înregistrează o creștere sensibilă a randamentului de curent, ajungînd în unele cazuri pînă la o valoare de aproape 50%.

Durata electrolizei. Pentru un același raport al intensităților I_a/I_c randamentul variază cu durata electrolizei.

După cum se vede din tabela 5 în condițiile studiate de noi durata maximă a unei electrolize pentru a obține un randament ridicat este în jurul a 6 ore.

Tabela 5

Temp. = 21°C	Electrolit : K_2CO_3 6 N		Frecvența = 50 Hz $I_a/I_c = 6/10$					
	Feromangan 74,58% Mn		Feromangan 93,04% Mn		Mangan 98,7%		Silicomangan 81,3% Mn	
Durata ore	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg
2	39,1	29,5	46,1	19,9	43,2	20,7	40,3	23,0
4	42,9	26,8	48,2	18,7	44,1	20,2	43,0	21,6
6	43,9	26,5	48,3	18,7	44,7	19,7	43,4	21,5
8	38,8	29,9	44,3	20,3	42,6	20,9	39,1	23,7

S-ar putea interpreta și în acest caz că scăderea randamentului se datorește scăderii concentrației în timp a ionilor K^+.

Scăderile de randament sînt mai mici în timp decît la electroliza în curent continuu datorită desigur faptului că pasivarea care probabil nu a fost complet înlăturată, este mai slabă în curent ondulat.

Frecvența curentului alternativ. La electroliza în curent ondulat frecvența curentului alternativ constituie un factor important. Pentru a studia această influență s-a luat în considerare raportul optim al intensităților, adică $I_a = 0{,}6\, I_c$ și s-au păstrat constante celelalte condiții. În tabela 6 se dau rezultatele obținute variind frecvența între 10—100 Hz.

Tabela 6

Temp. = 21°C	Electrolit: K_2CO_3 6 N	Durata = 6 ore	$I_a/I_c = 6/10$

	Feromangan 74,58% Mn		Feromangan 93,04% Mn		Mangan 98,7%		Silicomangan 81,3% Mn	
Frecv. Hz.	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg	η_c %	W kWh/kg
10	26,4	43,9	32,2	39,4	19,8	47,0	25,4	39,4
30	28,2	43,2	38,5	33,3	29,7	29,8	27,6	36,7
50	43,9	26,5	48,3	18,7	44,7	19,7	43,4	21,6
80	39,2	29,6	45,6	20,9	38,6	28,6	33,5	30,0
100	31,1	40,0	39,5	21,5	32,8	34,5	31,2	32,5

Se observă că cele mai bune rezultate se obțin la frecvența de 50 Hz adică la frecvența obișnuită a curentului alternativ. Pentru frecvențele inferioare randamentele de curent sînt cu atît mai slabe cu cît frecvența este mai mică. Creșterea frecvenței peste 50 Hz apropie rezultatele de cele mai bune rezultate în curent continuu.

Paralel cu scăderea randamentului de curent consumul specific de energie crește.

Frecvența de 50 Hz este deci cea mai eficace; aceste rezultate concordă și cu observațiile făcute asupra altor substanțe la electroliza în curent ondulat. Este probabil că la această frecvență are loc depolarizarea optimă.

Tabela 7

Aliaj de mangan	Curent continuu 18A/dm²		Curent ondulat $I_a/I_c = 3/5$	
	η_c %	Consum specific de energie, kWh/kg	η_c %	Consum specific de energie, kWh/kg
Feromangan 73,38% Mn	35,4	26,9	—	—
Feromangan 74,58% Mn	36,4	27,4	43,9	26,5
Feromangan 93,04% Mn	40,5	20,5	48,3	18,7
Mangan 98,7% Mn	34,1	27,3	44,7	19,7
Silicomangan 81,3% Mn	37,1	24,9	43,4	21,6

Compoziția anodului. Influența compoziției anodului se manifestă în același mod în curent continuu și în curent ondulat. Rezultatele obținute sînt cuprinse în tabela 7 în care sînt prezentate rezultatele optime ale diferiților anozi lucrînd în condiții asemănătoare : concentrația în K_2CO_3 6 N, durata electrolizei 6 ore, temperatura 21°C.

Randamentele de curent cele mai ridicate se obțin atît în curent continuu, cît și în curent ondulat cu un anod de feromangan cu un conținut de 93,04% Mn. Se observă în curent ondulat o creștere a randamentului de curent de aproximativ 10% față de randamentul în curent continuu, în timp ce consumul specific de energie electrică scade sub 20 kWh/kg, ceea ce face ca metoda să poată căpăta importanță industrială.

Atribuim creșterea randamentului în curent ondulat depolarizării anodice, care împiedică o degajare prea puternică a oxigenului. Influența exercitată de curentul ondulat asupra stratului dublu electric rezultă din căderile de potențial înregistrate în urma trasării curbelor de polarizare.

Concluzii

1. Dizolvarea anodică a aliajelor de mangan în curent continuu poate duce la obținerea permanganatului de potasiu cu un randament de curent de 40% și un consum de energie de aproximativ 20kWh/kg.

2. În curent ondulat, la dizolvarea anodică se observă o creștere a randamentului de curent cu aproximativ 10% față de valoarea obținută în curent continuu ; paralel scade consumul specific de energie electrică.

3. În ambele cazuri compoziția anodului are un rol hotărîtor. Rezultatele cele mai bune se obțin cu anozi de feromangan cu un conținut ridicat în mangan ; manganul pur dă rezultate mai slabe.

4. Există un maxim de eficacitate al raportului intensităților I_a/I_c peste care randamentul tinde spre valorile obținute în curent continuu.

5. Rezultatele cele mai bune s-au obținut la frecvența de 50 Hz.

6. Condițiile optime pentru obținerea permanganatului de potasiu prin dizolvarea anodică a feromanganului în curent ondulat sînt următoarele :

Electrolit : K_2CO_3 6 N

Anod : Feromangan 93,04% Mn

Temperatura : 21°C

Densitatea curentului continuu : 18 A/dm²

$I_a/I_c = 3/5$

Frecvența curentului alternativ : 50 Hz.

Laboratorul de electrochimie
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Lorenz H.*, a Ch. 12, 393, 1896.
2. *Thompson K.*, Chem. Metallurg. Eng. 21, 68, 1919.
3. *Wilson R, Horsch. W.* Trans. Amer. Electrochem. Soc. 35, 371, 1919.
4. *Grube G. Metzger H.* Ztschr. f. Elektrochem. 29, 17, 1923.
5. *Grube G., Metzger H.* Ztschr. f. Elektrochem. 29, 100, 1923.
6. *Rapin G.* Bul. Soc. Chim. France, 1174, 1928.
7. *Roudnick J.* Bul. Soc. Chim. Belge, 38, 147, 1929.
8. *Rapin G.* Chim. Ind. 33, 810, 1935.
9. *Lukjanow P.* J. Priklad. Him. 12, 333, 1939.
10. *Lowy A.* Trans. Elektrochem. Soc. 80, 1941.
11. *Mene P. S.*, Khare D. C. J. Sci & Ind. Research India 4, 786, 1946.
12. *Agladze R. I., Domanskaia G. M.* J. Priklad. Him. 24, 8, 787, 1951.
13. *Agladze R. I., Domanskaia G. M.* J. Prikland. Him. 24, 9, 915, 1951.
14. *Agladze R. I., Berikașvili I. G.* Soobșci. Akad. Nauk Gruzin SSR, 14, 9, 533, 1953.
15. *Agladze R. I., Berikașvili I. G.* Soobșci. Akad. Nauk Gruzin SSR, 15, 6, 415, 1954.
16. *Gerhard L.* Ann. Univ. Saraviensis, 1, 37, 1955 ; Chim. & Ind. 76, 1081, 1956.
17. *Gerhard L., Besson J.* Ann. Univ. Saraviensis, 4, 25, 1955.
18. *Zarețki S. A., Zarnițki I. G., Bogdanova I. A.* Trudî Cetvert. Soveșci. Elektrochim. Moscova, 723, 1956 (Pub. 1959).
19. *Agladze R. I., Gdzelișvili M. Ia.* Elektrochim. Marganța, Akad. Nauk Gruzin SSR, 1, 139, 1957.
20. *Agladze R. I., Domanskaia G. M.* Soobșci. Akad. Nauk Gruzin SSR, 18, 695, 1957.
21. *Agladze R. I., Domanskaia G. M.* Soobșci. Akad. Nauk Gruzin SSR, 19, 3, 285, 1957.
22. *Agladze R. I., Domanskaia G. M.* Elektrochim. Marganța Akad. Nauk Gruzin SSR, 1, 503, 1957.
23. *Agladze R. I., Mudzhiri Ia. N., Topciahșvili L. I.* J. Priklad. Him. 34, 1786, 1961.
24. *Gdzelișvili M. Ia., Agladze R. I.* Trudî Inst. Priklad. Him. i Elektrohim. Akad. Nauk Gruzin SSR, 3, 13, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

C.Z. : 662.815. : 666.9 : 66.04

STUDIUL POSIBILITĂȚILOR DE REDUCERE A CONSUMULUI DE LIANT PENTRU OBȚINEREA COCSULUI BRICHETE *

I. BLUM, FR. BARCA, D. NICHITOVICI

Lucrarea studiază posibilitățile de reducere a consumului de liant pentru brichetarea măruntului de cocs. Ea urmărește totodată, obținerea unui cocs brichete prin tratament termochimic, cu un conținut mai mic de materii volatile și un consum mai mic de liant.

Cercetările s-au efectuat în condiții de laborator folosindu-se praf de cocs (obținut în condițiile clasice) și cocs de fluidizare din cărbuni de PAL. Temperatura de obținere a cocsului de fluidizare a fost de 900°C. Caracteristicile chimico-tehnice ale cocsurilor utilizate sînt prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Caracteristicile chimico-tehnice ale cocsurilor utilizate

Specificație	Analiza tehnică			
	Raportată la proba de analiză			Raportată la masa combustibilă
	Umiditate	Cenușă	Materii volatile	Materii volatile
	W^a	A^a	V^a	V^{mc}
	%	%	%	%
Cocs obținut în condiții clasice	1,35	12,85	1,85	1,93
Cocs de fluidizare	3,45	18,71	2,64	3,39

Granulația cocsului obținut în condiții clasice a fost de 0—3 mm (din care 74,40% sub 1 mm) iar granulația cocsului de fluidizare 0—5 mm (din care 31,50% 1—3 mm și 48,50% 0—1 mm).

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

Drept lianți, au fost folosite bitumurile petroliere neparafinoase și parafinoase ale căror caracteristici sînt prezentate în tabela 2.

Tabela 2

Caracteristicile lianților utilizați

Tipul liantului	Punct de înmuiere	Carbon liber	Conușă
	I.B.	C^l	A^a
	°C	%	%
Bitum industrial neparafinos	89,5	0,80	0,10
Bitum industrial parafinos	65,0	0,65	0,09

La baza încercărilor de reducere a consumului de liant pentru brichetarea cocsului mărunt au stat considerațiuni privind eficiența unei bune dispersări a liantului în masa cărbunoasă, a creerii unui film cît mai subțire de liant care să cuprindă particulele de cărbune. Deci problema reducerii consumului de liant s-a făcut pe baza unei mai bune dispersări a acestui material în masa cărbunoasă, prin utilizarea lui nu în stare topită sau măcinată cum se obișnuiește, ci sub formă de emulsie.

Lianții susmenționați au fost emulsionați cu ajutorul rezidiurilor și a uleiului greu obținut de la distilarea acizilor naftenici. Caracteristicile chimico-tehnice ale emlgatorilor utilizați sînt prezentate în tabela 3.

Tabela 3

Caracteristicile chimico-tehnice ale emulgatorilor utilizați

Substanța emulgatoare	Proveniența	Aspect	Umiditatea	Nesaponificabili STAS 29—49
			%	%
Rezidii naftenice	Rezidiu de blaz obținut la distilarea acizilor naftenici.	Solid, brun, negricios, cu fluorescență verzuie.	3,41	94
Ulei greu	Ulei greu obținut de la distilarea acizilor naftenici.	Lichid, vîscos, brun închis.	15,05	7,2

Aceste materiale sînt livrate de industrie complet neutralizate. Deoarece emulsionarea bitumurilor se poate face numai cu naftenați alcalini, este necesar să se adauge emulsiei hidroxid de sodiu pînă la realizarea pH-lui favorabil.

Pentru fabricarea emulsiei, într-un vas metalic, încălzit pe baie de apă, se introduce cantitatea de emulgator, se încălzește la 90—95°C și i se adaugă NaOH de 30°Be pînă la realizarea pH-lui favorabil. În amestecul încălzit se introduce 1/2 din cantitatea de bitum ce dorim a o emulsiona, măcinată la granulația 0—2 mm. Cînd bitumul s-a topit se adaugă apă încălzită la 80—90°C în cantități mici. Pe măsură ce înglobează apă masa devine mai fluidă și își schimbă culoarea de la negru la cafeniu. Cînd ajungem în acest stadiu se mai adaugă cîteva procente de apă și restul de bitum. Se continuă agitarea pînă la topirea și înglobarea completă a bitumului și formarea unei paste omogene. Se continuă adăugarea apei călduțe în cantități mici. Operația se consideră sfîrșită cînd emulsia are o culoare maron caracteristică și apa adăugată în cantitate mai mare se înglobează imediat. Apoi se diluează treptat emulsia pînă la volumul dorit.

Condițiile de obținere a emulsiilor de bitum folosind emulgatorii prezentați cu tabela 4 rezultă din tabela 5.

Tabela 5

Condițiile de obținere a emulsiilor de bitum

Tipul de bitum	Cantitatea de emulgator adăugată	pH optim	Cantitatea de hidroxid de sodiu adăugată	Concentrația bitumului în emulsia utilizată pentru brichetare
	% *		% **	%
Bitum industrial neparafinos tip D	14	11—12	1,03	10
Bitum industrial parafinos	16	11—12	0,85	10

* Raportat la cantitatea de bitum, % gravimetrice.
** Raportat la cantitatea de bitum.

Cu emulsiile de bitum astfel realizate s-au amestecat cocsurile, la rece, fără încălzire prealabilă. S-au confecționat brichete cu Ø 60 mm și 100 g greutate prin presare în matriță la presiunea de 250 kgf/cm², cu ajutorul unei prese hidraulice.

Brichetele obținute au fost uscate în etuvă. După uscare s-au efectuat încercări mecanice și determinarea conținutului de materii volatile.

Caracteristicile brichetelor crude rezultă din tabela 6.

Aceste brichete au fost supuse apoi unui tratament termo-chimic oxidativ în condițiile obișnuite citate în literatură. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Variația însușirilor brichetelor obținute din cocs fabricat în condiții clasice, după posttratamentul termochimic în funcție de condițiile de tratament

Tabela 6

Caracteristicile chimico-tehnice ale brichetelor crude, obținute folosind emulsii de bitum

Tipul de cocs	Liantul		Cenușă	Materii volat.	Rezistența la toba Nedelmann		
	Tip	Cantitate	A^{anh}	V^{mc}	10 mm	10—1 mm	1 m
		%	%	%	%	%	%
Mărunt de cocs obținut în cuptoare clasice	Bitum industrial neparafinos tip D	4	12,50	5,90	53	27	20
		5	12,32	6,85	59	24	17
		6	12,60	7,75	68	17	15
	Bitum industrial parafinos	4	12,55	6,07	48	35	19
		5	12,40	7,03	56	26	18
		6	12,28	7,95	63	21	16
Cocs de fluidizare	Bitum industrial neparafinos tip D	6	17,53	9,24	55	20	25
		7	17,36	10,15	62	19	19
		8	17,14	10,95	68	16	16
	Bitum industrial parafinos	6	17,60	9,40	50	30	20
		7	17,40	10,40	57	25	19
		8	17,20	11,40	65	21	14

și de natura și cantitatea liantului utilizat rezultă din fig. 1. În figura 2 sînt prezentate însușirile brichetelor fabricate din cocs de fluidizare după posttratamentul termochimic în funcție de aceiași parametrii.

Pentru a se vedea dacă rezistența mecanică ridicată a brichetelor oxidate se menține și după încălzire la temperaturi mari, aceste brichete s-au supus cocsificării la 1000°C și s-au repetat probele de rezistență.

Variația însușirilor brichetelor oxidate după cocsificare în funcție de condițiile de oxidare, natura și cantitatea liantului adăugat este prezentată în figurile 3 și 4.

Din cercetarea tabelelor și graficelor rezultă următoarele concluzii :

1. Folosirea bitumurilor petroliere parafinoase și neparafinoase în emulsie în apă aduce după sine o scădere a procentului de liant necesar pentru brichetarea atît a măruntului de cocs obținut în cuptoarele clasice cît și a măruntului de cocs de fluidizare. Astfel se pot obține brichete cu rezistență mecanică bună din măruntul de cocs obținut în cuptoarele clasice cu un consum de 4—6% liant, iar din cocsul de fluidizare cu 6—8% liant, ceea ce reduce cu cca. 30—50% cantitatea de liant folosită curent în astfel de operații.

2. Folosirea lianților în emulsie prezintă totodată și avantajul de a face posibilă amestecarea materialului cărbunos cu liantul rece, deci exclude încălzirea din procesul de malaxare.

3. Folosirea lianților în emulsie aduce după sine o reducere de 20—40% a procentului de materii volatile a cocsului obținut în urma tratamentului

termochimic oxidativ a brichetelor din mărunt de cocs (obținut în cuptoare clasice sau prin fluidizare) față de materialele similare rezultate din brichetarea cu lianți topiți sau măcinați.

4. Emulsionarea bitumurilor fie ele parafinoase sau neparafinoase nu necesită materialele sau condiții tehnologice deosebite.

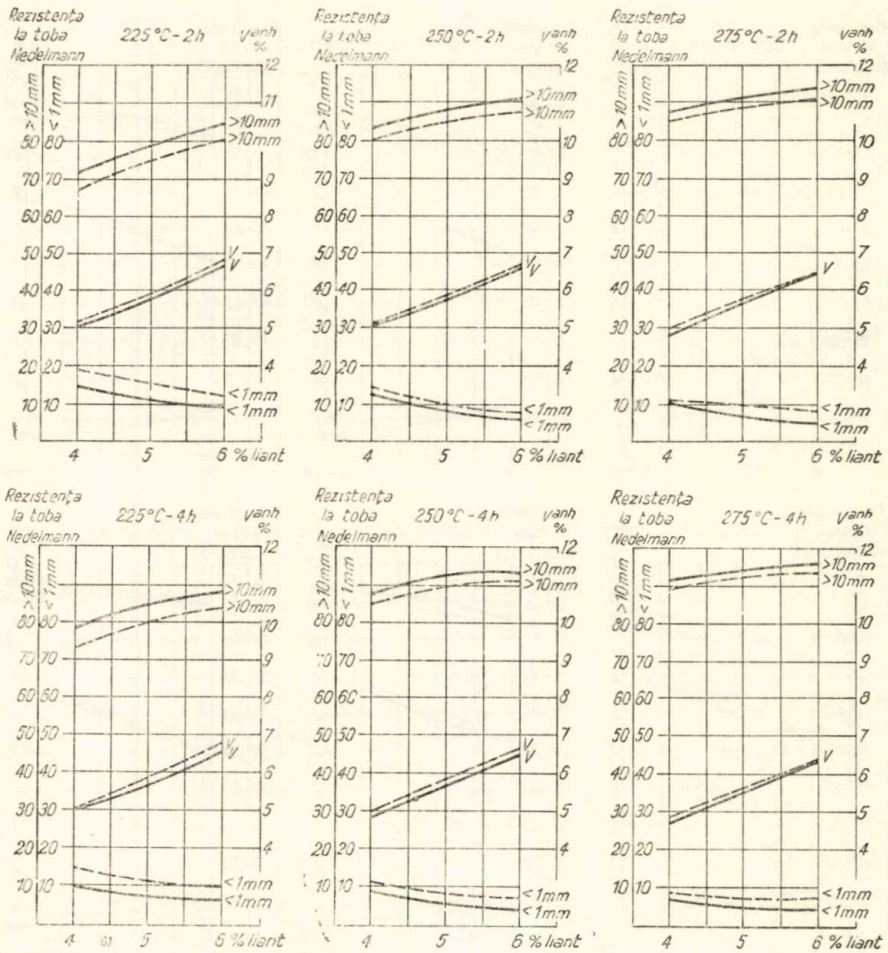


Fig. 1. Variația însușirilor brichetelor obținute din cocs fabricat în condiții clasice după posttratamentul termochimic în funcție de condițiile de tratament și de natura și cantitatea liantului utilizat.

5. Succebilitatea mai mare pentru posttratamentul termo-chimic oxidativ a bitumurilor parafinoase în raport cu cele neparafinoase se menține și în cazul brichetelor obținute cu liant emulsionat.

6. Creșterea procentului de liant în intervalul stabilit aduce o îmbunătățire a rezistenței mecanice a brichetelor. Brichetele oxidate din mărunt

de cocs obținut în cuptoarele clasice cu 5% liant iar cele din cocs cu fluidizare cu 7% liant satisfac condiții ridicate de exigență în ceea ce privește rezistența mecanică.

7. Condițiile de posttratament termo-chimic oxidativ și influența acestuia asupra calității brichetelor nu suferă modificări în raport cu cele utilizate curent, în cazul folosirii lianților emulsionați.

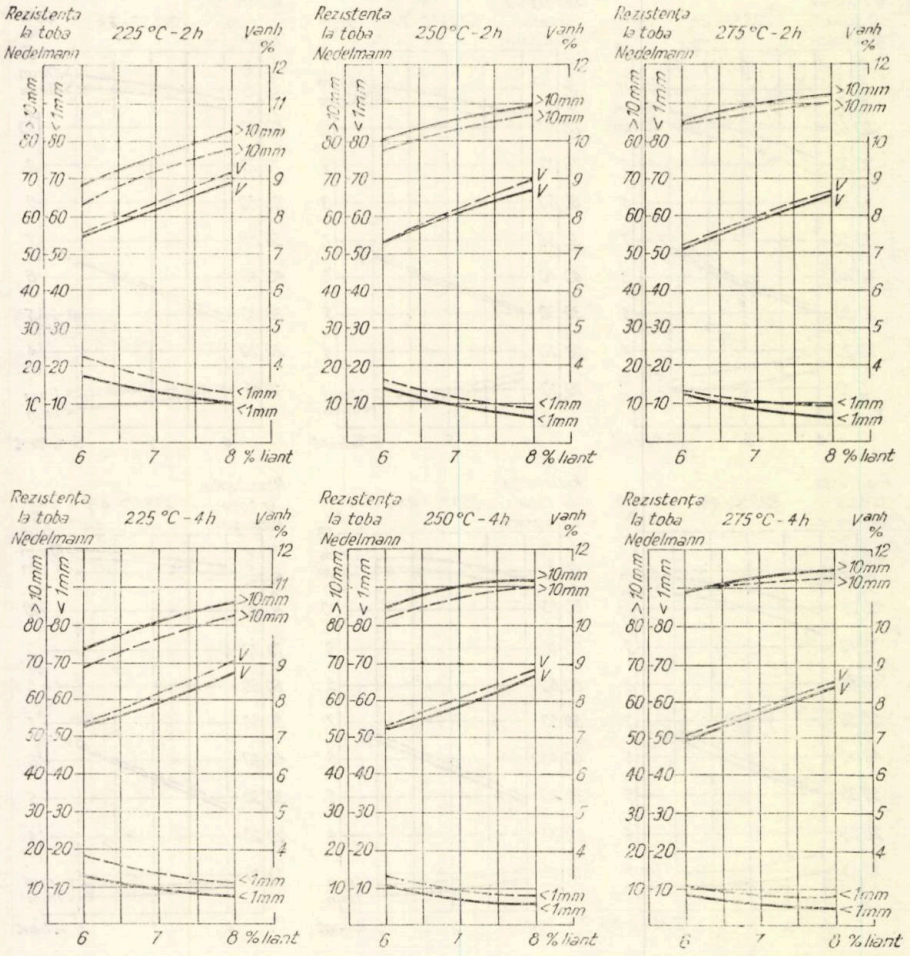


Fig. 2. Variația însușirilor brichetelor fabricate din cocs de fluidizare după posttratament termochimic în funcție de condițiile de tratament și de natura și contitatea liantului utilizat.

8. Cocsificarea brichetelor obținute în acest mod în scopul de a se urmări compartarea la temperaturi mari, duce la îmbunătățirea rezistenței mecanice a brichetelor.

Laboratorul de combustibili
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

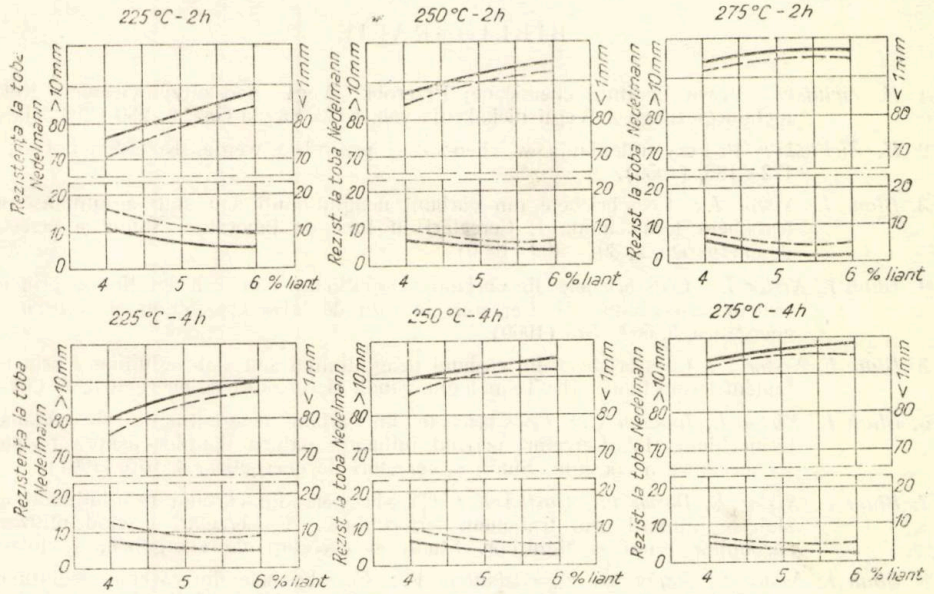


Fig. 3. Variația însușirilor brichetelor obținute din cocs fabricat în condiții clasice, tratate termochimic și apoi cocsificate, în funcție de condițiile de tratament, natura și cantitatea liantului adăugat

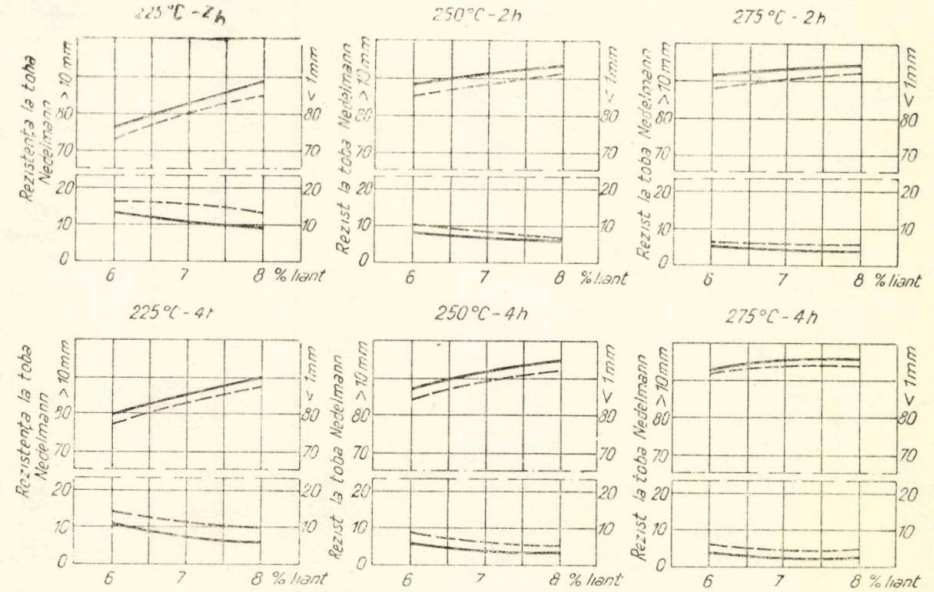


Fig. 4. Variația însușirilor brichetelor obținute din cocs de fluidizare, tratate termochimic și apoi cocsificate, în funcție de condițiile de tratament, natura și cantitatea liantului adăugat

BIBLIOGRAFIE

1. *H. Zielinski:* Prace Institutu chemicznej Przerobki Wegla nad otrzymywaniem Koksu metalurgicznego z Wegli niekoksujacyeh. Koks-Smola-Gaz, 6, 280—294, (1957).

2. *H. Zielinski:* Procesy utleniania w chemicznej przerobce wegla. Koks-Smola-Gaz, 4, 172—186, (1959).

3. *Blum I., Nistor I.:* Cocs-brichete din cărbuni neaglutinanți sau slab aglutinanți prin tratament termochimic I. Cercetări în fază de laborator. Studii și cercetări de energetică, 2, 397—409 (1960).

4. *Blum I., Nistor I.:* Cocs-brichete din cărbuni neaglutinanți sau slab aglutinanți prin tratament termochimic. II. Cercetări în fază de laborator. Studii și cercetări de energetică, 3, 563—575 (1960).

5. *Blum I., Nistor I.:* Cocs-brichete din cărbuni neaglutinuați sau slab aglutinanți prin tratament termochimic. III. Tehnologia, Studii și cercetări de energetică, 2, (1961).

6. *Blum I., Nistor I., Ionescu C.:* Cocs-brichete din cărbuni neaglutinanți prin tratament termochimic. IV. Cercetări privind influența naturii lianților asupra rezistenței mecanice a cocsului. Studii și cercetări de energetică, 4, 675 (1961).

7. *Blum I., Nistor I., Barca Fr., Costea R.:* Cocs-brichete din cărbuni neaglutinanți sau slab aglutinanți prin tratament termochimic. V. Cercetări privind utilizarea cărbunilor bruni și lignitilor. Studii și cercetări de energetică, 1, (1962).

8. *Blum I., Nistor I., Ștefănescu F., Tăzlănanu V.:* Cocs-brichete din cărbuni neglutinanți sau slab aglutinanți prin tratament termochimic. VI. Variația rezistenței mecanice, în funcție de procentul de liant, durata și temperatura tratamentului termochimic. Studii și cercetări de energetică 2, (1962).

9. *Nistor I., Ștefănescu F.:* Progrese în tehnologia fabricării cocsului brichete prin tratament termochimic. Studii și cercetări de energetică, 1, 149 — 157 (1963).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

C. Z. : 661.183.123.2 : 661.856.712.8 : 628.54 : 661.53 : 546.56.

RECUPERAREA CUPRULUI DIN APELE REZIDUALE REZULTATE DE LA PURIFICAREA GAZULUI PENTRU SINTEZA AMONIACULUI CU AJUTORUL CATIONIȚILOR ANORGANICI *

T. D. IONESCU, G. TUDORACHE

Eliminarea urmelor de oxid de carbon, din gazul utilizat pentru sinteza amoniacului la presiuni medii, se realizează cu ajutorul leșiilor amoniacale ale sărurilor cuproase, care formează cu oxidul de carbon combinații complexe. De la secția de purificare, rezultă ape reziduale, care au un conținut în cupru de 1—2 g/l. Debitul acestor ape, fiind de 10—15 m³/h la fabricile cu o producție medie de amoniac, rezultă pierderi de cantități foarte mari de cupru.

Din aceste ape cuprul poate fi recuperat, cu ajutorul cationitului gel silicios în forma hidrogen, obținut din zguri metalurgice. Cationitul respectiv are o capacitate mare de schimb ionic, în soluții cu un pH $>$ 7. În aceste ape reziduale, cuprul se găsește sub formă de cationi amino-cuprici, care se reține pe cationitul anorganic, conform următoarei reacții de schimb cationic :

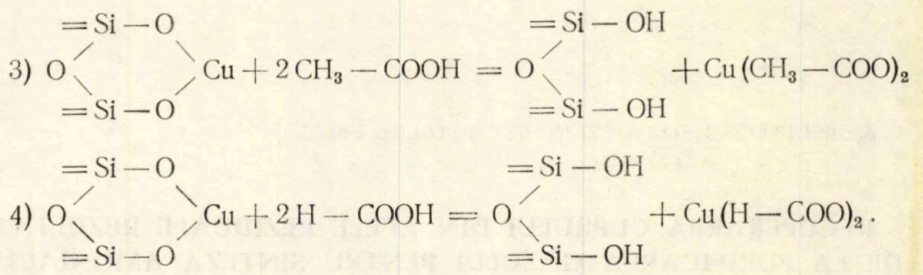
$$1)\quad \begin{matrix} =Si-OH \\ O \\ =Si-OH \end{matrix} + [Cu(NH_3)_4]^{2+} = \begin{matrix} Si-O \\ O \\ Si-O \end{matrix} [Cu(NH_3)_4] + 2\,H^+$$

În prezența apei, are loc reacția de descompunere a cationului amino-cupric, reținut pe gelul silicios conform ecuației :

$$2)\quad \begin{matrix} =Si-O \\ O \\ =Si-O \end{matrix} [Cu(NH_3)_4] + 4\,H_2O = \begin{matrix} =Si-O \\ O \\ =Si-O \end{matrix} Cu + 4\,NH_4OH$$

* Manuscris primit la redacție la 20 mai 1966.

Se realizează astfel saturarea gelului silicios cu cationi Cu^{2+}. Eluarea cuprului reținut, se poate face cu ajutorul soluțiilor de acid acetic, sau acid formic, cu concentrația de 3—5 M, conform reacțiilor :



Partea experimentală.

S-au folosit două tipuri de cationiți silicioși anorganici, deosebindu-se după modul de preparare. Cationitul A, s-a preparat astfel : s-a tratat zgura metalurgică cu soluție de HCl 10%, în raportul 20/1 (cm^3/g) timp de 30 minute. Extractul obținut, s-a concentrat pînă la gelifiere. Gelul s-a lăsat 6 zile pentru maturare, apoi s-a spălat cu apă distilată pînă la neutru și s-a uscat ridicînd treptat temperatura cu cîte 20° din două în două ore, pînă la 120°C. Cationitul B, s-a preparat în mod asemănător cu cationitul A, cu singura deosebire că pentru extracție s-a folosit soluție de H_2SO_4 15%. Din fiecare cationit au fost luate cîte 20 g și introduse în coloane de sticlă, cu înălțimea de 50 cm și cu diametrul de 2,5 cm. Prin coloanele astfel pregătite, s-a trecut apă reziduală, provenită de la secția de purificare a gazului pentru sinteza amoniacului, avînd copoziția :

Cu^+ = 0,2540 g/l
Cu^{2+} = 0,8586 g/l
Cu_{total} = 1,1126 g/l
NH_3 = 2.0456 g/l
pH = 9,75

Efluenții au fost prinși în fracțiuni de cîte 200 cm^3. În fiecare fracțiune s-a determinat : Cu^+, Cu^{2+}, NH_3 și pH-ul.

Debitul de curgere prin coloană a fost de 5 cm^3/minut.

Comportarea cationiților anaorganici folosiți reiese din tabela 1 și 2.

Din tabele se constată, că atît cuprul monovalent, cît și cuprul bivalent se reține total din apa reziduală, în cazul cationitului A, pînă la fracțiunea 7, iar în cazul cationitului B, pînă la fracțiunea 9. După aceea, conținutul de Cu^+ și Cu^{2+}, al fracțiunilor de efluent colectate începe să crească, gradul de reținere scade treptat, ajungînd la fracțiunea 18 la 38,46%, în cazul cationitului A, iar în cazul cationitului B la 56,65%. Cationitul B, are o capacitate de reținere puțin mai mare decît cationitul A, probabil datorită faptului

Tabela 1

Adsorbția prin schimb ionic, a cationilor amino-cuprici pe cationitul silicios A în forma hidrogen.

Nr. fracțiunii	Cu^+ g/l	Cu^{2+} g/l	NH^3 g/l	pH-ul	Cu^+ reținut g	Cu^{2+} reținut g	Cu_{total} reținut g	Gradul de reținere a cuprului %
1	0	0	0,272	8,36	0,050	0,171	0,221	100
2	0	0	0,748	8,95	0,050	0,171	0,221	100
3	0	0	0,980	9,32	0,050	0,171	0,221	100
4	0	0	1,271	9,38	0,050	0,171	0,221	100
5	0	0	1,292	9,40	0,050	0,171	0,221	100
6	0	0	1,325	9,42	0,050	0,171	0,221	100
7	0	0	1,378	9,44	0,050	0,171	0,221	100
8	0,027	0	1,408	9,46	0,045	0,171	0,216	97
9	0,038	0	1,530	9,49	0,043	0,171	0,214	96
10	0,058	0,050	1,548	9,50	0,039	0,160	0,199	90
11	0,063	0,127	1,559	9,52	0,038	0,145	0,183	82,85
12	0,072	0,203	1,564	9,54	0,036	0,139	0,175	79,18
13	0,075	0,254	1,632	9,56	0,0358	0,120	0,1558	70,13
14	0,076	0,356	1,681	9,58	0,0356	0,0997	0,1353	61,08
15	0,178	0,432	1,703	9,63	0,0352	0,084	0,1192	53,93
16	0,193	0,445	1,742	9,64	0,012	0,081	0,093	42,08
17	0,20,5	0,470	1,768	9,66	0,009	0,077	0,086	38,91
18	0,214	0,470	1,785	9,68	0,008	0,077	0,085	38,46

că are o porozitare mai mare și un conținut în Fe_2O_3 mai scăzut. După saturarea cationiților s-a făcut eluarea cuprului reținut, cu soluții de acid acetic și acid formic 5M. Fracțiunile colectate la eluare, au fost de cîte 50 ml și în fiecare fracțiune s-a determinat : Cu^+, Cu^{2+} și pH-ul.

Prin eluarea cuprului se realizează și regenerarea cationiților conform reacțiilor (3) și (4). Efuenții rezultați la regenerare, conțin cuprul sub formă de acetat, respectiv formiat de cupru. Primele fracțiuni, care au o concentrație de aproximativ 10—30 g/l, pot fi adăugate la leșiile cuproamoniacale inițiale folosite la purificarea gazului pentru sinteza amoniacului Fracțiunile cu un conținut mai scăzut, în acetat sau formiat de cupru, se pot adăuga la soluțiile de acid acetic sau acid formic, folosite pentru regenerarea cationiților.

Tabela 2

Adsorbția prin schimb ionic a cationilor amino-cuprici pe cationitul silicios B în forma hidrogen.

Nr. fracțiunii	Cu + g/l	Cu^{2+} g/l	NH^3 g/l	pH-ul	Cu + reținut g	Cu^{2+} reținut g	Cu_{total} reținut g	Gradul de reținere %
1	0	0	0,270	7,68	0,050	0,171	0,221	100
2	0	0	0,612	8,38	0,050	0,171	0,221	100
3	0	0	0,946	9,22	0,050	0,171	0,221	100
4	0	0	1,272	9,38	0,050	0,171	0,221	100
5	0	0	1,324	9,41	0,050	0,171	0,221	100
6	0	0	1,360	9,43	0,050	0,171	0,221	100
7	0	0	1,375	9,45	0,050	0,171	0,221	100
8	0	0	1,405	9,46	0,050	0,171	0,221	100
9	0	0	1,482	9,48	0,050	0,171	0,221	100
10	0,0152	0	1,506	9,49	0,047	0,171	0,218	98,63
11	0,0154	0	1,574	9,53	0,047	0,171	0,218	98,63
12	0,050	0,025	1,564	9,54	0,040	0,166	0,206	97,73
13	0,063	0,029	1,593	9,55	0,037	0,165	0,202	95,97
14	0,068	0,156	1,623	9,58	0,036	0,139	0,175	79,63
15	0,083	0,203	1,684	9,60	0,034	0,131	0,165	74,98
16	0,092	0,216	1,702	9,61	0,031	0,127	0,158	71,49
17	0,156	0,228	1,752	9,62	0,019	0,125	0,144	65,16
18	0,198	0,279	1,784	9,64	0,010	0,115	0,125	56,65

Rezultatele obținute la eluare sînt trecute în tabelele 3 și 4.

Tabela 3

Eluarea cuprului cu soluții de CH_3-COOH-5M.

Nr. fracțiunii	Cationitul A			Cationitul B		
	Cu +g/l	Cu^{2+}g/l	pH	Cu +g/l	Cu^{2+}g/l	pH
1	0	17,490	5,18	0	18,210	5,79
2	0	10,493	3,62	0	17,100	3,86
3	0	10,365	2,94	0	12,458	3,40
4	0	8,900	2,80	0	8,014	2,82
5	0	8,868	2,71	0	7,222	2,71
6	0	3,180	2,62	0	4,883	2,58
7	0	2,051	2,58	0	2,791	2,36
8	0	1,320	2,49	0	1125	2,14

Tabela 4

Eluarea cuprului cu soluții de H-COOH 5M.

Nr. fracțiunii	Cationitul A			Cationitul B		
	Cu +g/l	Cu^{2}+g/l	pH	Cu +g/l	Cu^{2}+g/l	pH
1	0	20,256	4,80	0	34,18	3,90
2	0	28,461	2,72	0	22,092	2,61
3	0	11,925	2,02	0	8,427	2,00
4	0	4,929	1,60	0	3,688	1,60
5	0	0,853	1,41	0	3,2118	1,44
6	0	0,247	1,24	0	1,257	1,22

Pentru comparația comportării cationitului silicios ca, schimbător cationic pentru cupru s-a lucrat, în aceleași condiții, cu patru tipuri de rășini cationice, dintre care două au fost de proveniență indigenă și două din import.

Rezultatele sînt trecute în tabela centralizatoare 5.

Tabela 5

Tipul cationitului	Cantitatea totală de cupru reținut g/20 g cationit.	Cu eluat cu soluție de CH_3-COOH 5 M. g	Cu eluat cu soluție de H-COOH 5 M. g	Cantitatea de soluție CH^3-COOH 5 M necesară l	Cantitatea de soluție de H-COOH 5 M necesară l
Vionit CS_1	3,14	2,86	3,00	0,81	0,45
Vionit CS_2	2,82	2,56	2,79	0,93	0,48
Castel C_{300}	2,94	2,78	2,83	0,95	0,56
Castel C_{100}	3,19	2,97	3,01	1,12	0,64
Cationit A	3,28	3,22	3,25	0,4	0,3
Cationit B	3,65	3,60	3,62	0,4	0,3

Din datele obținute se constată că gelurile silicioase, obținute din zguri metalurgice, se comportă mai favorabil în comparație cu rășinile cationice cercetare. Cationiții anorganici prezintă superioritate față de rășinile sintetice, atît în ceea ce privește capacitatea de reținere a cuprului din apele reziduale, cît și față de eluarea cuprului, cu ajutorul soluțiilor de CH_3-COOH 5 M, respectiv H-COOM 5 M.

Cuprul de pe cationiții anorganici se eluează total, fiind necesare cantități mult mai mici de agent de eluare, decît în cazul rășinilor sintetice.

Concluzii.

1. Cu ajutorul cationiților anorganici (geluri silicioase obținute din zguri metalurgice) se poate recupera total cuprul din apele reziduale, provenite de la purificarea gazului pentru sinteza amoniacului, sub formă de acetat sau formiat de cupru.

2. În cazul cationiților silicoși decurge, în condiții foarte bune atît reținerea cationilor complecși amino-cuprici, cît și eluarea cuprului, provenit prin descompunerea acestor cationi.

3. În cazul rășinilor sintetice, sînt necesare cantități mult mai mari de agent de eluare, iar efluenții rezultați au o concentrație mult mai scăzută în acetat sau formiat de cupru.

4. Procedeul de recuperare a cuprului din apele reziduale provenite de la purificarea gazului pentru sinteza amoniacului, cu ajutorul cationiților anorganici, este foarte economic datorită prețului de cost foarte redus al acestor cationiți, obținuți din zguri metalurgice deșeuri industriale aproape fără valoare.

Laboratorul de tehnologie chimică generală
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

FIZICĂ

C.Z. : 539.16 : 532 : 531.7 : 621.38 : 539.155.2

A NEW IMPROVED RADIOACTIVE VISCOSIMETER *)

H. N. FUIA, I. I. PONNER

1. *Introduction*

The use of classical methods of viscosimetry in order to determine different liquids viscosity (for instance : of smelted glass, smelted slag, paints and pastes, liquid plastics etc.), in special conditions of temperature and bad accessibility in most cases is difficult.

In such cases the radioactive viscosimetry methods are prefered, due to their multiple advantages.

The sinking rate in silicone oil of a 8 mm diameter steel ball, including a Co^{60} radioactive source, was determined with an accuracy of $\approx 1\%$, in a previous work [1]. The determinations were carried out using a single detector.

The viscosity coefficient of this liquid can be determined on the basis of Stocke's law, knowing the ball sinking rate in the liquid under investigation.

The necessity of a graphic differenciation of the integral curve $R\ (t)$, that represents the integral number of pulses as a time function of the ball sinking in the liquind under investigation — as it was imposed in the former work [1] — renders difficult the use of such measurements on an industrial scale. This occurs beacuse the $R\ (t)$ curve graphical differentiation asks much time and effort.

2. *The principle of the method*

In order to avoid the $R\ (t)$ curve graphic derivation difficulties it was imposed to consider a direct modality of obtaining the set of $r\ (t)$ counting rate values.

The attempts to obtain the $r\ (t)$ function with an usual integrator did not give satisfactory results.

The $r\ (t)$ couting rate can be obtained using an electronic scaler with a periodic-intermitent run, realized with an astable multivibrator, whose output pulse was applied on the grid of the first tube T_1 of the scaler (fig. 1).

---

* Presented at Scientific Session of the Polytechnical Institute „Gheorge Gheorghiu-Dej" Bucharest, 28—30 May 1965.

In the time intervals when the multivibrator pulses are at their minimum value, the run of the scaler was not disturbed and the signals given by the detector were registered. On the contrary, during the time intervals when the multivibrator pulses have their maximum value, the detector ne-

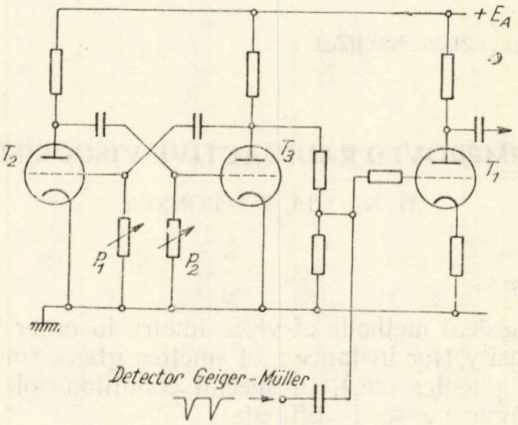


Fig. 1. Astable multivibrator for obtain a periodic-i ntermitent run of the counter.

gative pulses are no more counted, due to the strong positive polarity of the grid of the first tube of the scaler. The time intervals between scaler run and scaler rest can be varied with the pontentiometers P_1 and P_2 in function of investigated liquid viscosity.

Before the beginning of the measurements it is necessary to calibrate the device. This is realized by static measurements of the couting rate r as a function of the ball sinking depth x.

For any moment of ball sinking process the following relation can be written :

$$r(t) = r(x) \tag{1}$$

On the basis of relation (1) we can deduce, from diagram of functions $r\ (t)$ and $r\ (x)$ the value x corresponding to any value of t.

Choosing a series of consecutive points t_j on the abscissa of the curve $r=r\ (t)$, the corresponding values x_j may be read on the curve $r=r\ (x)$.

For any pair of the values $(t_j\ ,\ t_{j+1})$ the value of ball sinking rate v_j is obtained from :

$$v_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots . n) \tag{2}$$

In order to eliminate the portions the ball sinking rate either did not reach a stationary value or does not keep it because of a too short distance from the vessel bottom, the points t_j must be chosen far enough from the $r\ (t)$ curve extremities.

The average ball sinking rate may be computed after carrying out a series measurements :

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v_j \tag{3}$$

The standard deviation σ_v results from the expression :

$$\sigma_v = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (v_j - \bar{v})^2 \right]^{1/2} \tag{4}$$

where all the values v_j must be statistically independent. This means that the number n cannot be greater than the number of individual readings r (t) diminished by 1.

3. *The experimental upset*

The upset of experimental arrangement can be seen in fig. 2.

The Co^{60} radioactive source (a cylinder of 1 mm diameter and 1 mm height), produced by IFA (Institute of Atomic Physics Bucharest) was introduced in a 8 mm diameter unhardened ball of bearing.

Provided with a bore of 3 mm diameter and 5 mm lenght.

During measurements the control of correct running of the electronic device is imporsed. In order to realize the control, the Co^{60} source is put into identical conditions to those of statistic measurements, so that the counting rate becomes :

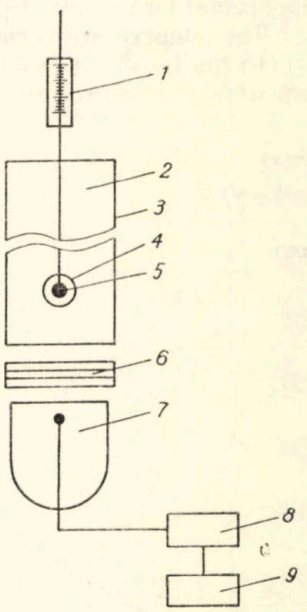


Fig. 2. Experimental setup.

1. Graduated rule for depth measurement.
2. Liquid under investigation.
3. Vessel.
4. Metallic ball.
5 Co^{60} radioactive source.
6. Lead absorbent for variation of counting rate.
7. Geiger-Müller detector.
8. Scaler.
9. Astable multivibrator.

a) $r \approx$ 27 pulses/sec (a series of 20 countings).

b) $r \approx 374$ pulses/sec (a series of 20 countings).

For each series of measurement the distribution of individual values was compared with the Poisson's distribution, applying the Pearson's test. The dates given in table I show a good acceptability.

To obtain several control measurements of the ball sinking rate, a glass cylinder of 3 cm. diameter and 20 cm height was used. This cylinder being provided with two circular marks at a distance of (3.61 ± 0.01) cm.

Table 1

The control of the correct run of the electronic device.

Number of the series	Nomber of the individual determinations	Average number of the pulses per minute	Number of the freedom degree	x_j^2	P_x^2
1	20	1601	5	4,57	48%
2	20	22.417	4	1.17	86%

4. *The experimental data*

The measurements were carried out at a temperature of 25°C, without any special termostating precautions.

The temperature variations did not exceed 0,5°C.

In the fig. 3 a is shown a static curve $r\ (x)$. For each point the measurement time was of 2 min. The fig. 3 b shows the dynamic curve of counting

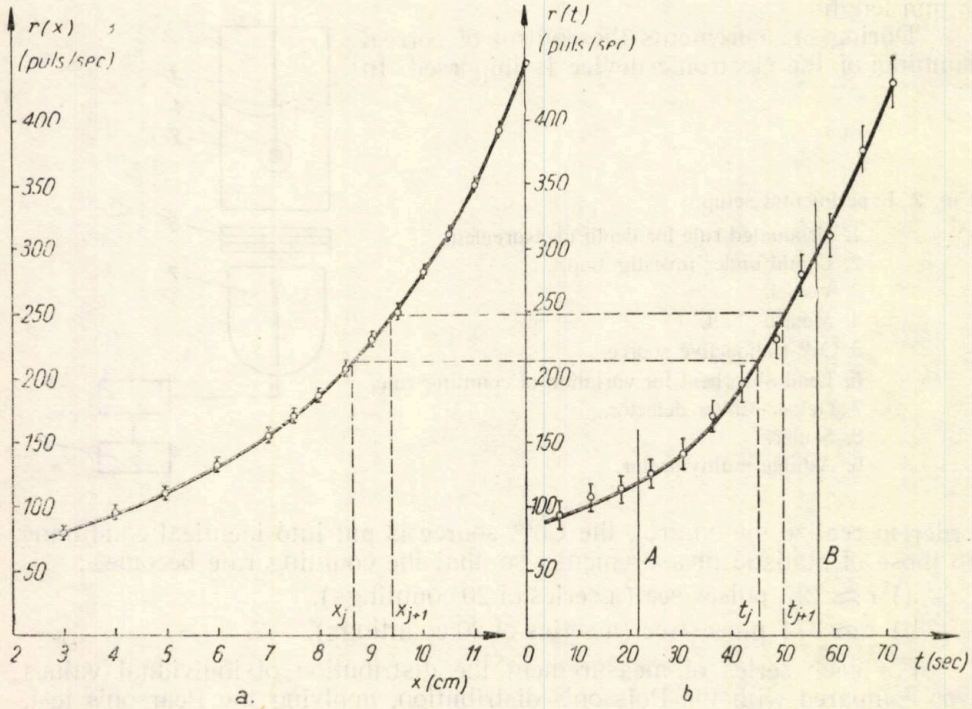


Fig. 3. a) Static curve of counting rate $r\ (x)$. b) Dynamic curve of counting rate $r\ (t)$.

rate r (t) for one of the 3 series of measurements carried out (the series I of the table 2). For reasons shown in the point 2, in order to deduce the values of ball sinking individual rates only a portion of the curve r (t) comprised between upstanding linies A and B was considered (fig. 3b). The dotted lines in the fig. 3 show the way for determining x_j and x_{j+1}.

Table 2

The experimental results for the silicome oil OE 4018/100000

Experience	Number of the values v_j	v cm/s.
1	6	0.13970 ± 0.00580
2	11	0.13820 ± 0.00336
3	9	0.15470 ± 0.00678
The weigted mean		$v = 0.14420 \pm 0.00267$

In table 2 are presented the experimentally obtained numerical data. The time of the scaler run is of 1 sec and that of the rest of 5 sec. It results, from table 2, that the accuracy of a single experiment comprising the data between 6 and 11 individual determinations is fo 2 to 4%. In the case the experiment is only 3 times repeated, the accuracy is under 2%. The ball sinking rate, obtained in 3 series of carried out measurements, is $v = (0.1442 \pm 0.0028)$ cm/s. In standard errors the temperature variations, is included too. The ball sinking time, between the two marks on the vessel wall, was determined visually as a control measurement. Being given the time of ball sinking of $(25.\pm0.1)''$, it vas obtained $v = (0.1406 \pm 0.0009)$ cm/s. wich is in a full agreement with the data of the table 2.

By determining the ball sinking rate in a liquid with a known viscosity, the radioactive viscosimeter constant can be calculated from the relation:

$$k = \eta V \tag{5}$$

In present work it was used a silicone oil (OE 4018/100 000) produced at Chemiewerke Nünchritz, whose viscosity η and temperature coefficient of viscosity $(\Delta\eta)$ were determined by Solomon [9]. Knowing the values of $\eta_{20°C} = (1240 + 2.48)\ P$ and $\Delta\eta = 25 \cdot 24\ P$ given in [9] we obtained:

$$K = \eta_{25°C}\ \bar{v}_{25°C} = (160 \cdot 6 \pm 3 \cdot 2)\ \text{Pcm/s}.$$

Knowing the radioactive viscosimeter constant, we can determine the unknown viscosity of different liquids. Thus, in determining a second silicone oil viscosity using the constant K of our device, we obtained the value $\eta_{21°C} = (163 \cdot 2 \pm 3 \cdot 3)\ P$ which value is in good concordance with $\eta_{24°C} = 163 \cdot 92\ P$ that was determined with great precision in [9].

5. *Conclusions*

Compared with the radioactive methods treated in literature [2—8], the method presents several advantages:

1. The accuracy of viscosity coefficient determination is increased ($<2\%$).
2. Simplified geometry of vessel-detector.
3. Very simple electronic device.
4. The operations can be carried using a greatly reduced activity source, which does not require special shielding.
5. The possibility of obtaining several individual values for an unic ball sinking (and thus of an increased accuracy).
6. The possibility to change the detector-vessel geometry depending on the practical necessities, in such a way that if in a certain industrial plant, by the handling of the respective liquid it is impossible to place the counter under the bottom of the vessel containing the investigated liquid, the counter could placed in any other position.

Physics Chair, Applied Electronics Chair
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

Acknowledgements:

The authors express their heartfull thanks to Mr. Ion Mitrache, physicien engineer, for the assitance acorded in carrying out the measurements.

REFERENCES

1. *Ausländer J. S., Fuia H. N.* The International Journal of applied radiation and isotopes, vol. 16, pp. 667—668 (1965).
2. *Arditti R.* Proceedings of the Conference on Isotope Techniques, vol. 2, pp. 11 (1951).
3. *Gueron I. J.* Nucleonics *9*, 53 November (1951).
4. *Rogers A. J., Weyl J.W., Hood W. L.* Nicleonics *12*, 62 Iune (1954).
5. *Hori et al.* Proceedines of the Third Japan Conference on Radioisotopes, Tokyo, pp. 160, 163 (1959).
6. *Diacenco P. E.* Premenenie radioactivnih izotopov v tehnike, pp. 183, Moskva (1958).
7. *Popescu A.* și *Carabogdan I.* Studii și Cercetări de Energ. *9*, 623 (1959).
8. *Popescu A.* și *Carabogdan I.* Rev. electr. energ. (Academ. R.S.R.) *5*, 451 (1961).
9. *Solomon M.* Lucrare de dizertație. Universitatea București 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

MECANICĂ

C.Z. : 629.19 : 621.825 : 621—9

ОПТИМАЛЬНЫЙ МАНЕВР СТЫКОВКИ ДВУХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗАПАСОМ ТОПЛИВА, ЛЕТАЮЩИХ ПО КРУГОВЫМ ОРБИТАМ

К. ГУЦЭ, АЛ. МАРИНЕСКУ

Введение

Вопрос о встречи двух космических аппаратов по круговым орбитам представляет в настоящее время большой интерес, поскольку для межпланетных полетов вообще, и для полета к Луне в особенности играет решающий роль.

Большой практический интерес представляет оптимизация маневров встречи и, таким образом, оптимизация маневра встречи с точки зрения минимального расхода топлива перейдет к первому месту.

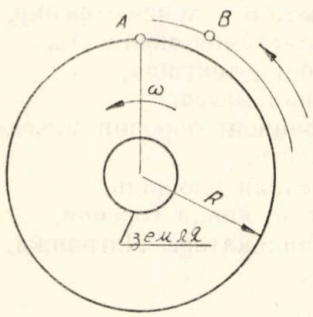


Рис. 1

Этим видом оптимального маневра, занимается настоящая работа со следующими предположениями :

— Цель A (фиг. 1) не имеет двигательную систему и движется вокруг земли на круговой орбите, радиусом R, имеющий угловая скорость постоянна ω.

— Перехватчик B, имеет двигательная система малой мощности и движется по орбите, ближающей к цели A, расстояние между ними в начале маневра встречи булучи очень малой по сравнению с R.

Manuscris predat la redacție la 17 aprilie 1966.

— Пренебрегаем влиянием гравитационных полей других планет, считая, что цель и перехватчик движется в ньютоновском поле. Коэффициент сопротивления предполагается приблизительно постоянным а плотность окружающей среды также считается постоянной во время маневра встречи.

Обозначения :

$Axyz$ — ось координат, связанный с целью,
d — расстояние между перехватчиком и целью,
R — радиус круговой орбиты,
$\overline{V}$ — скорость перехватчика,
V_x, V_y, V_z — составляющие скорости перехватчика относительно орбитальной системы,
V — $\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}$
C — эффективная скорость истечения,
$\overline{a}$ — ускорение силы тяги,
a_x, a_z, a_y — составляющие ускорения силы тяги относительно системы $Axzy$,
ω — угловая скорость цели,
T — сила тяги перехватчика,
M — масса перехватчика,
M_0, M_f — масса перехватчика в начале горения горючего, соответственно в конце горения,
N_d — располагаемая мощность,
N — мощность, текущая,
k — удельная масса,
C_x — коэффициент аэродинамического сопротивления,
ϱ — плотность,
S — поперечная площадь,
t — время до конца горения,
λ_i — мультипликаторы Лагранжа,
K — $C_x \frac{\varrho S}{2M}$,
M_p — масса горючего и окислителы.

3. Оптимальный маневр пренебрегая влиянием аэродинамического сопротивления

Будем определять ускорение силы тяги перехватчика или тягу на единицу массы через вектор :

$$\overline{a}(t) = \frac{\overline{T}}{M} = \frac{\frac{dM}{dt}\overline{C}}{M} \tag{1}$$

$\bar{C}$ — будучи вектор эффективной скорости истечения.

Обозначая мощность в определенном моменте времени через :

$$N(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{dM}{dt}\right) C^2 \tag{2}$$

и исключая C между (1) и (2) получим :

$$\frac{a^2}{2M} = -\frac{\dfrac{dM}{dt}}{M^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\right) \tag{3}$$

Интегрируя (3) имеем :

$$\frac{1}{M(t)} = \frac{1}{M_0} + \int_0^t \frac{a^2}{2M}\, dt \tag{4}$$

зная, что мощность выполняет условия

$$N \leqslant Nd = \frac{1}{k}\, M_p$$

в конце сгорания τ, отношение (4) принимает вид :

$$\frac{M_0}{M_f} = 1 + \frac{M_0}{M_p}\,\frac{k}{2}\int_0^\tau a^2\, dt\,. \tag{5}$$

Оптимальное движение с минимумом горючего имеет место когда выражение (5) становится минимальной, другими словами, когда интеграл

$$I = \int_0^\tau a^2\, dt \tag{6}$$

становится минимальной.

В некоторых работах используя метод дифференцирующих зазоров, анализируется оптимальный маневр встречи с минимумом горючего, предполагая бесконечны по величине составляющие ускорения $\bar{a}$ относительно орбитальной системы.

В настоящей работе, другим способом, анализируем в общем виде маневр встречи без вынуждения какого-либо условия составляющих ускорения $\bar{a}$, которых, соответственно предположениям должны оставаться в пределе малых, конечных значений. Анализ в настоящей работе покажет, что задача варьяционного исчисления — для данного маневра — не что иное, как задача условного экстремума.

Считаем, что цель A движется с постоянной скоростью на круглой орбите радиуса R от центра земли (см. фиг. 2).

С целью (A) связан систему осей координат $Axzy$ так, чтобы z был направлен по радиусу R, по тангенсу к орбите, а y по нормали к

плоскости xz. Пусть B, перехватчик, находится на орбите вблизи цели. Считая, что расстояние между двумя аппаратами $d = \sqrt{x^2 + z^2 + y^2} \ll R$, то приблизительные уравнения относительно соответствующей системы будут :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\frac{dz}{dt} + a_x \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -2\omega\frac{dx}{dt} + 3\omega^2 z + a_z \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\omega^2 y + a_y \end{aligned} \tag{7}$$

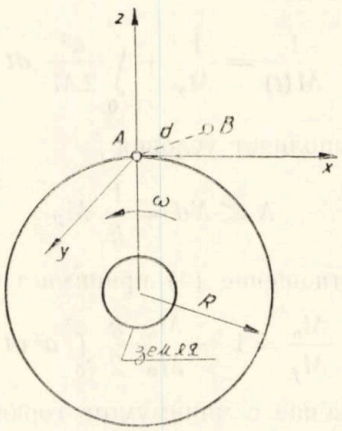


Рис. 2

или обозначая :

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} \\ V_z &= \frac{dz}{dt} \\ V_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned} \tag{7}$$

будем написать уравнения движения перехватчика под следующим видом :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= V_x \\ \frac{dV_x}{dt} &= 2\omega V_z + a_x \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z$$
$$\frac{dV_z}{dt} = -2\omega V_x + 3\omega^2 z + a_z \tag{8}$$
$$\frac{dy}{dt} = V_y$$
$$\frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 y + a_y$$

Следовательно, в промежутке данного времени τ, вопрос оптимального маневра встречи с минимальным горючим приводит к расчету минимума интегралы.

$$I = \int_0^\tau (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)\, dt \tag{9}$$

с условиями (8).
уравнения (8) напишем так:

$$\Phi_1 = \frac{dx}{dt} - V_x = 0$$
$$\Phi_2 = \frac{dV_x}{dt} - 2\omega V_z - a_x$$
$$\Phi_3 = \frac{dz}{dt} - V_z = 0 \tag{10}$$
$$\Phi_4 = \frac{dV_z}{dt} + 2\omega V_x - 3\omega^2 z - a_z$$
$$\Phi_5 = \frac{dy}{dt} - V_y = 0$$
$$\Phi_6 = \frac{dV_y}{dt} + \omega^2 y - a_y$$

и введя мультипликаторы Лагранжа λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 образуем функция:

$$F = a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 + \lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 + \lambda_4 \Phi_4 + \lambda_5 \Phi_5 + \lambda_6 \Phi_6. \tag{11}$$

Задача состоит в том, чтобы найти неусловный минимум интеграла:

$$I_1 = \int_0^\tau F\, dt. \tag{12}$$

Можно попробовать, что действительно вдоль функциональной (12) экстремала будет минимальной.

Поскольку функция F зависит линейно от производств: $\frac{dx}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{dV_x}{dt} \ldots \frac{dV_y}{dt}$, условие Лежандра, чтобы вторую варьяцию функционалы (12) было неотрицательным выполнено. Следовательно, получим, что функционала (12) минимальна.

С помощью функции (11) уравнения Эйлера

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dx}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dV_x}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dz}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial V_z} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dV_z}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial V_y} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dV_y}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial a_x} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{da_x}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial a_z} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{da_z}{dt}\right)} = 0\\
&\frac{\partial F}{\partial a_y} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{da_y}{dt}\right)} = 0
\end{aligned} \qquad (13)$$

и отмеченные условия (10) приводят к системе дифференциальных уравнений, которой после интегрирования дает искомые функции

$$x(t),\ z(t),\ y(t),\ V_x(t),\ V_z(t),\ V_y(t),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$$
$$\lambda_3(t),\ \lambda_4(t),\ \lambda_5(t),\ \lambda_6(t)$$

функции характеризующие оптимального маневра встречи с минимальным горючим.

Исполняя расчеты, уравнения Эйлера (13) приводят к системе:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\lambda_1}{dt} = 0\\
&-\lambda_1 + 2\omega\lambda_4 - \frac{d\lambda_2}{dt} = 0\\
&-3\omega^2\lambda_4 - \frac{d\lambda_3}{dt} = 0\\
&-2\omega\lambda_2 - \lambda_3 - \frac{d\lambda_4}{dt} = 0\\
&\omega^2\lambda_6 - \frac{d\lambda_5}{dt} = 0\\
&-\lambda_5 - \frac{d\lambda_6}{dt} = 0\\
&2a_x - \lambda_2 = 0\\
&2a_z - \lambda_4 = 0\\
&2a_y - \lambda_6 = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

из первых шести уравнений (14) получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\lambda_6}{dt^2} + \omega^2\lambda_6 = 0\\
&\frac{d^2\lambda_4}{dt^2} + \omega^2\lambda_4 = 2\omega C_1\\
&\frac{d\lambda_2}{dt} = 2\omega\lambda_4 - C_1
\end{aligned} \tag{15}$$

где $C_1 = \lambda_1$ — постоянная.

Решения уравнения (15) будучи

$$\begin{aligned}
&\lambda_6 = K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t\\
&\lambda_4 = K_3\cos\omega t + K_4\sin\omega t + \frac{2C_1}{\omega}\\
&\lambda_2 = 2K_3\sin\omega t - 2K_4\cos\omega t + 3C_1 t + K_5^*
\end{aligned} \tag{16}$$

с этим, выражения составляющих ускорения, если обозначаем, $K_5^* = 2K_5$, становятся:

$$a_x = K_3 \sin \omega t - K_4 \cos \omega t + \frac{3}{2} C_1 t + K_5$$

$$a_z = \frac{K_3}{2} \cos \omega t + \frac{K_4}{2} \sin \omega t + \frac{C_1}{\omega} \tag{17}$$

$$a_y = \frac{K_1}{2} \cos \omega t + \frac{K_2}{2} \sin \omega t$$

Имея выражения составляющих ускорения можем перейти к интегрированию системы уравнения (8), чтобы определить параметры движения x, z, y, V_x, V_z, V_y.

Действительно из последних двух уравнений (8) получим:

$$\frac{d^2 V_y}{dt^2} + \omega^2 V_y = \frac{da_y}{dt} \tag{18}$$

а из второго, третьего и четвертого уравнений (8) напишем:

$$\frac{d^2 V_z}{dt^2} + \omega^2 V_z = \frac{da_z}{dt} - 2\omega a_x. \tag{19}$$

Учитывая выражения состявляющих ускорения (17) по тяги, уравнения (18) и (19) становятся:

$$\frac{d^2 V_y}{dt^2} + \omega^2 V_y = -\frac{K_1 \omega}{2} \sin \omega t + \frac{K_2 \omega}{2} \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 V_z}{dt^2} + \omega^2 V_z = -\frac{5\omega K_3}{2} \sin \omega t + \frac{5\omega K_4}{2} \cos \omega t \tag{20}$$

$$- 3\omega C_1 t - 2\omega K_5$$

Имея V_z и V_y можно-через простые интегрирования — получить x, z и y. При интегрировании уравнения (20) получим:

$$V_y = \frac{K_1 t + 4\alpha_1}{4} \cos \omega t + \frac{K_2 \omega t - K_1 + 4\omega\alpha_2}{4\omega} \sin \omega t$$

$$V_z = \frac{5K_3 t + 4\alpha_3}{4} \cos \omega t + \frac{5K_4 \omega t - 5K_3 + 4\omega\alpha_4}{4\omega} \sin \omega t \tag{21}$$

$$- \frac{3C_1}{\omega} t - \frac{2K_5}{\omega}$$

с помощью которых напишем:

$$V_x = \frac{5}{2} K_3 \left(t \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \cos \omega t \right) + \frac{4 \omega \alpha_3 - 2 K_4}{2 \omega} \sin \omega t +$$
$$+ \frac{5}{2} K_4 \left(- t \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) - \frac{4 \omega \alpha_4 - 3 K_3}{2 \omega} \cos \omega t -$$
$$- \frac{9}{4} C_1 t^2 - 3 K_5 t + \alpha_5$$

$$x = \frac{5}{2} K_3 \left(- \frac{t}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right) + \frac{8 K_3 - 4 \omega \alpha_4}{2 \omega^2} \sin \omega t$$
$$- \frac{5}{2} K_4 \left(\frac{t}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \right) - \frac{3 K_4 + 4 \omega \alpha_3}{2 \omega^2} \cos \omega t$$
$$- \frac{3}{4} C_1 t^3 - \frac{3}{2} K_5 t^2 + \alpha_5 t + \alpha_6 \qquad (22)$$

$$z = \frac{5}{4} K_3 \left(\frac{t}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \right) + \frac{\alpha_3}{\omega} \sin \omega t +$$
$$+ \frac{5}{4} K_4 \left(- \frac{t}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right) - \frac{4 \omega \alpha - 5 K_3}{4 \omega^3} \cos \omega t .$$
$$- \frac{3 C_1}{2 \omega} t^2 - \frac{2 K_5}{\omega} t + \alpha_7$$

$$y = \frac{K_1}{4} \left(\frac{t}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{\alpha_1}{\omega} \sin \omega t \right.$$
$$\left. + \frac{K_2}{4} \left(- \frac{t}{\omega} \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t \right) - \frac{4 \omega \alpha_2 - K_1}{4 \omega^2} \cos \omega t + \alpha_8 \right.$$

Для определения 14 — х постоянных $C_1, K_1, K_2 \ldots K_5, \ldots, \alpha_8$ располагаем от величин $x, z, y, V_x, V_z, V_y, a_x, a_z, a_y$ на время $t = 0$ и $t = \tau$. Из условия встречи для $t = \tau$ следует, что:

$$\begin{aligned} &x(\tau) = 0; \quad z(\tau) = 0; \quad y(\tau) = 0 \\ &V_x(\tau) = 0; \quad V_z(\tau) = 0; \quad V_y(\tau) = 0 \\ &a_x(\tau) = 0; \quad a_z(\tau) = 0; \quad a_y(\tau) = 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

Для $t = 0$ необходимы начальные данные.

$$x(0); \; z(0); \; y(0); \; V_x(0), \; V_z(0), \; V_y(0) \qquad (24)$$

которых, могут быть определенны в начале маневра.

Выражения постоянных, рассчитанные из предыдущих условий будут :

$$C_1 = \frac{A_{14}}{A_{12}} - \frac{A_{13}}{A_{12}} \cdot \frac{A_{12}A_{17} - A_{14}A_{15}}{A_{12}A_{16} - A_{13}A_{15}}$$

$$K_1 = -K_2 \operatorname{tg} \omega\tau$$

$$K_2 = -\frac{V_y(0)\cos\omega\tau + \frac{A_3}{A_4}\sin\omega\tau}{A_1}$$

$$K_3 = -\frac{2C_1}{\omega\cos\omega\tau} - K_4 \operatorname{tg}\omega\tau$$

$$K_4 = \frac{A_{12}A_{17} - A_{14}A_{15}}{A_{12}A_{16} - A_{13}A_{15}}$$

$$K_5 = C_1\left(\frac{2}{\omega}\operatorname{tg}\omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right) + K_4(\cos\omega\tau + \operatorname{tg}\omega\tau\sin\omega\tau)$$

$$\alpha_1 = V_y(0)$$

$$\alpha_2 = \frac{A_3}{A_4}$$

$$\alpha_3 = C_1A_5 + K_4A_6 - \alpha_4\operatorname{tg}\omega\tau$$

$$\alpha_4 = \frac{V_x(0)}{A_9} - \frac{A_{10}}{A_9}C_1 - \frac{A_{11}}{A_9}K_4$$

$$\alpha_5 = C_1A_7 + K_4A_8 + \alpha_4(2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau + 2\cos\omega\tau)$$

$$\alpha_6 = x(0) + \frac{2A_5}{\omega}C_1 + \left(\frac{4}{\omega^2} + \frac{2A_6}{\omega}\right)K_4 - \frac{2\operatorname{tg}\omega\tau}{\omega}\alpha_4 \qquad (23)$$

$$\alpha_7 = z(0) + \frac{5}{\omega^3\cos\omega\tau}C_1 + \frac{5}{2\omega^2}\operatorname{tg}\omega\tau K_4 + \frac{\alpha_4}{\omega}$$

$$\alpha_8 = \frac{A_2}{A_1}V_y(0)\cos\omega\tau - \frac{V_y(0)}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{A_3}{A_4}\left(\frac{A_2}{A_1}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{4}\left[-\tau\sin\omega\tau + \left(\tau + \frac{\operatorname{tg}\omega\tau}{\omega}\right)\right]$$

$$A_2 = \left(-\frac{\tau}{4\omega}\cos\omega\tau + \frac{1}{4\omega^2}\sin\omega\tau\right) - \frac{\operatorname{tg}\omega\tau}{4}\left(\frac{\tau}{\omega}\sin\omega\tau + \frac{2}{\omega^2}\cos\omega\tau\right)$$

$$A_3 = \operatorname{tg}\omega\tau\frac{V_y(0)\cos\omega\tau}{A_1} - 2\omega^2y(0) + 2\omega^2\frac{A_2}{A_1}V_y(0)\cos\omega\tau -$$

$$- 2\omega^2\frac{V_y(0)}{\omega}\sin\omega\tau$$

$$A_4 = 2\omega - \frac{\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau}{A_1} - 2\omega^2\left(\frac{A_2}{A_1}\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right)$$

$$A_5 = -\frac{1}{\cos\omega\tau}\left[-\frac{5\tau}{2\omega} + \frac{5\,\mathrm{tg}\,\omega\tau}{2\omega^2} - \frac{3\tau}{\omega} - \frac{2}{\omega}\left(\frac{2}{\omega}\mathrm{tg}\,\omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right)\right]$$

$$A_6 = -\frac{1}{\cos\omega\tau}\left[-\frac{5}{4}\tau\cos\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau + \frac{5}{4}\tau\sin\omega\tau\right.$$

$$\left. + \frac{5}{4\omega}\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau - \frac{2}{\omega}\left(\cos\omega\tau + \mathrm{tg}\,\omega\tau\sin\omega\tau\right)\right]$$

$$A_7 = -\left[2A_5\sin\omega\tau - \frac{5}{\omega}\left(\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau + \frac{1}{\omega}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{3}{\omega^2} - \frac{9}{4}\tau^2 - 3\tau\left(\frac{2}{\omega}\mathrm{tg}\,\omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right)\right]$$

$$A_8 = -\left[2A_6\sin\omega\tau - \frac{5}{2}\mathrm{tg}\,\omega\tau\left(\tau\sin\omega\tau + \frac{1}{\omega}\cos\omega\tau\right)\right.$$

$$- \frac{\sin\omega\tau}{\omega} + \frac{5}{2}\left(-\tau\cos\omega\tau + \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau\right)$$

$$\left. - \frac{3}{2\omega}\sin\omega\tau - 3\tau\left(\cos\omega\tau + \mathrm{tg}\,\omega\tau\sin\omega\tau\right)\right]$$

$$A_9 = 2\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau + 2\cos\omega\tau - 2$$

$$A_{10} = A_7 - \frac{7}{\omega^2\cos\omega\tau}$$

$$A_{11} = A_8 - \frac{7}{2\omega}\mathrm{tg}\,\omega\tau$$

$$A_{12} = -\frac{5}{\omega\cos\omega\tau}\left(-\frac{\tau}{\omega}\cos\omega\tau + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega\tau\right) - \frac{8}{\omega^3}\mathrm{tg}\,\omega\tau$$

$$+ \frac{2A_{10}}{A_9\omega}\sin\omega\tau - \frac{2A_5}{\omega}\cos\omega\tau - \frac{2A_{10}}{A_9\omega}\cos\omega\tau \qquad (23)$$

$$- \frac{3}{4}\tau^3 - \frac{3\tau^2}{2}\left(\frac{2}{\omega}\mathrm{tg}\,\omega\tau - \frac{3}{2}\tau\right) + \tau A_7$$

$$- \frac{\tau A_{10}}{A_9}\left(2\sin\omega\tau\,\mathrm{tg}\,\omega\tau + 2\cos\omega\tau\right) + \frac{2A_5}{\omega} + \frac{2\,\mathrm{tg}\,\omega\tau}{A_9\omega}A_{10}$$

$$A_{13} = -\frac{5}{2}\operatorname{tg}\omega\tau\left(-\frac{\tau}{\omega}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\tau\right)-\frac{4}{\omega^2}\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau$$
$$+\frac{2A_{11}}{A_9\omega}\sin\omega\tau-\frac{5}{2}\left(\frac{\tau}{\omega}\sin\omega\tau+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right)-\frac{3}{2\omega^2}\cos\omega\tau$$
$$-\frac{2A_6}{\omega}\cos\omega\tau-\frac{2\sin\omega\tau A_{11}}{A_9\omega}-\frac{3}{2}\tau^2(\cos\omega\tau+\operatorname{tg}\omega\tau\sin\omega\tau)$$
$$+\tau A_8-\frac{\tau A_{11}}{A_9}(2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau+2\cos\omega\tau)$$
$$+\frac{4}{\omega^2}+\frac{2A_6}{\omega}+\frac{2\operatorname{tg}\omega\tau A_{11}}{A_9\omega}$$

$$A_{14} = \frac{2\operatorname{tg}\omega\tau V_x(0)}{A_9\omega}-\frac{\tau V_x(0)}{A_9}(2\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau+2\cos\omega\tau)-x(0)$$

$$A_{15} = -\frac{5}{2\omega}\left(\frac{\tau}{\omega}\operatorname{tg}\omega\tau+\frac{1}{\omega^2}\right)+\frac{\sin\omega\tau}{\omega}A_5$$
$$+\frac{\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau A_{10}}{A_9\omega}+\frac{A_{10}}{A_9\omega}\cos\omega\tau-\frac{5}{2\omega^3}-\frac{3\tau^2}{2\omega}$$
$$-\frac{2}{\omega}\tau\left(\frac{2}{\omega}\operatorname{tg}\omega\tau-\frac{3}{2}\tau\right)+\frac{5}{\omega^3\cos\omega\tau}-\frac{A_{10}}{A_9\omega}$$

$$A_{16} = -\frac{5\operatorname{tg}\omega\tau}{4}\left(\frac{\tau}{\omega}\sin\omega\tau+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\tau\right)+\frac{\sin\omega\tau A_6}{\omega}$$
$$+\frac{\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau A_{11}}{A_9\omega}+\frac{5}{4}\left(-\frac{\tau}{\omega}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\tau\right)$$
$$+\frac{A_{11}}{A_9\omega}\cos\omega\tau-\frac{5}{4\omega^2}\sin\omega\tau+\frac{5}{2\omega^2}\operatorname{tg}\omega\tau \qquad (23)$$
$$-\frac{2\tau}{\omega}(\cos\omega\tau+\operatorname{tg}\omega\tau\sin\omega\tau)-\frac{A_{11}}{A_9\omega}$$

$$A_{17} = \frac{\sin\omega\tau\operatorname{tg}\omega\tau V_x(0)}{A_9\omega}+\frac{V_x(0)\cos\omega\tau}{A_9\omega}-\frac{V_x(0)}{A_9\omega}-z(0).$$

Пример

Начальные данные

$x(0) = 15\cdot10^3$ м; $z(0) = 9\cdot10^3$ м; $y(0) = 4\cdot10^3$ м; $R = 6{,}971\cdot10^6$ м;

$V_x(0) = -120$ м/сек; $V_z(0) = 0$; $V_y(0) = 0$; $\omega = 0{,}00119$ [1]/сек; $\tau = 80$ сек.

По изложенной теории выше расчитаны составляющие ускорения a_x, a_z, a_y характеризующие оптимальный маневр встречи с минимальным горючим, результаты находящиеся на графиках из фиг. 3, 4, 5.

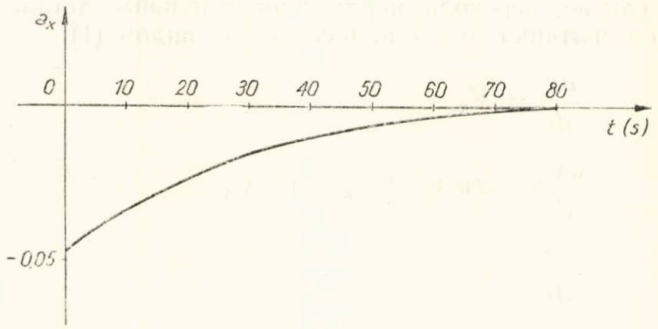


Рис. 3

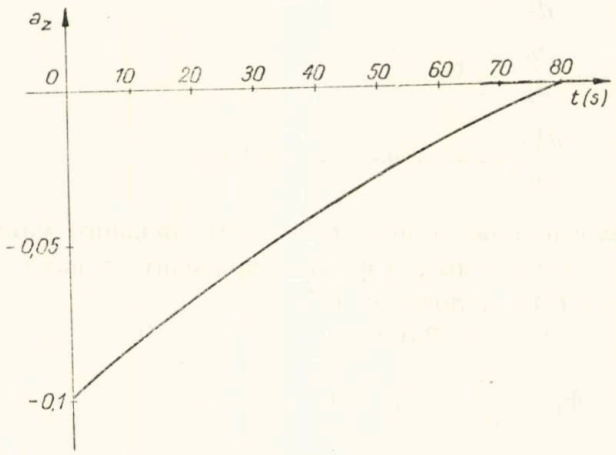


Рис. 4

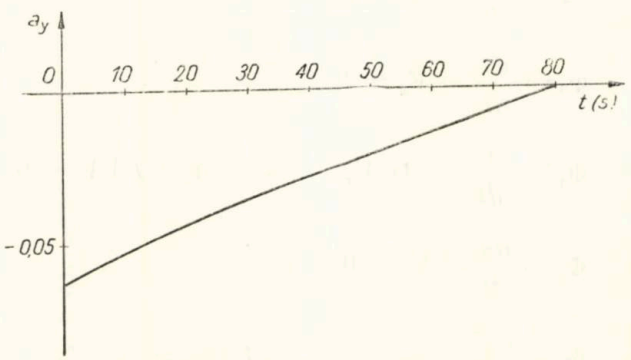


Рис. 5

4. Оптимальный маневр с учетом аэродинамического сопротивления

В этом случае, переходя через дополнительные детали, уравнения движения перехватчика будут написаны под видом (1)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= V_x \\
\frac{dV_x}{dt} &= 2\omega V_z + a_x - KVV_x \\
\frac{dz}{dt} &= V_z \\
\frac{dV_z}{dt} &= -2\omega V_x + 3\omega^2 z + a_z - KVV_z \\
\frac{dy}{dt} &= V_y \\
\frac{dV_y}{dt} &= -\omega^2 y + a_y - KVV_y
\end{aligned} \tag{25}$$

Задача варьяционного исчисления оптимального маневра встречи (стыковки) с минимальным горючим приходит к нахождению минимума интеграла (9) с условиями (25).

Напишем уравнения (25) так:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{dx}{dt} - V_x = 0. \\
\Phi_2 &= \frac{dV_x}{dt} - 2\omega V_z - a_x + KVV_x \\
\Phi_3 &= \frac{dz}{dt} - V_z = 0 \\
\Phi_4 &= \frac{dV_z}{dt} + 2\omega V_x - 3\omega^2 z - a_z + KVV_z = 0. \\
\Phi_5 &= \frac{dy}{dt} - V_y = 0 \\
\Phi_6 &= \frac{dV_y}{dt} + \omega^2 y - a_y + KVV_y = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

С помощью мультипликаторов Лагранжа λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots \lambda_6$ образовываем, как и в предыдущем случае, вспомогательную функцию F, с пошощью которой переходим к вопросу неусловного минимума.

Можно также попробовать и в этом случае с помощью условий Лежанра, что соответствующая функциональ минимальна.

Что касается системы дифференциальных уравнений экстремалов, эта может быть получена на основе таких же уравнений Эйлера, предполагая, что закон изменения массы задана, следовательно не будем искать ее как экстремал.

На той же основе, как и в предыдущем случае, исполняя рассчеты, уравнения (13) Эйлера ведут нас к системе:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0$$

$$-\lambda_1 + \lambda_2 K \frac{2V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} + 2\omega\lambda_4 + \lambda_4 K \frac{V_x V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} +$$

$$+ \lambda_6 K \frac{V_x V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} - \frac{d\lambda_2}{dt} = 0$$

$$-3\omega^2\lambda_4 - \frac{d\lambda_3}{dt} = 0$$

$$-2\omega\lambda_2 + \lambda_2 K \frac{V_x V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} - \lambda_3 + \lambda_4 K \frac{V_x^2 + 2V_z^2 + V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} +$$

$$+ \lambda_6 K \frac{V_z V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} - \frac{d\lambda_4}{dt} = 0$$

$$\lambda_6\omega^2 - \frac{d\lambda_5}{dt} = 0 \qquad (27)$$

$$\lambda_2 K \frac{V_x V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} + \lambda_4 K \frac{V_z V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} - \lambda_5 +$$

$$+ \lambda_6 K \frac{V_x^2 + V_z^2 + 2V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} - \frac{d\lambda_6}{dt} = 0$$

$$2a_x - \lambda_2 = 0$$

$$2a_z - \lambda_1 = 0$$

$$2a_y - \lambda_6 = 0$$

Из систем (25) и (27) получим систему дифференциальных уравнений экстремалов, которую напишем под видом:

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \psi_1(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1 \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{dV_x}{dt} = 2\omega V_z + a_x - KVV_x = \psi_2(t, x, V_x \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z = \psi_3(t, x, V_x \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -2\omega V_x + 3\omega^2 z + a_z - KVV_z = \psi_4(t, x. V_x, \ldots V_y, \lambda_1 \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = \psi_5(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 y + a_y - KVV_y = \psi_6(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6).$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \psi_7(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6) = 0 \qquad (28)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + \lambda_2 K \frac{2V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} + 2\omega\lambda_4$$

$$+ \lambda_4 K \frac{V_x V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} + \lambda_6 K \frac{V_x V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} =$$

$$= \psi_8(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1 \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -3\omega^2 \lambda_4 = \psi_9(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1 \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -2\omega\lambda_2 + \lambda_2 K \frac{V_x V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} - \lambda_3 + \lambda_4 K \frac{V_x^2 + 2V_z^2 + V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} +$$

$$+ \lambda_6 K \frac{V_z V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} = \psi_{10}(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = \omega^2 \lambda_6 = \psi_{11}(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6).$$

$$\frac{d\lambda_6}{dt} = \lambda_2 K \frac{V_x V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} + \lambda_1 K \frac{V_z V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}}$$

$$- \lambda_5 + \lambda_6 K \frac{V_x^2 + V_z^2 + 2V_y^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2 + V_y^2}} = \psi_{12}(t, x, V_x, \ldots V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6).$$

Исходя из начальных данных $x(t_0) = X_0 \ldots V_x(t_0) = V_{x0} \ldots \lambda_6(t_0) = \lambda_{60}$ систему (28) может быть интервирован методом послежующих приближений если функции ψ_i (где $i = 1, 2 \ldots 12$) будут непрерывными для $|t - t_0| < \tilde{t}$; $(t \neq \tau)$; $|x - x_0| < \tilde{x}$; $|V_x - V_{x0}| < \tilde{V}_x \ldots |\lambda_6 - \lambda_{60}| < \tilde{\lambda}_6$ где $t, x, \ldots \lambda_6$ представляют собой величины, положительные и выполняющие условие Липшица.

Поскольку все члены, входящие в функции ψ_i являются непрерывными функциями в упомянутых интервалах, функций ψ_i будут непрерывными.

Что касается условия Липшица необходимо подчеркнуть, что $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial V_x} \ldots \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_6}$ являются непрерывными функциями по замкнутым интервалам

$$|t - t_0| \leqslant \tilde{t}\ ,\ |x - x_0| \leqslant \tilde{x}\ ,\ \ldots\ .\ |\lambda_6 - \lambda_{60}| \leqslant \tilde{\lambda}_6\ .$$

Легко проверять, что и это условие выполнено.

Расчет можно вести дальше через последовательные приближения и для n-ого приближения напишем:

$$\begin{aligned}
\frac{dx^{(n)}}{dt} &= \psi_1\left(t, x^{(n-1)}, V^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}\right) \\
\frac{dV_x^{(n)}}{dt} &= \psi_2\left(t, x^{(n-1)}, V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}\right) \qquad (29) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d\lambda_6}{dt} &= \psi_{12}\left(t, x^{(n-1)}, V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

Получим решения:

$$\begin{aligned}
x^{(n)} &= X_0 + \int_{t_0}^{t} \psi_1\left(t, x^{(n-1)}, V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}\right) dt. \\
V_x^{(n)} &= V_{x0} + \int_{t_0}^{t} \psi_2\left(t, x^{(n-1)}, V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}\right) dt. \qquad (30) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_6^{(n)} &= \lambda_{60} + \int_{t_0}^{t} \psi_{12}\left(t, x^{(n-1)}, V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}\right) dt.
\end{aligned}$$

Вообще задача найти точные значения мультипликаторов Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ является очень громоздкой и поэтому будем интегрировать 12-ти уравнения системы (28) таким образом: считая как бли-

жащейшим законом изменения массы M, показательный закон $M = M_0 e^{-\alpha t}$, где α — постоянная для λ_{10}, λ_{20}, $\lambda_{40} \ldots \lambda_{60}$, $a_{x0} \ldots a_{y0}$ взяв предыдущие значения (без учета аэродинамического сопротивления) нитегрирование становится более легким.

В качестве примера, поскольку $t_0 = 0$, решения (30) системы (28) в первом приближении будут:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= x_0 + V_{x0} t \\
V_x^{(1)} &= V_{x0} + (2\omega V_{z0} + a_{x0}) t - \frac{\varrho S C_x V_{x0} V_0}{2 M_0 \alpha} (e^{\alpha t} - 1) \\
z^{(1)} &= z_0 + V_{z0} t \\
V_z^{(1)} &= V_{z0} + (-2\omega V_{x0} + 3\omega^2 z_0 + a_{z0}) t - \frac{\varrho S C_x V_{z0} V_0}{2 M_0 \alpha} (e^{\alpha t} - 1) \\
y^{(1)} &= y_0 + V_{y0} t \\
V_y^{(1)} &= V_{y0} + (\omega^3 y_0 + a_{y0}) t - \frac{\varrho S C_x V_{y0} V_0}{2 M_0 \alpha} (e^{\alpha t} - 1) \\
\lambda_1^{(1)} &= \lambda_{10} \\
\lambda_2^{(1)} &= \lambda_{20} + (-\lambda_{10} + 2\omega \lambda_{40}) t + \frac{\varrho S C_x}{2 M_0 \alpha} \left(\lambda_{20} \frac{2 V_{x0}^2 + V_{z0}^2 + V_{y0}^2}{V_0} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{40} \frac{V_{x0} V_{z0}}{V_0} + \lambda_{60} \frac{V_{x0} V_{y0}}{V_0} \right) (e^{\alpha t} - 1) \qquad (31) \\
\lambda_3^{(1)} &= \lambda_{30} - 3\omega^2 \lambda_{40} t \\
\lambda_4^{(1)} &= \lambda_{40} - (2\omega \lambda_{20} + \lambda_{30}) t + \frac{\varrho S C_x}{2 M_0 \alpha} \left(\lambda_{20} \frac{V_{x0} V_{z0}}{V_0} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{40} \frac{V_{x0}^2 + 2 V_{z0}^2 + V_{y0}^2}{V_0} + \lambda_{60} \frac{V_{z0} V_{y0}}{V_0} \right) (e^{\alpha t} - 1) \\
\lambda_5^{(1)} &= \lambda_{50} + \omega^2 \lambda_{60} t \\
\lambda_6^{(1)} &= \lambda_{60} - \lambda_{50} t + \frac{\varrho S C_x}{2 M_0 \alpha} \left(\lambda_{20} \frac{V_{x0} V_{y0}}{V_0} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{40} \frac{V_{z0} V_{y0}}{V_0} + \lambda_{60} \frac{V_{x0}^2 + V_{z0}^2 + 2 V_{y0}^2}{V_0} \right) (e^{\alpha t} - 1)
\end{aligned}
$$

где $V_0 = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{z0}^2 + V_{y0}^2}$, расчеты ведутся таким образом до приближения любого порядка.

Имея выражения величин $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_4^{(1)}$, $\lambda_6^{(1)}$ из последних трех уравнений (27) получим и составляющие скорости в первом приближений для этого случая в котором учитывали аэродинамическое сопротивление.

Выводы

Сделаный анализ в настоящей работе показывает, что обычные методы варьяционного исчисления могут быть применены без трудности и может привести к некоторым полезным результатам. Для оптимального маневра встречи с минимальным расходом горючего, пренебрегая эффектом аэродинамического сопротивления можно легко устанавливать, что фиксированы (в момент стыковки) — величины x, z, y, V_x, V_z, V_y, a_x, a_z, a_y и оценивая (что с практической точки зрения — в начале маневра встречи — вполне возможно) пяти из величин x, z, y, V_x, V_z, V_y варьяционная задача маневра приходит к задаче об условном экстремуме.

Используя данные из третьего параграфа настоящей работы, расчеты вели к законам изменения, представленным в фиг. 3, 4 и 5 для составляющих ускорения a_x, a_z, a_y.

Поскольку $x(0)$, $z(0)$, $y(0)$ положительные величины, составляющие ускорения a_x, a_z, a_y отрицательные, другими словами, составляющие тяги на единицу массы будут направлены против осей x, z, y

Заметим почти линейную зависимость составляющих a_z и a_y.

Поскольку, с практической точки зрения, сила тяги на единицу массы не может падать под определенным значением следует, что a_x, a_z, a_y становятся нулями для времени $\tau_1 < \tau$. Разность времени $\tau - \tau_1$ может служить для завершения маневра встречи, которого требует иногда чтобы тягу действовала в обратном направлении. Разумеется, что это достигается с помощью запаса топлива для главного устройства создания силы тяги.

В рассматриваемом примере видно, что в направлении оси x по которой существует начальная скорость, ускорение a_x практически достигает нулевое значение более рано других двух составляющих, что совпадает действительности.

Что касается оптимального маневра, учитывая аэродинамическое сопротивление, уравнение Эйлера и уравнение движения ведут к системе дифференциальных уравнений, рещающихся с помощью последовательных приближений.

Из осуществленных расчетов отмечаем, что в первом приближении поведение экстремалов почти линейное.

Кафедра Авиационностроения
Бухарестского Политехнического Института
им. „Георге Георгиу Дежа"

Институт механики жидкости Академии
Социалистической Республики Румынии

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marinescu Al.* Contributions à l'étude de certains manoeuvres optimum pour le rendez-vous des enigmes sur les orbites circulaires.
XVI International Astronautical Congress-Atens sept. 1965.
2. *Marinescu Al.* La moutée en temps minimum des fusee. Revue Roumaine de Sciences Technique, Serie de Mecanique Appliquée. Nr. 3 1965, București.
3. *Billik H. B.* Some optimal low — acceleration rendez-vous maneuvres. A.I.A.A. Journal, 1964, 2 Nr. 3 511—516.
4. *Irving H. I.* Low thrust flight Space Technology chap. 10 Sohn Willey and Sons. Inc New-York, 1959.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

TEORIA MECANISMELOR

C.Z. : 621—2 : 621.8 : 677

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ МЕХАНИЗМА С СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ РЫЧАГАМИ*

П. А. ЛЕБЕДЕВ Б. Н. ПЕВЗНЕР
Ленинградский институт текстильной и
легкой промышленности, им. С. М. Кирова

Установлена аналитическая зависимость перемещения ведомого звена пространственного трехзвенного механизма с соприкающимися рычагами, образующими высшую кинематическую пару (сфера-точка), от перемещения ведущего звена и размеров звеньев.

Среди пространственных трехзвенных механизмов с соприкасающимися рычагами встречаются такие их разновидности, в которых элементы высшей кинематической пары представляют собой сферу и точку. Такие механизмы применяются, например, в конструкциях приборов моторной группы самолетов, навигационных приборах, автоштурманах, автоматах пилотирования.

В связи с решением задач анализа и синтеза таких механизмов представляет интерес разработка аналитических способов определения параметров движения их звеньев.

Предположим для общности, что оси вращения звеньев 1 и 2 (рис. 1) скрещиваются в пространстве под произвольным углом.

Полагаем, что прямая AB рычага 1 скрещивается с осью его вращения под углом α_1.

Пусть прямая KC звена 2, проходящая через точку K контакта сферы и щупа и параллельная прямой DG рычага 2, скрещивается с осью вращения звена 2 под углом α_2.

Звеня 1 и 2 образуют со своими осями вращения вращательные кинематические пары E и F пятого класса.

Выберем правую неподвижную систему координат $Oxyz$ так чтобы ось абсцисс совпадала с осью вращения рычага 1, а начало с точкой O пересечения общего перпендикуляра к прямым AB и OF. При этом отрезок OA при вращении звена 1 движется в плоскости yOz и его положение, а, следовательно, и положение звена 1, опре-

* Рукопись получена редакцией 6 января 1966.

деляется величиной угла φ, отсчитываемого в положительном направлении от оси y.

Выберем вторую неподвижную систему координат $Qusw$, направив ось абсцисс вдоль оси QE вращения звена 2 и совместив начало Q с основанием общего перпендикуляра k прямым QE и KC. Ось s на-

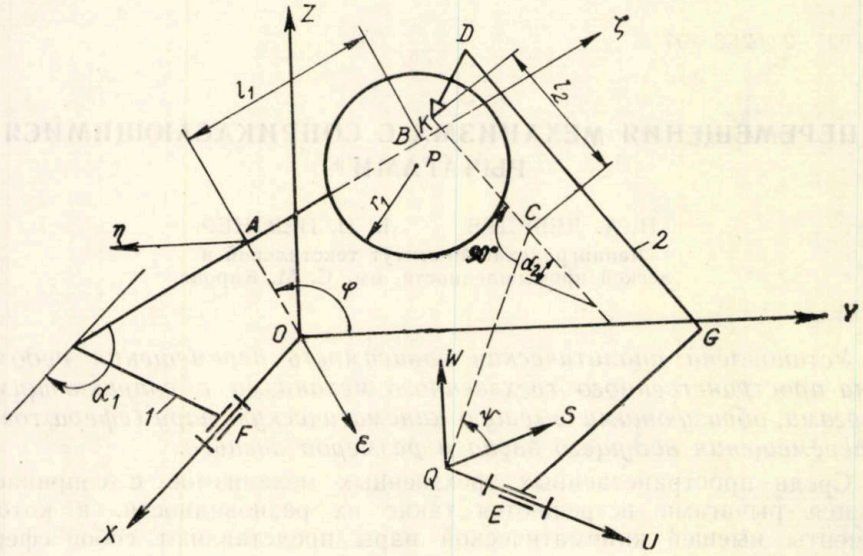


Рис. 1

правим параллельно плоскости xOy. При таком выборе системы координат $Qusw$ отрезок QC при вращении рычага 2 вокруг оси QE движется в координатной плоскости sQw и его положение, равно как и положение звена 2, определяется величиной угла ψ, отсчитываемого в положительном направлении от оси ординат s.

Свяжем с рычагом 1 подвижную систему координат $A\xi\eta\zeta$, направив ось абсцисс ξ вдоль отрезка AO, а ось ζ вдоль отрезка AB. Направление оси ординат η должно быть выбрано так, чтобы все системы координат были одинаковой ориентации.

Введем следующие дополнительные обозначения: r — радиус сферы, представляющий собой элемент рабочей поверхности звена 1; x_Q, y_Q, z_Q — координаты точки Q начала системы координат в системе $Oxyz$; q_x, q_y, q_z — косинусы углов, составленных прямой EQ с осями координат.

Положение точки A в системе $Oxyz$ определяется ее координатами:

$$x_A = 0; \quad y_A = d_1 \cos\varphi; \quad z_A = d_1 \sin\varphi; \tag{1}$$

где:

d_1 — длина отрезка AO.

Определим координаты точки B, расположенной на прямой AB и удаленной от точки A на расстояние l_1.

Составим уравнение прямой AB в канонической форме:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}. \tag{2}$$

Так как эта приямая образует с осью x угол α_1, справедливо равенство:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_B - x_A}{l_1}, \tag{3}$$

$$l_1^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A). \tag{4}$$

Перпендикуляр OA отображается в системе $Oxyz$ уравнением:

$$\frac{x}{x_A} = \frac{y}{y_A} = \frac{z}{z_A}. \tag{5}$$

Условие перпендикулярности прямых AB и OA имеет вид:

$$x_A(x_B - x_A) + y_A(y_B - y_A) + z_A(z_B - z_A) = 0 \tag{6}$$

или

$$x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B - d_1^2 = 0, \tag{7}$$

где:

$d_1^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2$.

Решая систему уравнений [3], [4] и [7] и подставляя значения [1] координат точки A, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x_B &= l_1\cos\alpha_1; \\ y_B &= d_1\cos\varphi \pm \sqrt{l_1^2\sin^2\alpha_1 - d_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi; \\ z_B &= \frac{d_1 - y_B\cos\varphi}{\sin\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Задача определения координат точки K, удаленной от точки C на расстояние l_2, в зависимости от координат точки C в системе $Qusw$

$$u_C = 0; \qquad s_C = d_2\cos\psi; \qquad w_C = d_2\sin\psi; \tag{9}$$

аналогична задаче определения координат точки B в системе $Oxyz$. Поэтому соответствующие равенства для определения координат точки K получим из равенства [8] путем замены символов B; α_1; d_1; l_1 и φ соответственно символами K, α_2; d_2, l_2 и ψ:

$$\left.\begin{aligned} u_K &= l_2\cos\alpha_2; \\ s_K &= d_2\cos\psi \pm \sqrt{l_2^2\sin^2\alpha_2 - d_2^2\sin^2\psi\cos^2\psi}\ \sin\psi; \\ w_K &= \frac{d_2 - s_K\cos\psi}{\sin\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для установления зависимости угла ψ поворота ведомого звена 2 от угла φ поворота ведущего звена 1 необходимо составить уравнение сферы и, подставив в него значение координат точек K, найти зависимость величины угла ψ от величины угла φ. Разумеется, для этой цели предварительно необходимо преобразовать уравнение сферы и координаты точки K к какой-либо одной системе координат. Уравнение сферы с центром P (рис. 1) имеет наиболее простой вид в подвижной системе координат $A\xi\eta\zeta$:

$$(\xi-\xi_P)^2+(\eta-\eta_P)^2+(\zeta-\zeta_P)^2=r^2. \tag{11}$$

Приведем координаты точки K к системе $A\xi\eta\zeta$. Это преобразование состоит из двух последовательных преобразований координат точки K из системы $Qusw$ сначала в систему $Oxyz$, а затем в систему $A\xi\eta\zeta$.

Первое преобразование определяется равенствами:

$$\left.\begin{aligned} x_K &= x_Q + q_{11}u_K + q_{12}s_K + q_{13}w_K,\\ y_K &= y_Q + q_{21}u_K + q_{22}s_K + q_{23}w_K,\\ z_K &= z_Q + q_{31}u_K + q_{32}s_K + q_{33}w_K, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

которые могут быть представлены в матричной форме:

$$M_1 = M_2 + M_3 M_4, \tag{13}$$

где: M_1, M_2 и M_4 — одностолбцовые матрицы вида

$$M_1=\left\|\begin{matrix} x_K\\ y_K\\ z_K\end{matrix}\right\|;\quad M_2=\left\|\begin{matrix} x_Q\\ y_Q\\ z_Q\end{matrix}\right\|;\quad M_4=\left\|\begin{matrix} u_K\\ s_K\\ w_K\end{matrix}\right\| \tag{14}$$

и M_3 — квадратная матрица, причем

$$M_3=\left\|\begin{matrix} q_{11} & q_{12} & q_{13}\\ q_{21} & q_{22} & q_{23}\\ q_{31} & q_{32} & q_{33}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} q_x & qq_y & qq_x q_z\\ q_y & qq_x & -qq_y q_z\\ q_z & 0 & q\end{matrix}\right\|, \tag{15}$$

где для краткости записи принято обозначение:

$$q=(1-q_z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Второе преобразование координат точки K из системы $Oxyz$ к системе $A\xi\eta\zeta$ осуществляется при помощи равенств:

$$\left.\begin{aligned} \xi_K &= n_{11}(x_K-x_A)+n_{12}(y_K-y_A)+n_{13}(z_K-z_A),\\ \eta_K &= n_{21}(x_K-x_A)+n_{22}(y_K-y_A)+n_{23}(z_K-z_A),\\ \zeta_K &= n_{31}(x_K-x_A)+n_{32}(y_K-y_A)+n_{33}(z_K-z_A), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

которые эквавалентны следующему матричному равенству:

$$M_5 = M_7(M_1 - M_6), \tag{17}$$

где столбцовые матрицы

$$M_5 = \left\| \begin{matrix} \xi_K \\ \eta_K \\ \zeta_K \end{matrix} \right\|, \quad M_6 = \left\| \begin{matrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{matrix} \right\|$$

и квадратная матрица M_7 вращения системы координат $Oxyz$ относительно системы $A\xi\eta\zeta$:

$$M_7 = \| n_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} \cos(\xi x) & \cos(\xi y) & \cos(\xi z); \\ \cos(\eta x) & \cos(\eta y) & \cos(\eta z); \\ \cos(\zeta x) & \cos(\zeta y) & \cos(\zeta z); \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \dfrac{x_A}{d_1} & \dfrac{y_A}{d_1} & \dfrac{z_A}{d_1} \\ \pm\sqrt{1-\dfrac{x_A^2}{d_1^2}-\dfrac{(x_B-x_A)^2}{l_1^2}}; & \pm\sqrt{1-\dfrac{y_A^2}{d_1^2}-\dfrac{(y_A-y_B)^2}{l_1^2}}; & \pm\sqrt{1-\dfrac{z_A^2}{d_1^2}-\dfrac{(z_A-z_B)^2}{l_1^2}} \\ \dfrac{x_B-x_A}{l_1} & \dfrac{y_A-y_B}{l_1} & \dfrac{z_B-z_A}{l_1} \end{matrix} \right\| \quad (18)$$

Подставляя в равенство [17] значение [13] матрицы M_1, находим:

$$M_5 = M_7 (M_2 + M_3 M_4 - M_6). \quad (19)$$

Произведя действия, определяемые матричным уравнением [19], находим значения координат точки K в системе $A\xi\eta\zeta$:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_K &= \frac{x_A}{d_1}(x_Q - x_A + q_{11}u_K + q_{12}s_K + q_{13}w_K) + \frac{y_A}{d_1}(y_Q - y_A + q_{21}u_K \\
&\quad + q_{22}s_K + q_{23}w_K) + \frac{z_A}{d_1}(z_Q - z_A + q_{31}u_K + q_{32}s_K + q_{33}w_K); \\
\eta_K &= \pm\sqrt{1-\frac{x_A^2}{d_1^2}-\frac{(x_B-x_A)^2}{l_1^2}}(x_Q - x_A + q_{11}u_K + q_{12}s_K + q_{13}w_K) \\
&\quad \pm\sqrt{1-\frac{y_A^2}{d_1^2}-\frac{(y_B-y_A)^2}{l_1^2}}(y_Q - y_A + q_{21}u_K + q_{22}s_K + q_{23}w_K) \\
&\quad \pm\sqrt{1-\frac{z_A^2}{d_1^2}-\frac{(z_B-z_A)^2}{l_1^2}}(z_Q - z_A + q_{31}u_K + q_{32}s_K + q_{33}w_K); \\
\zeta_K &= \frac{x_B-x_A}{l_1}(x_Q - x_A + q_{11}u_K + q_{12}s_K + q_{13}w_K) + \\
&\quad \frac{y_B-y_A}{l_1}(y_Q - y_A + q_{21}u_K + q_{22}s_K + q_{23}w_K) + \frac{z_B-z_A}{l_1}(z_Q - z_A \\
&\quad + q_{31}u_K + q_{32}s_K + q_{33}w_K).
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Подставляя значения [20] в уравнение сферы [11] вместо текущих координат, получим условие касания щупа и сферы, из которых может быть установлена зависимость ψ от φ.

С целью упрощения необходимых при этом вычислений введем следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned}\xi_K &= n_{11}(H_1+L_1)+n_{12}(H_2+L_2)+n_{13}(H_3+L_3);\\ \eta_K &= n_{21}(H_1+L_1)+n_{22}(H_2+L_2)+n_{23}(H_3+L_3);\\ \zeta_K &= n_{31}(H_1+L_1)+n_{32}(H_2+L_2)+n_{33}(H_3+L_3);\end{aligned} \tag{21}$$

где:

$$H_1 = x_Q - x_A + q_{11}u_K;\quad H_2 = y_Q - y_A + q_{21}u_K;\quad H_3 = z_Q - z_A + q_{31}u_K \tag{22}$$

представляют собой величины, не зависящие от ψ.

$$L_1 = q_{12}s_K + q_{13}w_K;\quad L_2 = q_{22}s_K + q_{23}w_K;\quad L_3 = q_{32}s_K + q_{33}w_K; \tag{23}$$

являются величинами, зависящими от ψ.

Подставляя эти значения [22] и [23] в уравнение [11] вместо координат $\xi\eta\zeta$, производя возведение в степень разностей координат, группируя подобные члены, имея ввиду, что

$$n_{11}^2+n_{21}^2+n_{31}^2=1;\quad n_{12}^2+n_{22}^2+n_{32}^2=1;\quad n_{13}^2+n_{23}^2+n_{33}^2=1$$

$$n_{11}n_{12}+n_{21}n_{22}+n_{31}n_{33}=0;\quad n_{11}n_{13}+n_{21}n_{23}+n_{31}n_{33}=0;$$

$$n_{12}n_{13}+n_{22}n_{23}+n_{32}n_{33}=0;$$

$$q_{12}^2+q_{22}^2+q_{32}^2=1;\quad q_{13}^2+q_{23}^2+q_{33}^2=1;$$

$$q_{12}q_{13}+q_{22}q_{23}+q_{32}q_{33}=0,$$

найдем квадратное уравнение:

$$s_K^2+w_K^2+U_1s_K+U_2w_K+R=0, \tag{24}$$

в котором приняты следующие обозначения:

$$U_1 = 2(T_1q_{12}+T_2q_{22}+T_3q_{32});\quad U_2 = 2(T_1q_{13}+T_2q_{23}+T_3q_{33}); \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}T_1 &= H_1 - n_{11}\xi_P - n_{21}\eta_P - n_{31}\zeta_P;\\ T_2 &= H_2 - n_{12}\xi_P - n_{22}\eta_P - n_{32}\zeta_P;\\ T_3 &= H_3 - n_{13}\xi_P - n_{23}\eta_P - n_{33}\zeta_P;\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$R = H_1^2+H_2^2+H_3^2+\xi_P^2+\eta_P^2+\zeta_P^2-2(n_{11}H_1+n_{12}H_2+n_{13}H_3)\xi_P-$$

$$2(n_{21}H_1+n_{22}H_2+n_{23}H_3)\eta_P-2(n_{31}H_1+n_{32}H_2+n_{33}H_3)\zeta_P-r^2. \tag{27}$$

Подставляя в уравнение [24] значения s_K и w_K по равенствам [10] и освобождаясь от радикала, содержащегося в равенстве для определения s_K, приходим к следующему трансцендентному уравнению, ото-

бражающему зависимость угла ψ от φ и постоянных параметров механизма:

$$[d_2^2(1-\sin^2\psi+\sin^4\psi)+l_2^2\sin^2\alpha_2+d_2(U_1\cos\psi+U_2\sin\psi)+R]^2=$$
$$=(U_1\sin\psi-U_2\cos\psi)^2\,[(l_2^2\sin^2\alpha_2-d_2^2(\sin^2\psi-\sin^4\psi)]. \qquad (28)$$

Уравнение [28] представляет собой уравнение 16-ой степени относительно $\sin\psi$, которое следует решать приближенными методами при определенных числовых значениях параметров.

Для определения интервала изменения углов φ и ψ, в которых имеет место замыкание высшей кинематической, пары в точке K, a, следовательно, и осуществление передачи, следует дифференцировать уравнение [28] по φ и приравнять нулю производную $\frac{d\psi}{d\varphi}$.

При этом приходим к следующему уравнению:

$$\left[d_2\left(\frac{dU_1}{d\varphi}\cos\psi+\frac{dU_2}{d\varphi}\sin\psi\right)+\frac{dR}{d\varphi}\right][d_2^2(1-\sin^2\psi+\sin^4\psi)+$$
$$+l_2^2\sin^2\alpha_2+d_2(U_1\cos\psi+U_2\sin\psi)+R]=\left(\frac{dU_1}{d\varphi}\sin\psi- \qquad (29)$$
$$-\frac{dU_2}{d\varphi}\cos\psi\right)(U_1\sin\psi-U_2\cos\psi)\,[l_2^2\sin^2\alpha_2-d_2^2(\sin^2\psi-\sin^4\psi)]$$

где:

$$\frac{dU_1}{d\varphi}=2\left(\frac{dT_1}{d\varphi}q_{12}+\frac{dT_2}{d\varphi}q_{22}+\frac{dT_3}{d\varphi}q_{32}\right);$$

$$\frac{dU_2}{d\varphi}=2\left(\frac{dT_1}{d\varphi}q_{13}+\frac{dT_2}{d\varphi}q_{23}+\frac{dT_3}{d\varphi}q_{33}\right);$$

$$\frac{dR}{d\varphi}=-2\left[\left(\frac{dn_{11}}{d\varphi}H_1+\frac{dn_{12}}{d\varphi}H_2+\frac{dn_{13}}{d\varphi}H_3\right)\xi_P+\left(\frac{dn_{21}}{d\varphi}H_1+\frac{dn_{22}}{d\varphi}H_2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{dn_{23}}{d\varphi}H_3\right)\eta_P+\left(\frac{dn_{31}}{d\varphi}H_1+\frac{dn_{32}}{d\varphi}H_2+\frac{dn_{33}}{d\varphi}H_3\right)\zeta_P\right];$$

$$\frac{dT_1}{d\varphi}=\frac{dH_1}{d\varphi}-\frac{dn_{11}}{d\varphi}\xi_P-\frac{dn_{21}}{d\varphi}\eta_P-\frac{dn_{31}}{d\varphi}\zeta_P;$$

$$\frac{dT_2}{d\varphi}=\frac{dH_2}{d\varphi}-\frac{dn_{12}}{d\varphi}\xi_P-\frac{dn_{22}}{d\varphi}\eta_P-\frac{dn_{32}}{d\varphi}\zeta_P;$$

$$\frac{dT_3}{d\varphi}=\frac{dH_3}{d\varphi}-\frac{dn_{13}}{d\varphi}\xi_P-\frac{dn_{23}}{d\varphi}\eta_P-\frac{dn_{33}}{d\varphi}\zeta_P;$$

$$\frac{dH_1}{d\varphi} = -\frac{dx_A}{d\varphi}; \quad \frac{dH_2}{d\varphi} = -\frac{dy_A}{d\varphi}; \quad \frac{dH_3}{d\varphi} = -\frac{dz_A}{d\varphi}$$

$$\frac{dn_{11}}{d\varphi} = \frac{dx_A}{d_1 d\varphi}; \quad \frac{dn_{12}}{d\varphi} = \frac{dy_A}{d_1 d\varphi}; \quad \frac{dn_{13}}{d\varphi} = \frac{dz_A}{d_1 d\varphi};$$

$$\frac{dn_{21}}{d\varphi} = \mp \frac{\frac{x_A}{d_1^2}\frac{dx_A}{d\varphi} + \frac{(x_B - x_A)}{l_1^2}\left(\frac{dx_B}{d\varphi} - \frac{dx_A}{d\varphi}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x_A^2}{d_1^2} - \frac{(x_B - x_A)^2}{l_1^2}}};$$

$$\frac{dn_{22}}{d\varphi} = \mp \frac{\frac{y_A}{d_1^2}\frac{dy_A}{d\varphi} + \frac{(y_B - y_A)}{l_1^2}\left(\frac{dy_B}{d\varphi} - \frac{dy_A}{d\varphi}\right)}{\sqrt{1 - \frac{y_A^2}{d_1^2} - \frac{(y_B - y_A)^2}{l_1^2}}}$$

$$\frac{dn_{32}}{d\varphi} = \mp \frac{\frac{z_A}{d_1^2}\frac{dz_A}{d\varphi} + \frac{(z_B - z_A)}{l_1^2}\left(\frac{dz_B}{d\varphi} - \frac{dz_A}{d\varphi}\right)}{\sqrt{1 - \frac{z_A^2}{d_1^2} - \frac{(z_B - z_A)^2}{l_1^2}}};$$

$$\frac{dn_{31}}{d\varphi} = \frac{1}{l_1}\left(\frac{dx_B}{d\varphi} - \frac{dx_A}{d\varphi}\right); \quad \frac{dn_{32}}{d\varphi} = \frac{1}{l_1}\left(\frac{dy_B}{d\varphi} - \frac{dy_A}{d\varphi}\right); \quad \frac{dn_{33}}{d\varphi} = \frac{1}{l_1}\left(\frac{dz_B}{d\varphi} - \frac{dz_A}{d\varphi}\right);$$

$$\frac{dx_A}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dy_A}{d\varphi} = -d_1 \sin\varphi; \quad \frac{dz_A}{d\varphi} = d_1 \cos\varphi;$$

$$\frac{dx_B}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dy_B}{d\varphi} = -d_1 \sin\varphi \pm \sqrt{l_1^2 \sin^2\alpha_1 - d_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi} \cdot \cos\varphi + \tag{30}$$

$$\pm \frac{d_1^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi \sin\varphi}{2\sqrt{l_1^2 \sin^2\alpha_1 - d_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}};$$

$$\frac{dz_B}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\frac{dy_B}{d\varphi}\cos\varphi - y_B \sin\varphi + (d_1 - y_B \cos\varphi)\cos\varphi\right].$$

Уравнение [29] также является трансцендентным и его решение целесообразно осуществлять приближенными методами при числовых значениях входящих в него величин. В результате решения его получаем два значения φ' и φ'', которые и определяют экстремальные значения угла φ или крайние положения механизма.

Для определения скорости и ускорения движения ведомого звена 2 функцию $\psi(\varphi)$, определяемую уравнением [28], следует продифференцировать по параметру времени t. При первом дифференцировании получаем уравнение, линейное относительно величины угловой скорости звена 2:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{W_1 W_3 - W_5 W_6}{W_5 W_7 - W_8 - W_1 W_2 - W_1 W_4} \tag{31}$$

где:

$$W_1 = [d_2^2 (1 - \sin^2\psi + \sin^4\psi) + l_2^2 \sin^2\alpha_2 + d_2 (U_1 \cos\psi + U_2 \sin\psi) + R];$$

$$W_2 = d_2^2 (4 \sin^3\psi \cos\psi - 2 \sin\psi \cos\psi);$$

$$W_3 = d_2 \left(\frac{dU_1}{dt} \cos\psi + \frac{dU_2}{dt} \sin\psi \right) + \frac{dR}{dt};$$

$$W_4 = d_2 (U_2 \cos\psi - U_1 \sin\psi);$$

$$W_5 = (U_1 \sin\psi - U_2 \cos\psi) [l_2^2 \sin\alpha_2 - d_2^2 (\sin^2\psi - \sin^4\psi)];$$

$$W_6 = \frac{dU_1}{dt} \sin\psi - \frac{dU_2}{dt} \cos\psi;$$

$$W_7 = U_1 \cos\psi + U_2 \sin\psi;$$

$$W_8 = (U_1 \sin\psi - U_2 \cos\psi)^2 d_2^2 (\sin\psi \cos\psi - 2 \sin^3\psi \cos\psi).$$

Производные по параметру времени t от величины U_1 и U_2, а также и входящих в них величин T_1, T_2, T_3, H и т. д. определяются по равенствам [30] с той разницей, что первые части равенств [30], содержащих производные координат точек A и B в системе $Oxyz$ получают дополнительный множитель $\dot{\varphi}$. Так, например:

$$\frac{dy_A}{dt} = -d_1 \dot{\varphi} \sin\varphi;$$

$$\frac{dy_B}{dt} = \dot{\psi} \left[-d_1 \sin\varphi \pm \left(\sqrt{l_1^2 \sin^2\alpha_1 - d_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi} \cdot \cos\varphi + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{d_1^2 \sin 2\varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \sin\varphi}{2\sqrt{l_1^2 \sin^2\alpha_1 - d_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}} \right) \right].$$

Путем дифференцирования равенства [31] по параметру времени может быть найдено ускорение вращательного движения ведомого звена.

Решение такой задачи не представляет принципиальных трудностей, так как полученное в результате дифференцирования уравнение также является линейным относительно $\frac{d^2\psi}{dt^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пантелеев С. И.* Обзор и исследование структуры пространственных механизмов соприкасающихся рычагов. Тр. МАИ, 1957, вып. 72, стр. 100.

2. *Лебедев П. А.* Определение положений пространственных механизмов, образованных из двухповодковых групп. Труды ИМАШ. Семинар по теории механизмов и машин. вып. 84, 1661 г., стр. 78—102.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

C.Z. : 621—23 : 621.8.02 : 625.2

CONTRIBUTIONS TO THE UNIFYING OF THE GRAPHICAL CALCULATIONS FOR THE RAILWAY TRACTION BY ADOPTING THE UNITARIAN SCALES *)

N. I. MANOLESCU, L. BUDA

§ 1. Introduction

§ 1.1. In technique numerous problems are solved by means of graphical methods. Although the results obtained are up to a certain limit acceptable from the point of view of the errors due to the measuring of the segments which give the solution, to-day, especially in the domain of mechanism and machines the graphical method has to be completed and even replaced, in certain cases by the analytical method of calculation.

But in railway traction, the graphical methods, of determining the rolling speeds, the necessary times to cover a section of the line with a very varied profile, makes almost impossible the employment of the analytical method. This would obviously need too many equations function of the profile of the respective railway, which constitues as many discontinuities in the solving of the unknown quantities in the analytical method. One was achieved by the "pattern method" [1] a simplification and a systematizing, which in fact has a limited use for the curves $v\ (s)$, $t\ (s)$.

It represents a step forward in the graphical calculations.

The use of electronic machines in calculations will obviously substantially facilitate the work also for the solution of the problems of railway traction.

Our opinion is that the graphical calculations of traction will remain a substantial aid in the drawing up of anteproect and comparative studies.

The graphical calculations lie at the bases of fundamental elements in railway traction dealt with intuitively.

There is hardlyany fact connected to a diagram, a curve of variation at is development funcion of one or several fundamental parameters.

Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—30 mai 1966.

No matter how intricated and voluminous will be the analytical calculations performed with the aid of the most modern electronic computers, the synthesis of the results is nevertheless graphically represented, thus serving for the conclusions.

Similar problems of railway traction are at present calculated and representend also graphically.

Therefore in what follows we have tried to systematise in a unitarian method the graphical calculations of the railway traction adopting unitarian scales.

In the papers [2] and [3] and especially in paper [4] were shown the methodes of putting down and of using scales in graphical calculations, employing the notion adopted also by the Soviet papers of the theory of mechanism and machines but modified in conformity with the suggestions of papers [2], [3] and[5].

These papers and especially paper [3] have started discussions regarding the use of the scales in graphical calculations and the results in paper [6]. The department of „Notions for the technique of mechanism" („Begriffe der Getriebetechnik") from D.D.R. has subjected to a public poll the suggestion of adopting an unitarian method of employment of the scales in the graphical calculations.

In the present paper one will adopt the graphical calculations of traction for the employment of the scales in conformity with the suggestions made in the papers [2] ..... [2] and also adopted in paper [7].

§. 1.2. *The fundamental scales.*

We are reminding that in what follows one will employ the subsequent fundamental scales, from which results by graphical calculations the other scales denominated by us „derivatives".

a) *The scale of lengths (of the space)*

$k_s \left[\frac{1\ \text{m}}{s\ \text{mm}}\right]$ defined as the ratio between the unit of measure, in fact (1 m) and the number e of milimetres, wich is represented in the drawing.

b) *The scale of time*

$k_t \left[\frac{1\ s}{t\ \text{mm}}\right]$ defined also as the ratio between the unit o measure in fact (1 second) and the number t of milimetres wich is represented in the drawing.

c) *The scale of speeds*

$k_v \left[\frac{1\ \text{ms}^{-1}}{v\ \text{mm}}\right]$ with the same definition.

d) *The scale of powers*

$k_f \left[\frac{1 \text{ kg f}}{\text{f mm}}\right]$ with the same definition.

It is obvious that a scale can become the „derivative" of two fundamental scales, if it must transpose in fact the resulted dimension in mm in the drawing by the respective graphical calculation.

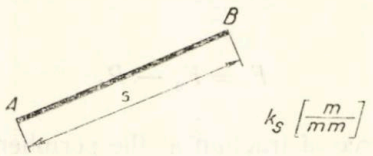


Fig. 1 — The relation between the dimension $\langle s \rangle$ in mm from the drawing and the dimension s in m in fact $s = k_s \langle s \rangle$

If, for instance, a regment of the length (s) in mm, results in the drawing from the calculations, them its dimensions will actually be (fig. 1):

$$s = k_s (AB) \text{ m} \tag{1}$$

or

$$s = k_s \cdot (s) \text{ m} \tag{2}$$

In paper [6] one suggests that the segment measured on the drawing in mm should not be boxed in round brackets but in sharp brackets "$\langle\ \rangle$".

Thus, in the case of fig. 1 the relations (1) and (2) would become:

$$s = k_s \langle AB \rangle \text{ m} \tag{1'}$$

respectively

$$s = k_s \langle s \rangle \tag{2}$$

Considering that this suggestion has the advantage of clearing up confusions that might be created when a dimension from the drawing would be a common factor of a product of wich one of them would be a boxed sum therefore also in round brackets. We shall accordingly adopt the suggestion (1'), (2') further on.

§ 2. The employment of the equation of motion of trains for the graphical solution of the problems of traction.

§ 2.1. *The expression in current use of the equation of the motion of trains.*

One knows that the form the equation of the motion of trains is

$$F = m\,a \tag{3}$$

in which :

F (kgf) = the resultant of the external forces which act on the trains (inclusively the engine) ;

m (kgfm^{-1} s^2) = the mass of the train (inclusively the engine) ;

a (ms^{-2}) = the acceleration of the train.

The equation (3) is not actually employed in this form, but in another corresponding to the units of measure in current use in this domain of activity.

Thus :

$$F = F_0 - R_t$$

in which :

F_0 (kgf) = the force of traction at the periphery of the driving wheels of the engine ;

R_t (kgf) = the total resistance to the advancement of the train.

The mass of the train has the expression :

$$m = \frac{1}{g} (G_L + G_v) (1 + \gamma) \tag{5}$$

in which :

G_L (kgf) = the weight of the engine ;

G_V (kgf) = the weight of the file of vehicles ;

$\gamma = \frac{I_r}{mR^2}$ = coefficient which considers also the masses in rotation (7), where :

I_r = the moment of inertia of the equipped axles of the whole train in comparison with rotation axle of each wheel.

R = the radius gyration of the wheels (supposed the same at the whole train).

For the formula in current use, the mass m from (5) is expressed in [kgf km^{-1} h^2] and G_L and G_V in tons.

In this case (5) becomes :

$$m = \frac{1000}{9{,}81 \cdot \frac{3600^2}{1000}} (G_L + G_V) (1 + \gamma) = \frac{1 + \gamma}{127} (G_L + G_V)$$

or :

$$m = \frac{1}{g_t} (G_L + G_V) \text{ [kgf km}^{-1} \text{ h}^2\text{]} \tag{6}$$

in which were put down

$$g_t = \frac{127}{1 + \gamma} \text{ [kmh}^{-2} \cdot t \cdot \text{kgf}^{-1}\text{]} \tag{7}$$

the acceleration of gravity expressed in units of measure in current use, employed in railway traction [kmh^{-2}] and reported to 1 kgf/1 ton of file of vehicles.

With the units of measure employed in (6), the trains acceleration will be obviously measured in kmh^{-2}.

$$a = \frac{dv}{dt} \ [kmh^{-2}]. \tag{8}$$

Replacing (4), (6) and (8) in (3), the equation of movement of the train becomes :

$$F_0 - R_t = \frac{1}{g_t} (G_L + G_V) \frac{dv}{dt} \tag{9}$$

If one puts down :

$$\frac{F_0}{G_L + G_V} = f_0 (v) \ [kgft^{-1}] \tag{10}$$

$$\frac{R_t}{G_L + G_V} = r_t (v) \ [kgft^{-1}] \tag{11}$$

the (9) gets the form in common use in the railway traction :

$$\frac{dv}{dt} = g_t (f_0 - r_t). \tag{12}$$

The equation (12) allows, as one knows, the solution of the following fundamental problems :

a) $t = f_1 (v)$ for a certain interval

$$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{g_t} \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{dv}{f_0 - r_t} \tag{13}$$

b) $s = f_2 (v)$ for the same interval as above :

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{g_t} \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{v dv}{f_0 - r_t} \tag{14}$$

c) $t = f_3 (s)$ for the interval from above :

$$t_{n+1} - t_n = \int_{v_n}^{v_{n+1}} \frac{ds}{v} \tag{15}$$

Should there be a possibility of finding the analytical expressions of f_0 and r_t from (10) and (11) then with the specification from § 1.2 the graphical calculations could be replaced successfully by the analytical ones.

As both f_0 (the specific force of traction) and r_t (the specific resistance to the advancement) of the train are function of both its speed v and of other parameters, it is practically impossible to establish an analytical expression that might permit eigther its integration or its derivation.

In consequence the graphical calculation and implicitly the adopting of a unitarian method of employment of the scales is imposed as an objective necessity.

§ 2.2. *The establishing of the relations among scales in the graphical calculations of the ronning speeds by the Lipetz method.*

The problem that the Lipetz method solves [8] is the construction of the curve :

$$v = v\ (s) \tag{16}$$

if one knows :

$$f_0 - r_t = (f_0 - r_t)\,(v)\,. \tag{17}$$

The fonction given by (17) is a curve known for each kind of traction (steam, Diesel or electric).

The form of this curve is given in fig. 2a.

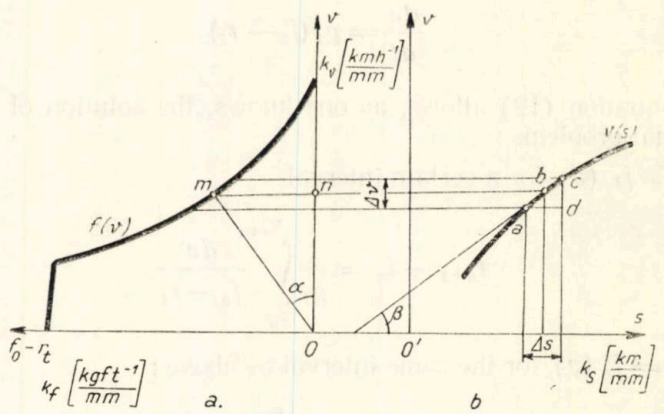


Fig. 2. — The establishment of the relation between scales to determine of the ruming speed, by Lepitz's method.

The problem that one puts is the determining of the analytical expression of the scale k_s of the axle of the abscissae on which one shall measure the abscissae in the diagram $v\ (s)$ from fig. 2b.

The equation (12) can also be written :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{vdv}{ds} = g_t\,(f_0 - r_t)$$

out of which :

$$\frac{dv}{ds} = g_t \frac{f_0 - r_t}{v} . \tag{18}$$

From figure 2 a one can see that for a certain point (m) on the curve one has :

$$f_0 - r_t = k_f \langle mn \rangle$$

$$v = k_v \langle on \rangle$$

By replacing in (18) it results :

$$\frac{dv}{ds} = g_t \frac{k_f}{k_v} \frac{\langle mn \rangle}{\langle on \rangle} = g_t \frac{k_f}{k_v} \operatorname{tg} \alpha . \tag{19}$$

Giving the curve $v = v\,(s)$ from fig. 2b, the expression of the tangent in the point b of this curve, which corresponds to the point m of the curve $(f_0 - r_t)$ from fig. 2a is :

$$\frac{dv}{ds} = \frac{k_v\, d \langle v \rangle}{k_s\, d \langle s \rangle} = \frac{k_v}{k_s} \operatorname{tg} \beta . \tag{20}$$

The scale k_s results from the equalization of the relations (19) and (20) :

$$k_s = \frac{1}{g_t} \frac{k_v^2}{k_f} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} . \tag{21}$$

To ease the construction of the curve $v = v\,(s)$ one chooses as one knows

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha . \tag{22}$$

In which case (21) becomes :

$$k_s = \frac{1}{g_t} \frac{k_v^2}{k_f} . \tag{23}$$

The relation (23) determines thus the size of the "derivative" scale function of g_t ; k_v and k_f.

The method which enabled us to find the analytical expression of the scale k_s (23) shows in fact also the development of the construction of the curve $v = v\,(s)$ when one knows the curve : $f_0 - r_t = (f_0 - r_t)(v)$. This method called "the Lipetz method" is reproduced in fig. 3 and makes the following approximations :

In fig. 2a for a small interval of speed Δv — the function $(f_0 - r_t)$ is considered constant and equal to a medium value :

$$(f_0 - r_t)_{med} = k_f \langle mn \rangle .$$

In fig. 2b one replaces the tangent in a point b to the curve $v\ (s)$ by the chord ac determined by the interval corresponding to Δv, in this case:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\langle cd \rangle}{\langle ad \rangle}$$

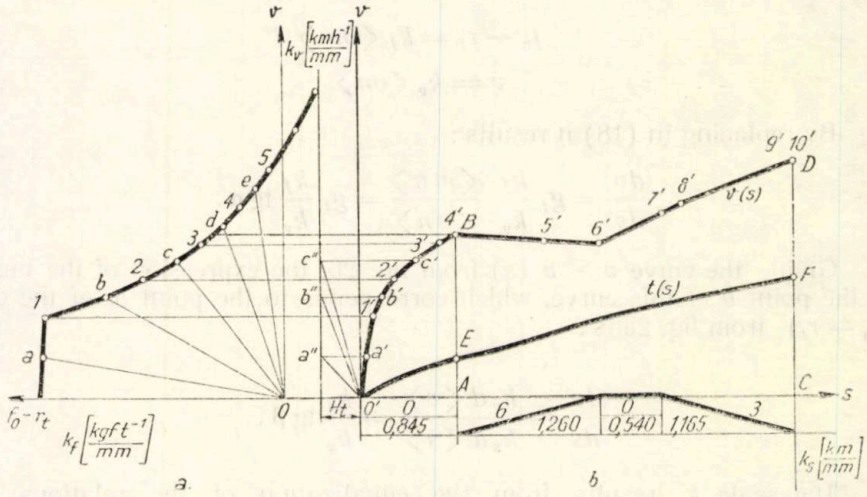


Fig. 3. — The determination of speeds and running time by Lipetz-Lebedev's method.

In fig. 3a one has first constructed the curve $(f_0 - r_t)\ (v)$ for the scales:

$$k_v = \frac{1}{1}\left[\frac{\text{kmh}^{-1}}{\text{mm}}\right]$$

$$k_f = \frac{1}{4}\left[\frac{\text{kgf t}^{-1}}{\text{mm}}\right]$$

The acceleration of gravity corresponding to a determined file of vehicles (function of I_r and R of the vehicles) is admitted in calculations:

$$g_t = 120\ \text{km h}^{-2}.$$

With this value, the scale k_s of the absissae (on which one measures the distance) it results from (22) and (23):

$$k_s = \frac{1}{g_t}\,\frac{k_v^2}{k_f} = \frac{1}{120}\ [\text{km}^{-1}\,\text{h}^2\,\text{kgf t}^{-1}]\ \frac{\frac{1^2}{1^2}\left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right]^2}{\frac{1}{4}\left[\frac{\text{kgf t}^{-1}}{\text{mm}}\right]} = \frac{1}{30}\left[\frac{\text{km}}{\text{mm}}\right]$$

Reminding the Lipetz construction, one specifies that the intervals $\triangle v = 10 \ldots\ldots 15$ kmh^{-1} are so that its variation $(f_0 - r_t)$ in the chosen interval may be considered linear and one can admit in this case there is an arithmetical mean value :

$$v_{med} = \frac{v_b + v_c}{2}$$

The angles $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ from fig. 3a are those which the pencil of straight lines $0a$, $0b$ ..... $0e$ makes with the axle $0v$.

And as $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$ it results that the straight lines :

$0'1'$; $1'2'$; .... which make the angles $\beta_1, \beta_2 \ldots\ldots$ with the axle s are perpendicular to $0a$, $0b$.

That is to say :

$$0'1' \perp 0a$$
$$1'2' \perp 0b$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

With the aid of the scales one can find the speed v of the train on any symplified fragment of profile.

Thus, at the end of the first fragment (fig. 3b) when it enters the gradient of 6‰ the speed of the train is :

$$v_B = k_v \langle AB \rangle = \frac{1}{1}\left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right] \cdot 42\ [\text{mm}] = 42\ [\text{km h}^{-1}].$$

At the end of the slope of 3‰ the speed of the train is :

$$v = k_v \langle CD \rangle = \frac{1}{1} \cdot 61 = 61\ [\text{km h}^{-1}].$$

§ 2.3. *The determination of the relations betwees scales for the graphical calculations of the running times by Lebedev's method.*

The curve $t = t\,(s)$ will be drawn on the same diagram with $v = v\,(s)$. the scale k_s of the abscissae being given by (23) and the scale k_t of the ordinate has to be determined.

The two curves represented in fig. 4 are supposed to be given.

One takes a point M on the curve $V\,(s)$ and its correspondent M' on the curve $t\,(s)$ which has the same abscissa

$$s = k_s \langle Om \rangle .$$

One draws the tangent Δ' in M' to the curve $t\,(s)$ which makes the angle γ with the axle Ot.

From O one draws $O\Delta \perp \Delta'$ which intersects the parallel drawn from M to Os in the point A.

The perpendicular drawn from A to Os intersects it in the point O_t, the pole of the construction of the curve $t\ (s)$ when $v\ (s)$ is given.

On the polar distance is

$$\langle OO_t \rangle = \langle H_t \rangle \text{ [mm]}.$$

The dimension of the scale of the time k_t depend on the polar distance.

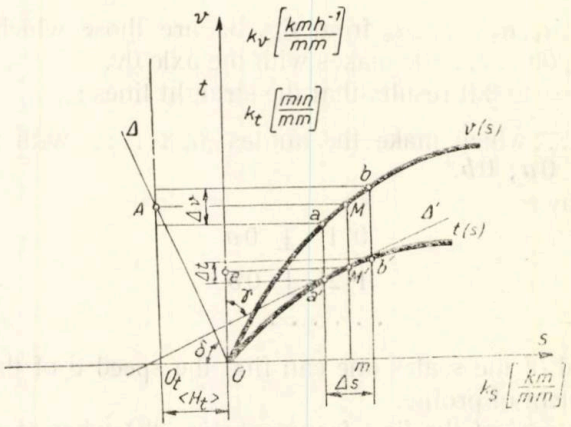


Fig. 4 — The etablishment of the relation between scales to determine the running time, by Lebedev's method.

In fact:

the dimension of the tangent to the curve $t\ (s)$ in the point M' is:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{k_t}{k_s} \operatorname{cotg} \gamma$$

and its reverse

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{k_s}{k_t} \operatorname{tg} \gamma. \tag{24}$$

But on the curve $v\ (s)$ the ordinate of the point M is;

$$v = k_v \langle M m \rangle = k_v \langle A O_t \rangle = k_v \langle H_t \rangle \operatorname{tg} \delta. \tag{25}$$

It results from (24) and (25)

$$k_t = \frac{k_s}{\langle H_t \rangle k_v} \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \delta}. \tag{26}$$

But it results in conformity with the construction $(\Delta' \perp O\Delta)$

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \delta \tag{27}$$

and therefore (26) becomes:

$$k_t = \frac{k_s}{\langle H_t \rangle k_v} \left[\frac{\text{h}}{\text{mm}}\right] \tag{28}$$

The formule (28) fram above represents the relation we were looking for.

It obviously imposes also the method of construction of the curve $t\ (s)$ when one knows $v\ (s)$, or the reverse.

For the first case the construction must begin absolutely from the origin, for the second this condition is not necessary.

In case the unit of measure actually chosen is the minute the :

$$k_t = 60\ \frac{k_s}{\langle H_t \rangle\ k_v}\ \left[\frac{\text{min}}{\text{mm}}\right]. \tag{28'}$$

For the example of fig. 3 scale k_t it results :

$$k_t = 60\ \frac{\frac{1}{30}\left[\frac{\text{km}}{\text{mm}}\right]}{10\,[\text{mm}] \cdot \frac{1}{1}\left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right]} = 60 \cdot \frac{1}{300}\left[\frac{\text{min}}{\text{mm}}\right]$$

$$k_t = \frac{1}{5}\left[\frac{\text{min}}{\text{mm}}\right].$$

From the curve $t = t\ (s)$ it results that the fragment of track, after (moving off) the starting is covered in the time :

$$t_{OA} = k_t \langle AE \rangle = \frac{1}{5} \cdot 9 = 2 \text{ minutes},$$

and those four fragments from the figure are covered in :

$$t_{OC} = k_t \langle CF \rangle = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6 \text{ minutes}.$$

§ 2.4. *The determination of the relations between scales for the graphical calculation of the consumption of fuel in Diesel engines.*

From this as one knows result the curves :

$$v = v\ (s) \tag{16}$$

and

$$G = G\ (v) \tag{29}$$

the last representing consumption per hour of fuel in $[\text{gkfh}^{-1}]$ function of speed and it is required to determine through graphical methods — the consumption of fuel funciton of the distance journey (s), that is to say :

$$c = c\ (s)\ [\text{kgf}] \tag{30}$$

The scale $k_c \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}}\right]$ is the "derivative" scale which has to be determined function of the three scales : k_v, k_s and k_G.

All the above courves are supposed to be known the determination k_c of the curve (30) is required (fig. 5).

Corresponding to a point M on the curve $v\ (s)$ it results: The point M' on the curve $C\ (s)$ which by the ordinate $\langle M'm \rangle$ determines the fuel consumption on the scale k_c:

$$C_M = k_c \langle M'm \rangle \text{ kgf}$$

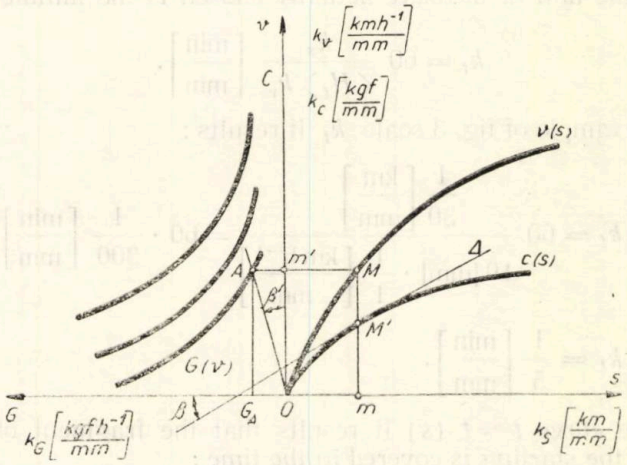


Fig. 5 — The establishment of the relation between scales for the determination of the consumption of fuel for Diesel engines

and the point A, on the curve $G\ (v)$ which indicates by the abscissa $\langle OG_A \rangle$ the consumption per hour of fuel on the scale k_G:

$$G_A = k_G \langle OG_A \rangle \text{ [kgf h}^{-1}\text{]}.$$

But:

$$\frac{dc}{dt} = G \tag{31}$$

represents the consumption of fuel G in the unit of time (in the actual case the consumption per hour).

Corresponding to the point M on the curve $v\ (s)$:

$$\frac{ds}{dt} = v = k_v \langle Mm \rangle \tag{32}$$

results from (31) and 32)

$$\frac{dc}{ds} = \frac{G}{v}. \tag{33}$$

The expression of the differential point M' on the curve $c\ (s)$ is:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{k_c}{k_s} \operatorname{tg} \beta \tag{a}$$

and from the curves $G\ (v)$ *and* $v\ (s)$:

$$\frac{G}{V} = \frac{k_G \langle OG_A \rangle}{k_v \langle O\,m' \rangle} = \frac{k_G}{k_v} \operatorname{tg} \beta' . \tag{b}$$

From the comparison between (a) and (b) results the scale :

$$k_c = \frac{k_s \cdot k_G}{k_v} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} \tag{34}$$

Taking :

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta' \tag{35}$$

the scale k_c which serves to the construction of the curve $c\ (s)$ is :

$$k_c = \frac{k_s k_G}{k_v} \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}} \right]. \tag{36}$$

The construction of the curve $c = c\ (s)$ should start nevertheless from the origin ; if the curves $v\ (s)$ and $c\ (s)$ are given, the hourly consumption can be determined for any point on one of these curves, by the construction of the point A and by finding at the same time the corresponding scale k_G (which results from 36) :

$$k_G = \frac{k_v k_c}{k_s} \left[\frac{\text{kgf h}^{-1}}{\text{mm}} \right]. \tag{37}$$

In consequence if the curve $v\ (s)$ and $c\ (s)$ can be obtained experimentally with the aid of the scale given by (37), one can determine G corresponding to the point A.

§ 25. *The determination of the relation between the scales employed for the graphical calculation of the consumption of energy (kWh) in the electric traction.*

The relation is, as one may see, ressembling to (36).

In the construction of the curve $E\ (s)$ in the scale k_E only the position of the curve $I\ (v)$ differ compared to $v\ (s)$.

The elements required for solving the problem are reproduced in fig. 6.

From the curve $I\ (v)$ reproduced in fig. 6a one can write :

$$\frac{I}{v} = \frac{k_I \langle Nn \rangle}{k_v \langle O'n \rangle} = \frac{k_I}{k_v} \operatorname{tg} \beta . \tag{38}$$

The expression of the differential in the point M' to the curve $E\ (s)$ can be written :

$$\frac{dE}{ds} = \frac{k_E}{k_s} \operatorname{tg} \beta . \tag{39}$$

But as

$$ds = vdt$$

and

$$\frac{dE}{dt} = UI$$

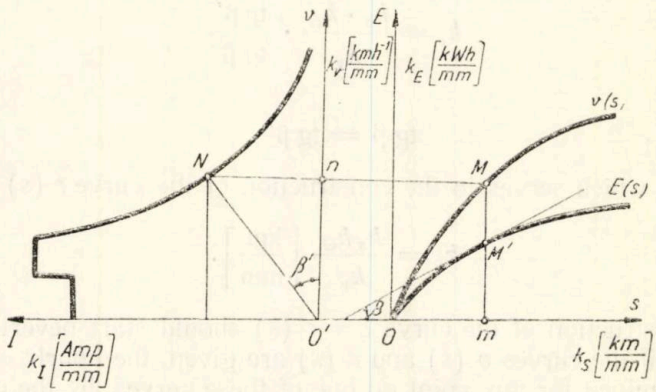


Fig. 6 — The etablishment of the relation between scales to determine the consumption of energy for electric engines.

in which U is the tension of the line in the point of contact with the pantograph of the engine ; the relation (39) becomes :

$$\frac{I}{v} = \frac{k_E}{Uk_s} \operatorname{tg} \beta . \tag{40}$$

From (38) and (40) it results :

$$k_E = U \frac{k_s k_I}{k_v} \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta} \tag{41}$$

taking as for the other cases :

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta' \tag{42}$$

one obtains the scale k_E on which one measures the electrical energy consumed by the engine after covering the distance $\langle Om \rangle$:

$$k_E = U \frac{k_s k_I}{k_v} . \tag{43}$$

The same remarks as for § 2.4 concerning the graphical constructions.

§ 2.6. *The determination of the scale in the graphical calculation of the acceleration of the train with the aid of the diagram* v (s).

One knows that in the diagram v (s) the subnormal $\langle mn \rangle$ to the curve in a certain point M is proportional to the tangential acceleration of the train (fig. 7).

It results in fact from the figure :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\langle dv \rangle}{\langle ds \rangle} = \frac{k_s}{k_v}\,\frac{dv}{ds} = \frac{k_s}{k_v}\,\frac{a^t}{v}$$

and from the triangle *Mmn* :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\langle m\,n \rangle}{\langle M\,m \rangle} = \frac{k_v}{v}\,\langle m\,n \rangle .$$

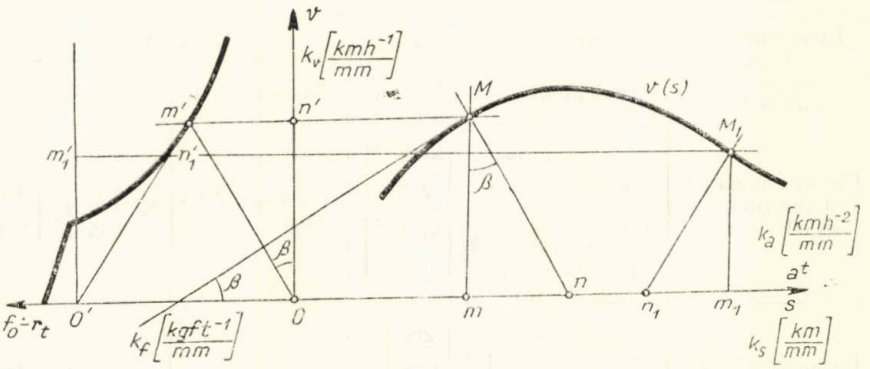


Fig. 7 — The determination of the scale for the graphical calculation of the acceleration of the train with the aid of the diagram v (s)

From the above relations can be obtained :

$$a^t = \frac{k_v^2}{k_s}\,\langle m\,n \rangle . \tag{44}$$

The scale of the accelerations is immediately deduced employing the expresion of k_s from (23) :

$$k_a = \frac{k_v^2}{k_s} = \frac{k_v^2}{\frac{1}{g_t}\,\frac{k_v^2}{k_f}} = g_t\,k_f \left[\frac{\mathrm{km\,h^{-2}}}{\mathrm{mm}}\right] \tag{45}$$

One sees immediately the acceleration of the train from the very construction of the diagram v (s). Any construction has to be verified by the following equality :

$$k_a \langle m\,n \rangle = g_t (f_0 - r_t) = g_t\,k_f \langle m'\,n' \rangle$$

from the diagram of the specific forces (in case that

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta) .$$

§ 3. Conclusions and suggestions.

In table 1 are centralized the formulae of the derivative scales determined in §§ 2.2 . . . . . 2.5.

Their employent in the calculations of traction in this form permits from the very beginning the choice of the dimension of the derivative scale so that the graphical constructions and calculations should be bordered to the dimension of the paper.

Table 1

The scales employed in the graphical calculations of the railway traction.

Number	Denomination of the graphical construction	Independant scales		Derivate scales	
		Denomination	Formula	Denomination	Formula
1	The determination of the running speeds	The scale of the speeds The scale of the specific forces of acceleration	$k_v \left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right]$ $k_f \left[\frac{\text{kg ft}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	The scale of the space	$k_s = \frac{1}{g_t} k_v^2 \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}}\right]$
2	The determination of the running times	The scale of the space The scale of the speeds	$k_s \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}}\right]$ $k_v \left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	The scale of the time	$k_t = 60 \frac{k_s}{\langle H_t \rangle k_v} \left[\frac{\text{min}}{\text{mm}}\right]$
3	The determination of fuel consumption in Dieselengines	The scale of the space The scale of the speeds	$k_s \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}}\right]$ $k_v \left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	The scale of the total consumption of fuel	$k_c = \frac{k_s \cdot k_G}{k_v} \left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}}\right]$
4	The determination of consumption of energy in electric engines	The scale of the space The scale of the electric current The scale of the speeds	$k_s \left[\frac{\text{km}}{\text{mm}}\right]$ $k_I \left[\frac{\text{A}}{\text{mm}}\right]$ $k_v \left[\frac{\text{km h}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	The scale of the electrical energy consumption	$k_E = U \frac{k_I \cdot k_s}{k_v} \left[\frac{\text{kwh}}{\text{mm}}\right]$
5	The determination of the acceleration of the train	The scale of the specific forces of acceleration	$k_f \left[\frac{\text{kg ft}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	The scale of the acceleration of the train	$k_a = g_t k_f \left[\frac{\text{km h}^{-2}}{\text{mm}}\right]$

The graphical methods of construction of the curves $v\ (s)$; $t\ (s)$; $c\ (s)$; $E\ (s)$ being known [7] one has not insisted about them.

The suggestion made by Volmer's group in paper [6] concerning the notation of the scale (M) as the ratio between the size in the drawing and the real one will be analysed in a different paper.

The suggestion of this group comes to consider as scale just the reverse of the one adopted in this paper, that is to say :

$$M = \frac{1}{k_s}$$
$$M_v = \frac{1}{k_v} \tag{44}$$

where M (Masstab) represents the ratio with which one must multiply the real size to be trasposed in the drawing.

Thus from fig. 1 the relations (1') and (2') would become :

$$s = \frac{\langle AB \rangle}{M} \text{ [m]} \tag{1''}$$

respectively

$$\langle s \rangle = \langle AB \rangle = M \cdot s \text{ [mm]}. \tag{2''}$$

The employement of scales of the form k_s, k_v etc in the graphical calculations of the theory of the mechanisms has been generalized in all the treatises, textbooks and universitary textbooks which have been published for the last 10 years so that the extension of their employment in all technical domains has to be done after the critical analysis of this paper and of paper [6].

Chair of Theory of Mechanisms
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *Popa Alexandru.* Determinarea vitezelor și timpilor de mers al trenurilor prin metoda nomogramelor. Bulet. Inst. polit. „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, nr. 1/1965, pag. 135 ... 146).
2. *Manolescu I. N.* Asupra necesității standardizării notațiilor și utilizării scărilor în calculele grafice. Standardizarea nr. 10/1959, pag. 586 ... 596.
3. *Manolescu I. N.* O metodă unitară de notare și utilizare a scărilor în calculele grafice. Bulet. Inst. polit. București. Tom. XXII ,Fasc. 4/1960, pag. 63 ... 83.
4. *Kojevnikov S. N.* Teoria mehanizmov i maşîn. Maşghiz, Kiev 1954, pag. 68 ... 69.
5. *Manafu Valeriu.* Asupra necesității standardizării denumirilor și notațiilor din teoria mecanismelor și a mașinilor. Standardizarea nr. 6/1959, pag. 275 ... 286.
6. *Volmer J., Hammerschmidt Cr.* Masstäbe bei Zeichnerischen Verfahren. Maschinenbautechnik Heft 8/65 S. 397 ... 401.
7. *Dizioglu* B. Getriebelehre Band. I. Grundlagen Fried. Vieweg. & Sohn Braunschweig, Seiten 60 ... 63.
8. *Popa Al., Chimu N., Neagu Al.* Tracțiunea trenurilor. Editura did. și pedagogică 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

ORGANE DE MAȘINI

C.Z. : 531.4 : 536.5 : 621.89 : 621—2 : 539.3

ASUPRA DISTRIBUȚIEI STATISTICE A TEMPERATURII PE SUPRAFEȚELE CORPURILOR ÎN FRECARE FĂRĂ UNGERE

M. R. MUSTAFA

Dintre fenomenele superficiale care apar la contactul a două piese între care există o mișcare relativă, temperatura joacă un rol important în definirea procesului de frecare și uzură între corpurile respective. Determinarea acestei temperaturi reprezintă una dintre problemele de bază ale procesului amintit. Studiile făcute pînă în prezent în această privință au considerat suprafețele în contact perfect netede și sursa de căldură, datorită frecării, distribuită continuu, temperatura determinată în acest fel va reprezenta temperatura medie a suprafețelor în contact.

În realitate însă, datorită micro- și macroneregularităților, contactul real este discret, ceea ce are ca urmare o distribuție discontinuă a surselor de căldură și deci implicit și a temperaturii. Datorită înălțimilor inegale ale asperităților, ele vor fi încărcate diferit și ca urmare sursele de căldură în diversele părți ale suprafeței în contact vor fi diferite, temperatura părților respective marcînd o anumită abatere față de cazul suprafețelor perfect netede.

Determinarea acestei abateri prezintă o importanță practică deosebită în sensul că ea poate să explice o serie de fenomene fizico-mecanice care se produc în straturile superficiale și care nu au fost suficient de bine lămurite pînă în prezent.

Fig. 1 reprezintă contactul real între două corpuri ținînd cont de asperități ; prin linie plină s-a reprezentat contactul în stare neîncărcată, iar prin linie punctată contactul în stare încărcată. Datorită repartizării inegale a asperităților pe înălțimi, deformațiile și deci sarcinile ce revin asperităților vor fi inegale și prin urmare și temperaturile pe suprafețele respective vor fi inegale.

Considerînd piesele în mișcare relativă, aspectul contactului dintre asperități va fi într-o continuă schimbare, în sensul că asperitatea cea mai deformată, în fracțiunea de timp următoare, va veni în contact cu o asperitate mai puțin pronunțată, deci va fi mai puțin deformată decît anterior.

Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

Contactul asperităților va avea un caracter aleatoriu imprimînd același caracter și temperaturilor superficiale.

Aspectul real al apariției temperaturilor superficiale, poate fi definit, de i, ca un proces statistic și determinarea lor se poate face pe baza statisticii matematice.

Deoarece în prezent determinarea pe calea experimentală a procesului de apariție și dispariție locală a temperaturilor pe suprafețe extrem de mici

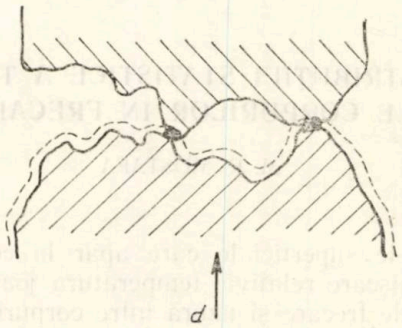


Fig. 1

ale asperităților, este foarte greu de imaginat calculul acestei temperaturi se va face ținînd cont de caracterul contactului dintre asperități, pentru care există date experimentale.

Pentru a întregi imaginea contactului real între două piese, trebuie amintit faptul că structura stratului superficial se deosebește calitativ de structura volumică a piesei respective, atît prin schimbările fizico-chimice care se petrec în acest strat și datorită existenței unei pelicule formate din particule străine adsorbite pe stratul superficial. Acest strat puternic ancorat de suprafața respectivă, format din acizi grași, apă, gaze și oxizi, nu poate fi distrus decît prin mijloace speciale. Existența acestui strat schimbă proprietățile mecanice ale stratului superficial, în special *duritatea*, neinfluințînd însă fenomene pe care le studiem, deoarece grosimea acestor straturi este mică în comparație cu înălțimea asperităților. După datele existente în prezent [4] grosimea stratului de acid gras, în cazul suprafețelor neunse sau cu ungere săracă, este de ordinul a 50—100 straturi moleculare (1 strat molecular = 20—40 A^0 = (20—40) 10^{-4} mc = = 0,1—0,4 mc) iar cel de oxizi de 10—20 straturi moleculare față de înălțimile maxime a asperităților care, pentru prelucrări obișnuite, sînt între 5—35 mc.

1. *Studiul contactului dintre asperități*

In prezent există suficiente date [2] pentru ca distribuția asperităților pe înălțimi să se considere după o curbă normală de distribuție.

In acest scop, dacă se trasează microprofilograma unei suprafețe pentru o anumită bază (fig. 2 a), se poate construi curba suprafețelor de rea-

zem (fig. 2 b), care nu reprezintă altceva decît suprafața efectivă de contact, la anumită deformație a asperităților.

Trecîndu-se la frecvențele de distribuție a contactelor dintre asperități se găsește legea de distribuție probabilistică discontinuă (fig. 2 c), care se poate asimila cu o lege de distribuție continuă Gaus-Laplace (fig. 2 d).

Se notează cu h_1, $h_2 \ldots h_3$ înălțimile asperităților în stare neîncărcată, cu u_{0h} abaterea față de mediana profilului în stare neîncărcată, cu u_h ace-

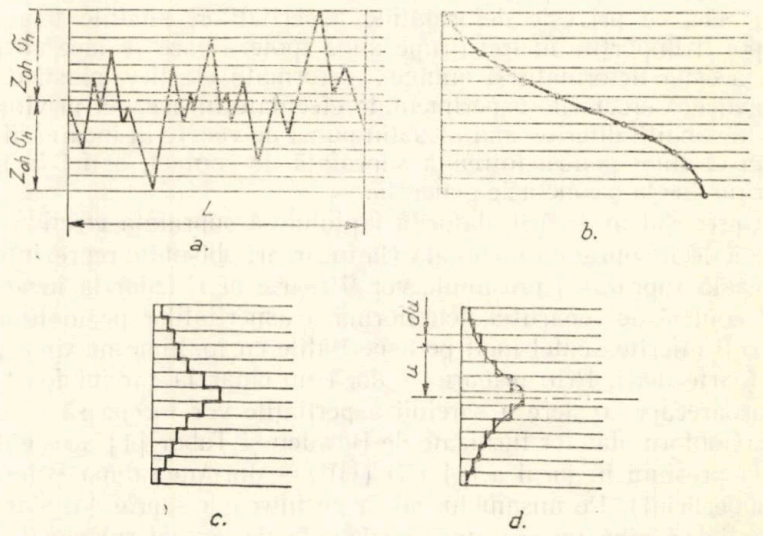


Fig. 2

cași abatere în stare încărcată. Conform celor expuse mai sus, distribuția abaterilor poate fi scrisă sub forma unei curbe continue

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u_h^2}{2\sigma_h^2}} \qquad (1)$$

unde σ_h — reprezintă abaterea medie patratică.

În acest caz cota medianei profilului va coincide cu media aritmetică a înălțimilor $h_m = \frac{\Sigma u_i h_i}{u_i}$, iar abaterea va fi $u_h = h_i - h_m$. (Dacă se urmărește abaterea asperității maxime, atunci în loc de h_i se va trece h_{max}).

În prezent, pentru diverse prelucrări de diverse clase de precizie, se poate considera cunoscută valoarea raportului $\frac{u_{0h}}{\sigma_h} = z_{0h}$. Dacă printr-o metodă oarecare se determină și valoarea lui $z_h = \frac{u_h}{\sigma_h}$ atunci se poate

determina abaterea asperităților unei suprafețe în poziția încărcată (u).

Ecuația (1) se poate scrie deci sub forma

$$f(z) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_h^2}{2}} \tag{2}$$

unde din punct de vedere matematic z_h reprezintă norma mărimii aleatoare u_h și $f(z)$ reprezintă distribuția normată a acestei mărimi.

În ceea ce privește deformațiile asperităților, studiile teoretice efectuate pot fi împărțite în trei grupe după ipoteza care se face cu privire la natura acestor deformații și anume: deformații elastice, plastice sau elastico-plastice. Cercetările experimentale efectuate în această privință au fost făcute în condiții diferite, mai ales din punct de vedere al încărcării; în plus ele s-au efectuat pentru întreaga suprafață de contact, astfel încît rezultatele lor nu duc la o concluzie generală.

În procesul încărcării, datorită faptului că suprafața efectivă este mult mai mică decît suprafața nominală (la încărcări obișnuite reprezintă 5—10% din această suprafață) presiunile vor fi foarte mari chiar la încărcări mici. Ținînd cont și de repartiția neuniformă a asperităților pe înălțimi, presiunile vor fi diferite, astfel încît pe asperitățile cu înălțime maximă presiunile vor fi foarte mari. Prin urmare — dacă nu chiar la sarcini foarte mici — după o oarecare creștere a sarcinii asperitățile vor începe să se deformeze plastic. Conform datelor furnizate de Bowden și Tabor [1] aceste deformații incep la presiuni în jurul a 0,4 HB (HB — duritatea după Brinell a stratului superficial). Pe ansamblu, adică pe întreaga suprafață, s-ar putea ca deformația să aibă un caracter elastico-plastic, caracterul elastic fiind dat de asperitățile a căror înălțime se află în jurul valorii medii. Caracterul elastic al deformației este mai pronunțat în cazul corpurilor cu înaltă elasticitate sau în cazul suprafețelor netede.

Deoarece se studiază abaterile temperaturii pe suprafețele cele mai deformate (cu înălțime inițială maximă a asperităților) vom considera că deformațiile asperităților au un caracter plastic.

Pentru determinarea teoretică a deformațiilor în general forma reală a asperităților se schematizează printr-um model sferic, cilindric, elipsoidal, prismă triunghiulară etc. Desigur, în expresia care caracterizează deformațiile, vor intra mărimile geometrice ale modelului respectiv.

Se consideră pentru simplificare modelul sferic, în contact cu o suprafață perfect netedă (fig. 3 a).

Se notează cu

$a_1, a_2 \dots a_i$ — suprafețele efective pe fiecare asperitate

$P_1, P_2 \dots P_i$ — forțele ce revin acestor asperități

$a_{im} = \frac{\sum_1^u a_i u_i}{u_i}$ — valoarea medie a suprafețelor efective de contact

$P_{im} = \frac{\sum_{1}^{u} u_i P_i}{u_i}$ — valoarea medie a forței ce revine unei asperități.

Considerînd că asperitățile se deformează plastic, fără întărirea materialului (modelul Prandtl) se poate scrie conform datelor lui Bowden,

$$a_i = \frac{P_i}{HB}.$$

Pe de altă parte (fig. 3 b)

$$a_i = \pi \varrho_i^2$$

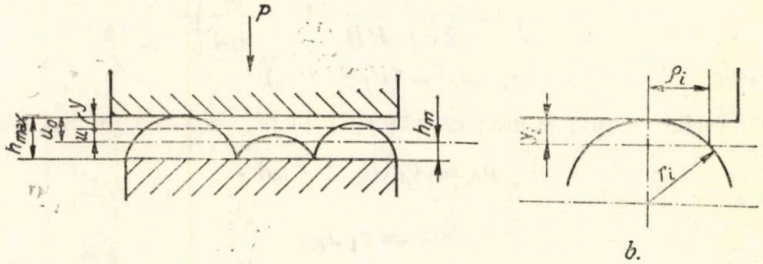


Fig. 3

unde ϱ_i — raza suprafeței deformate, care se poate determina din triunghiul fig. 3 b :

$$\varrho_i^2 = r_i^2 - (r_i - y_i)^2$$

sau

$$\varrho_i^2 = - y_i^2 + 2 r_i y_i .$$

Neglijînd termenul y_i^2 rezultă

$$\varrho_i^2 = 2 r_i y_i , \tag{3}$$

deci

$$a_i = \pi \varrho_i^2 = 2 \pi r_i y_i = \frac{P_i}{HB},$$

de unde

$$y_i = \frac{1}{2 \pi r_i} \frac{P_i}{HB}. \tag{4}$$

Media aritmetică a deformațiilor va fi

$$y_{im} = \frac{\sum_{1}^{u} u_i y_i}{u_i},$$

care se poate scrie și sub forma

$$y_{im} = \frac{1}{2 \pi r_{im}} \frac{P_{im}}{HB}. \tag{5}$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă

$$r_i = \frac{1}{2\pi y_i} \frac{P_i}{HB} \quad \text{și} \quad r_{im} = \frac{1}{2\pi y_{im}} \frac{P_{im}}{HB}. \tag{6}$$

Considerînd

$$r_i = h_{ma} \qquad r_{im} = h_m$$

va rezulta

$$u_{0h} = h_{ma} - h_m = \frac{1}{2\pi y_i HB} \left(1 - \frac{y_i}{y_{im}}\right) (P_i - P_{im}). \tag{7}$$

Notînd cu

$$c_1 = \frac{1}{2\pi y_i HB} \left(1 - \frac{y_i}{y_{im}}\right) \tag{8}$$

$$u_p = (P_i - P_{im})$$

abaterea forței ce revine unei asperități față de valoarea medie, rezultă

$$u_h = c_1 (P_i - P_{im}), \tag{9}$$

sau

$$u_h = c_1 u_p. \tag{10}$$

2. *Studiul temperaturii (medii) a stratului superficial*

Studiile efectuate pînă în prezent în acest domeniu au considerat suprafețele de contact perfect netede.

Ca bază pentru determinarea temperaturii superficiale a servit ecuația lui Fourier, aplicată unui mediu omogen, fără surse interioare de căldură:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{11}$$

unde $a = \dfrac{\lambda}{c\varrho}$;

λ — conductibilitatea termică a corpului;
c — căldura specifică;
ϱ — densitatea;
T — temperatura într-un punct;
t — timpul;
x, y, z — coordonatele punctului considerat.

Rezolvarea problemei s-a bazat în general pe propagarea căldurii într-o singură direcție, în care caz ecuația ia forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{12}$$

Pentru integrarea ec. (11) și (12) trebuie cunoscute condițiile *inițiale*, respectiv distribuția temperaturii pentru $t = 0$, adică

$$T_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

în condițiile la limită, în cazul nostru condiția de speța IV-a, care se referă la schimbul de căldură prin convecție cu mediul înconjurător, respectiv

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = \alpha (T_s - T_0),$$

în care α — coeficientul de convecție;
T_s — temperatura pe suprafața pe care se produce convecția;
T_0 — temperatura mediului exterior la oarecare depărtare de suprafața exterioară a corpului.

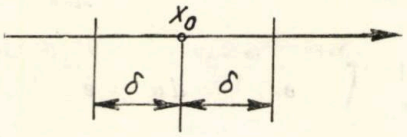


Fig. 4

Pentru cazul studiat interesează două soluții generale ale ec. (12) și anume:

a) interpretarea fizică a soluției pentru o bară de lungime infinită;
b) soluția în cazul unei bare semilimitate, în regim termic permanent.

a) Soluția ec. (2) pentru o bară de lungime infinită fără schimb de căldură cu mediul exterior este [3]

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4ta}}\, d\alpha,$$

în care $f(\alpha)$ reprezintă temperatura barei în momentul $t = 0$ într-un punct al acesteia, soluția prezintă importanță mai ales sub aspectul sensului fizic al funcției

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4at}}.$$

Dacă se izolează în jurul unui punct x_0 (fig. 4) un element de bară $x_0 - \delta$, $x_0 + \delta$ și se presupune că în acest interval la $t = 0$ $f(\alpha) = T_0 = \text{const}$ și în afara intervalului $f(\alpha) = 0$, atunci distribuția temperaturii în bară va fi dată de ecuația

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} T_0\, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4at}}\, d\alpha.$$

Sursa de căldură care la $t = 0$, a ridicat temperatura cu T_0, va fi

$$Q = 2\delta c \varrho T_0.$$

După înlocuire se obține

$$T(x,t) = \frac{Q}{c\varrho\sqrt{2\pi at}} \cdot \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4at}} d\alpha .$$

Cazul unei surse instantanee de căldură în punctul $x = x_0$ corespunde pentru $\delta \to 0$, în acest caz distribuția temperaturii va fi dată de

$$T(x,t) = \lim_{\delta\to 0} \frac{Q}{c\varrho\sqrt{2\pi at}} \cdot \frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4at}} d\alpha$$

Ținînd cont că $\delta \to 0$

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4at}} d\alpha = e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4at}}$$

unde $x_0 - \delta < \alpha < x_0 + \delta$ și că pentru $\delta \to 0$, $\alpha_0 \to x_0$, rezultă

$$T(x,t) = \frac{Q}{c\varrho\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4at}} . \qquad (13)$$

Această ecuație dă distribuția temperaturii unei surse instantanee de căldură $Q = c\,\delta$, așezată în momentul inițial la $x = \alpha$.

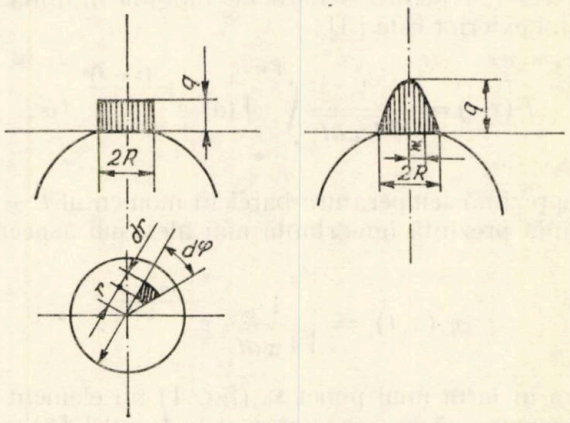


Fig. 5

În cercetările efectuate cu privire la studiul temperaturilor superficiale, Block [3] consideră suprafețele perfect netede și în contact permanent.

Sursa de căldură, datorită frecării, se consideră fie fixă (în cazul mișcărilor de pivotare), fie mobilă. Distribuția căldurii pe suprafața de contact se ia conform cu cea a presiunilor, respectiv uniformă sau distribuită după o relație parabolică (fig. 5)

$$q = q_0 \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$$

unde R — este raza suprafeței de contact;
x — distanța punctului față de mijlocul suprafeței de contact;
q_0 — intensitatea fluxului de căldură în mijlocul suprafeței de contact.

Folosind interpretarea fizică de mai sus, în cazul particular al unei suprafețe circulare, cu o sursă de căldură fixă și uniform distribuită,

$$dq = qr\,dr\,d\varphi\,dt$$

care acționează la distanța x, produce în centrul suprafeței ridicarea temperaturii cu:

$$dT = \frac{2\,dq}{\varrho\,c\,(\sqrt{4\pi at})^3}\,e^{-\frac{r^2}{4at}}.$$

Creșterea totală a temperaturii va fi:

$$T = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \frac{2\,q\,r\,dr\,d\varphi\,dt}{\varrho\,c\,(\sqrt{4\pi at})^3}.$$

Integrînd în raport cu R și φ se obține:

$$T = \frac{2\,q}{\varrho\,c\,\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4at}}\right) \frac{dt}{\sqrt{4at}}.$$

Conform datelor lui Block, în cazul suprafețelor de contact mici, în primele momente ale procesului de frecare se atinge cea mai mare parte a creșterii temperaturii. Astfel pentru $R = 10^{-3}$ cm, $a = 0{,}25$ cm²/sec, creșterea temperaturii pentru un timp $t = \frac{10\,R}{4\,a} = 10^{-5}$ sec este $T = 0{,}82\,T_\infty$ unde T_∞ reprezintă creșterea temperaturii după un timp foarte îndelungat. În aceste condiții integrînd ecuația respectivă pentru $t_1 \to \infty$, se ajunge la relația:

$$T_\infty = \frac{qR}{\lambda}. \tag{15}$$

Considerînd:

$$q = \frac{Q}{\pi R^2}$$

se obține:

$$T_\infty = \frac{Q}{\pi R \lambda}. \tag{16}$$

Pentru o sursă distribuită parabolic, rezultă:

$$T_\infty = \frac{4}{3}\,\frac{Q}{\pi R \lambda}. \tag{17}$$

În cazul contactului dintre două corpuri, (fig. 6) debitul caloric Q, datorit frecării va fi absorbit de cele două corpuri :

$$Q = Q_1 + Q_2 .$$

Notînd

$$\beta = \frac{Q_1}{Q} , \quad \text{va rezulta} \quad Q_2 = (1 - \beta) Q$$

și deci temperaturile pe suprafețele de frecare vor fi :

$$T_1 = \frac{\beta Q}{\pi R \lambda_1} \quad \text{și} \quad T_2 = \frac{(1-\beta) Q}{\pi R \lambda_2} .$$

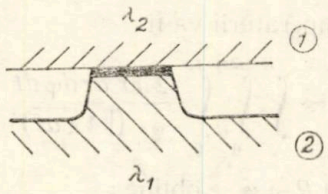


Fig. 6

Considerînd $T_1 = T_2$, rezultă :

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{și} \quad (1 - \beta) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

și prin urmare temperatura pe suprafața de contact va fi :

$$T = \frac{Q}{\pi R (\lambda_1 + \lambda_2)} . \tag{18}$$

Pentru o distribuție parabolică :

$$T = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R (\lambda_1 + \lambda_2)} . \tag{19}$$

În cazul cînd $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, rezultă :

$$T = \frac{Q}{2 \pi R \lambda} \quad \text{și} \quad T = \frac{2}{3} \frac{Q}{\pi R \lambda} .$$

În cazul cînd unul din materiale este rău conducător de căldură ($\lambda_2 = 0$) se ajunge la relațiile determinate anterior :

$$T_\infty = \frac{Q}{\pi R \lambda} \quad \text{și} \quad T_\infty = \frac{4}{3} \frac{Q}{\pi R \lambda} .$$

Se observă că în acest caz temperatura crește la dublu față de cazul cînd ambele corpuri sînt bune conducătoare de căldură.

Pentru sursele de căldură *mobile*, se poate arăta că printr-o alunecare cu durată destul de mare, pe suprafața de frecare apare un cîmp de temperatură constant, care se deplasează cu o viteză egală cu cea a sursei de căldură. În aceste condiții, zona temperaturii maxime se mișcă din centrul în sens opus alunecării.

Block deosebește două regimuri :

— cel al vitezelor mari, $v \geqslant \frac{4a}{R}$ $\left(\psi = \sqrt{\frac{4a}{vR}} \leqslant 1\right)$

— cel al vitezelor mici, caracterizat prin raportul $v \leqslant \frac{4a}{25R}$ $(\psi \geqslant 5)$

În primul caz, deplasarea poate fi neglijată, deoarece maximul temperaturii se găsește în imediata apropiere a centrului, avînd valoarea :

$$T_\infty = \frac{2qR}{\lambda\sqrt{\pi}} = \frac{2Q}{\pi R\sqrt{\pi\lambda}}. \tag{20}$$

Cu creșterea vitezei, maximul temperaturii se deplasează în sens opus alunecării și la viteze mari se apropie de extremitatea R, avînd valoarea :

$$T_\infty = \frac{qR\psi}{\lambda\sqrt{\pi}}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{Q}{\lambda R}. \tag{21}$$

Prin urmare la viteze mici sursa de căldură poate fi considerată fixă întrucît în relația (20) nu intră ψ și v.

În cazul contactului a două corpuri, unul fix și celălalt mobil, dacă corpul mobil (2) are o viteză $v \leqslant \frac{4a_2}{25R}$, temperatura în stratul superficial poate fi determinată cu ajutorul relației (18).

Considerînd debitul caloric $Q = \mu Pv$ va rezulta :

$$T_\infty = \frac{\mu P v}{\pi R(\lambda_1 + \lambda_2)}. \tag{22}$$

Dacă corpul mobil 2 se deplasează cu viteza $v \geqslant \frac{4a}{R}$, cantitățile de căldură absorbite de cel două corpuri vor fi diferită. Considerînd temperatura superficală ca media aritmetică a temperaturilor maxime de pe cele două suprafețe, după o serie de transformări se ajunge la relația :

$$T_{ma} = \frac{2(1+\sqrt{2})\mu p \cdot \Phi_2}{\varrho_2 c_2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \sqrt{\pi\Phi_2}\right)}, \tag{23}$$

unde $p = \frac{P}{\pi R^2}$ și $\Phi_2 = \frac{vR}{4a_2}$

b) Soluția generală privind problema transmiterii căldurii printr-o bară semiinfinită (fig. 7), ținînd cont și de transferul de căldură spre exterior, în regim permanent, a stat la baza relației lui Bowden [1] privind temperatura superficială.

În acest caz ecuația conducției se poate exprima sub forma :

$$\lambda \frac{\partial 2T}{\partial x 2} S - \alpha P (T - T_0) = 0 , \tag{24}$$

unde S reprezintă aria suprafeței frontale a barei, iar P = perimetrul său. Notînd cu $M_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{P}{S}}$ și considerînd că pentru $x \to \infty, T \to T_0$ se ajunge la soluția :

$$T = T_0 + Ce^{-M_1 x}. \tag{25}$$

Pentru determinarea constantei C, Bowden presupune că întreaga cantitate de căldură absorbită de bară $(1-\beta)\ Q$ (unde $0 < \beta < 1$) este eliminată spre exterior.

Deci :

$$(1 - \beta)\ Q = \alpha P' (T - T_0) = \alpha PC \int_0^{\infty} e^{-M_1 x} dx , \tag{26}$$

în care $P' = Pdx$ reprezintă aria suprafeței laterale elementare. Din relația (26) rezultă :

$$C = \frac{(1 - \beta)\ Q}{\sqrt{\alpha \lambda PS}} , \tag{27}$$

și soluția (25) devine :

$$T - T_0 = \frac{(1 - \beta)\ Q}{\sqrt{\alpha \lambda PS}} e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \frac{P}{S}} x} \tag{28}$$

Pentru $x = 0$ se ajunge la relația lui Bowden :

$$T - T_0 = \frac{(1 - \beta)\ Q}{\sqrt{\alpha \lambda PS}} , \tag{29}$$

care, pentru o bară cilindrică la care $S = \pi R^2$ și $P = 2\pi R$, devine :

$$T - T_0 = \frac{(1 - \beta)\ Q}{\pi R \sqrt{R} \cdot \sqrt{2 \lambda \alpha}} . \tag{30}$$

Punînd $Q = \mu P v$, se obține :

$$T - T_0 = \frac{(1 - \beta)\ \mu P \cdot v}{\pi R \sqrt{R} \cdot \sqrt{2 \lambda \alpha}} . \tag{31}$$

O problemă dificilă rămîne cea a determinării coeficientului β, pentru care Bowden nu a dat soluție. Această problemă a fost rezolvată parțial de Iliţki [3] care, plecînd de la cazul enunțat al barei semiinfinite, ajunge la următoarea expresie pentru β :

$$1 - \beta = \frac{\sqrt{\pi \alpha}}{\sqrt{\varrho c v}}, \tag{32}$$

astfel încît soluția lui Bowden cu corecția lui Iliţki devine :

$$T - T_0 = \frac{\mu P \cdot \sqrt{v}}{\pi R \sqrt{R} \sqrt{2 \lambda \varrho c}}. \tag{33}$$

O concluzie care rezultă din cercetarea relațiilor de mai sus, este cea a dependenței liniare a temperaturii stratului superficial de sarcină, lucru ce concordă cu rezultatele experimentale ale lui Bowden.

3. *Studiul temperaturii superficiale locale.* Considerînd suprafața de contact redusă la dimensiunile dintre asperități (fig. 8) relațiile de mai sus se pot aplica și în acest caz cu următoarele observații :

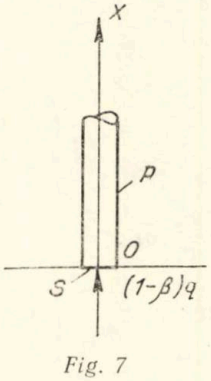


Fig. 7

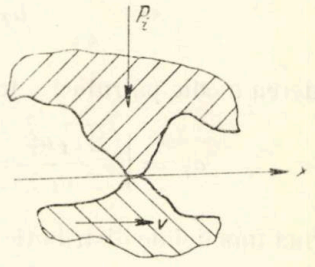


Fig. 8

a) Asperitățile nu sînt în contact permanent, procesul termic pe o asperitate avînd un caracter discontinuu.

b) Suprafețele de contact fiind foarte mici, în cazul aplicării relației lui Block, de exemplu numai pentru viteze $v = \frac{4a}{R} = 100$ m/sec. se va utiliza relația (23), în rest fiind valabilă relația (22).

Fizic soluția este justificată prin faptul că, deși dimensiunile suprafeței de contact sînt foarte mici, rămînem încă în domeniul macroscopic. De altfel, numeroase studii efectuate asupra deformațiilor asperităților cu ajutorul relațiilor lui Hertz n-au întîmpinat nici o obiecțiune din acest punct de vedere.

Prin urmare, întrebuințînd relația lui Block, pentru o asperitate, se poate scrie :

$$T_i = \frac{\mu P_i v}{\pi \varrho_i (\lambda_1 + \lambda_2)} \quad \text{și} \quad T_{im} = \frac{\mu P_{im} v}{T \varrho_{im} (\lambda_1 + \lambda_2)} \tag{35}$$

unde, evident :

$T_{im} = \frac{\Sigma u_i T_i}{u_i} = T_m$ — temperatura medie a stratului superficial.

Abaterea temperaturii va fi deci :

$$u_T = T_i - T_{im} = \frac{\mu v}{\pi \varrho_i (\lambda_1 + \lambda_2)} \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_{im}}\right) (P_i - P_{im}) . \tag{36}$$

Notînd cu :

$$c_2 = \frac{\mu v}{\pi \varrho_i (\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_{im}}\right) \tag{37}$$

se obține :

$$u_T = c_2 u_P . \tag{38}$$

Ținînd cont de relația (10) rezultă :

$$u_T = \frac{c_2}{c_1} u_{0h} . \tag{39}$$

Abaterea medie pătratică a temperaturii va fi :

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\Sigma_i u_T^2}{u_i}} = \frac{c_2}{c_1} \sqrt{\frac{\Sigma u_i u_{0h}}{u_i}} = \frac{c_2}{c_1} \sigma_h . \tag{40}$$

Norma funcției de distribuție a temperaturii este :

$$z_T = \frac{u_T}{\sigma_T} = \frac{\frac{c_2}{c_1} u_{0h}}{\frac{c_2}{c_1} \sigma_h} = z_{0h} . \tag{41}$$

Din cele de mai sus reies următoarele :

— legea de distribuție a asperităților determină distribuția temperaturilor superficiale locale [rel. (39)] ;

— cunoașterea abaterilor asperităților (u_{0h}) permite determinarea abaterilor temperaturii (u_1) și implicit temperaturilor locale, cu gradul de probabilitatea corespunzînd valorii lui z.

4. *Determinarea abaterii asperităților.* Dintre diferitele metode existente se va folosi cea indicată de Tsukizoe și Hisakoda [2].

Dacă se consideră că toate profilogramele obținute pe direcția L_z sînt identice pe lungimea L_y (fig. 9) atunci suprafața efectivă de contact suprafața hașurată), după aplicarea sarcinii, poate fi considerată ca produsul lungimilor pe direcțiile x și y.

Lungimea suprafeței pe direcția x, va fi :

$$F_x(u) = L_x \frac{\int_{u_h}^{u_{0h}} f(u)\,du}{\int_{-u_{0h}}^{u_{0h}} f(u)\,du},$$

unde u_{oh} — este abaterea inițială a asperităților.

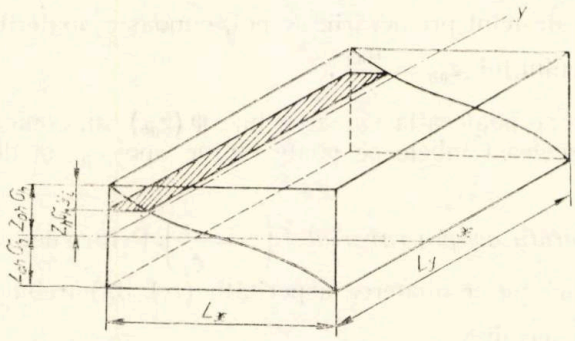


Fig. 9

Considerînd $u_{0h} = \sigma_h \cdot z_{0h}$, va rezulta :

$$A_{ef} = \int_0^{L_y} F_x(u)\,dy = L_x L_y \frac{\int_{u_h}^{u_{0h}} f(u)\,du}{\int_{-u_{0h}}^{u_{0h}} f(u)\,du}.$$

Luînd conform datelor lui Bowden $A_{ef} = \frac{P}{HB}$, se găsește

$$\frac{P}{HB} \int_{-z_{0h}\sigma_h}^{z_{0h}\sigma_h} f(u)\,du = L_x L_y \int_{z_h\sigma_h}^{z_{0h}\sigma_h} f(u)\,du,$$

sau

$$\frac{P}{L_x L_y H B} \int_{-z_{0h}}^{z_{0h}} f(u)\,du = \int_{z_h}^{z_{0h}} f(u)\,du.$$

Ținînd cont că :

$$\int_{-z_{0h}}^{z_{0h}} f(u)\,du = 2\int_0^{z_{0h}} f(u)\,du = 2\,\Phi(z_{0h}),$$

unde $\Phi(z_{0h}) = \int_0^{z_{0h}} f(u)\,du$ reprezintă integrala lui Laplace și că :

$$\int_{z_h}^{z_{0h}} f(u)\,du = \int_0^{z_{0h}} f(u)\,du \times \int_0^{z_h} f(u)\,du = \Phi(z_{0h}) - \Phi(z_h),$$

va rezulta :

$$\Phi(z_h) = \Phi(z_{0h}) - \frac{2}{p_m H B}\,\Phi(z_{0h}),$$

de unde :

$$\Phi(z_h) = \Phi(z_{0h})\left[1 - \frac{2}{p_m H B}\right]. \tag{42}$$

În funcție de felul prelucrării, se pot, cunoaște abaterile u_{0h} și u_h ceea ce permite calculul lui $z_{0h} = \frac{u_{0h}}{\sigma_h}$.

Din tabele se poate afla valoarea lui $\Phi(z_{0h})$ și, conform relației (42), $\Phi(z_h)$. Din aceleași tabele se poate obține apoi z_h și deci prin această $u_h = z_h\,\sigma_h$.

5. *Considerații asupra raportului* $\left(c = \frac{c_2}{c_1}\right)$. Pentru determinarea abaterii temperaturii, funcție de abaterea asperității (rel. 39) trebuie calculat raportul $c = \frac{c_2}{c_1}$, respectiv :

$$c = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mu v\left(1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_{im}}\right)}{\pi \varrho_i (\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \frac{2\pi y_i HB}{\left(1 - \frac{y_i}{y_{im}}\right)}. \tag{43}$$

În cazul calculelor practice, se cere determinarea valorilor ϱ_i și ϱ_{im}, ceea ce este destul de dificil. De aceea, cu unele aproximații, acest raport se poate simplifica : considerînd că

$$1 - \frac{\varrho_i}{\varrho_{im}} \simeq 1 - \frac{y_i}{y_{im}},$$

urmează :

$$c = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mu v \cdot 2 y_i HB}{\varrho_i (\lambda_1 + \lambda_2)}. \tag{44}$$

Conform relației (3), $\varrho_i = \sqrt{2 r_i y_i} = \sqrt{2 h_{ma} y_i}$,

și deci :

$$c = \frac{2\mu v \sqrt{y_i} \cdot HB}{\sqrt{2 h_{ma}}(\lambda_1 + \lambda_2)}. \tag{45}$$

Deformația y_i se poate determina din relația :

$$y_i = u_{0h} - u_h = (z_{0h} - z_h)\,\sigma_h\,, \tag{46}$$

unde :

— $\sigma_h = \dfrac{h_{max}}{j}$

— $h_{max} = \sqrt{h_{1max}^2 + h_{2max}^2}$, h_{1max}, h_{2max}, reprezentînd înălțimea asperităților celor două suprafețe ;

— j — coeficient determinat experimental.

În cazul în care $h_{1max} = h_{2max}$,

$$y_i = \sqrt{2}\,(z_{0h} - z_h)\,\frac{h_{max}}{j}\,. \tag{47}$$

Ținînd cont de această relație, se obține :

$$c = \frac{2\,\mu\,v\,\sqrt{1{,}41\,\dfrac{(z_{0h} - z_h)\,HB}{j}}}{\sqrt{2}\,(\lambda_1 + \lambda_2)}\,. \tag{48}$$

Cîteva observații finale :

a — În momentul de față, cînd mijloacele experimentale nu permit încă determinarea temperaturilor superficiale locale, determinarea temperaturilor medii a suprafețelor în contact, pe cale experimentală, poate prezenta un interes deosebit din punct de vedere practic, deoarece metoda propusă permite determinarea temperaturilor superficiale locale, pe baza cunoașterii temperaturilor medii.

Deci în ansamblu metoda propusă face posibil ca temperatura superficială să constituie un criteriu global de apreciere a proprietăților de fricțiune a celor două materiale.

b — Raportul $c = \dfrac{c_2}{c_1}$, depinde de următorii factori :

— parametrii externi, concretizați prin viteza v, și sarcina P (sau presiune p_m) prin intermediul lui z_h (rel. 42) ;

— gradul de prelucrare a suprafețelor z_{0h} ;

— proprietățile mecanice ale materialului, prin microduritatea stratului superficial HB ;

— proprietățile de fricțiune (μ) ;

— proprietățile termice ale pieselor în contact (λ_1, λ_2).

Cu alte cuvinte, intervine întreg ansamblul factorilor care condiționează procesul frecării și al uzurii. De aceea, raportul c, poate constitui, pe lîngă temperatura medie, un criteriu de apreciere a comportării cuplurilor în frecare, din punct de vedere al uzurii.

Se constată o concordanță mulțumitoare între aprecierea cuplurilor în frecare pe baza raportului $c = \frac{c_2}{c_1}$ și datele experimentale cunoscute în prezent. De exemplu comparînd două cupluri oțel călit/oțel călit și oțel călit/bronz cu același grad de prelucrare a suprafeței, se va constata că în primul caz, dat fiind că HB este mai mare și $(\lambda_1 + \lambda_2)$ mai mic de cît în cazul al doilea, raportul $c = \frac{c_2}{c_1}$ pentru primul caz va fi mai mare și deci implicit va rezulta o abatere mai mare a temperaturii la aceeași sarcină și viteză, ceea ce va duce la apariția unor temperaturi locale mai mari, care vor provoca o distrugere prematură a suprafețelor în contact.

Pentru determinarea practică a raportului c este necesară cunoașterea durității superficiale HB, și a datelor privind asperitățile inițiale al suprafețelor în contact.

Cercetările efectuate în privința durității recomandă [4] $HB = (3—5)\,\sigma_c$.

Pentru determinarea mărimilor cu privire la asperități, se dau următoarele recomandări după [2]:

Tabelul 1

Baza de măsurare L mm	Înălțimile maxime corespunzătoare în microni	z_{oh}	j
0,3	pînă la 0,8	de la 3,4	mai sus de 4,3
1	0,8—6	3,23—3,4	4,9—5,4
3	6—25	2,96—3,28	5,1—5,3

Catedra organe de mașini
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Bowden P. F., Tabor D.*, Reibung und Schmierung fester Körper Springer Verlag, 1959
2. *Tsukizoe Tadasu, Hisakodo Terunuosa.*, On the mechanism of contact between metal surfaces — the penetrating depth and the average clerance. Paper Amer. Soc. Mech. Ingrs. 1964 Nr. 13 (tradus în l. rusă în „Express-Informația", seria detali mașin, Nr. 41, referat 153—160).
3. *Scedrov V. S.*, Temperatura pe un contact alunecător (tradus din limba rusă în culegerea „Frecare și uzură în mașini", culegerea 10, 1956).
4. *Kraghelski I. V.*, Trenie i iznos, Mașghiz, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 1

AUTOMATICĂ

C.Z. : 621.316 : 621.314 : 621.3.015. : 621. : 311.1

TRANSFORMĂRI DUALE ALE REȚELELOR FOLOSITE ÎN MODELAREA PROBLEMELOR DE CURGERE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ ÎN MEDII POROASE *

ADRIAN PETRESCU

Este cunoscut faptul că atît circuitele electrice planare, cît și cele neplanare (prin folosirea unor transformatoare ideale) se bucură de proprietatea de dualitate. Pe această bază, distribuției curenților în circuitul inițial îi corespunde distribuția tensiunilor în cel dual, și invers, iar legării în serie a elementelor îi corespunde legarea în paralel, și invers. Conturului din circuitul inițial îi corespuunde un nod în cel dual, rezistenței îi corespunde conductanța, inductanței — capacitatea, capacității — inductanța, și invers.

Circuitul dual al unui circuit dat, reprezintă modelul său matematic și prin studierea sa se pot trage concluzii pentru circuitul dat. În tehnica modelării sistemelor neelectrice cu ajutorul circuitelor electrice, pricipiul dualității permite a se construi scheme sub două forme. Dintre aceste scheme se alege aceea care se poate construi mai comod.

Pentru un circuit electric dat, circuitul dual se poate construi, fie pornind de la ecuațiile circuitului, fie grafic pe baza unor reguli stabilite de Cauer [1], [2].

Adesea se folosește metoda grafică, care are la bază mai multe reguli :

1. În interiorul fiecărui contur independent, al circuitului dat, se marchează cîte un nod al circuitului dual. Se marchează, de asemenea, un nod în afara circuitului.

2. Între aceste noduri se trasează linii care intersectează numai cîte un element al circuitului inițial.

3. În lungul liniilor astfel trasate se introduc elemente de circuit duale în raport cu cele intersectate.

Folosirea metodei circuitelor duale pentru transformarea rețelelor electrice destinate soluționării problemelor cu condiții la limită necesită luarea în considerație a sensului fizic al acestor transformări. Aceasta, deoarece fiecare element al rețelei are o interpretare geometrică bine determinată.

* Manuscris primit la redacție la 20 ian. 1966.

T.10 C15

Transformarea dual㠠a re㠥lelor destinate modelării curgerii cu suprafa㠠 liber㠠 conduce la simplificarea modelului, la micșorarea num㠡rului de iera㠥ii [3] și la m㠡rirea precizei de determinare a unor frontiere necunoscute ini㠥ial (suprafa㠠a liber㠠). În afar㠠 de aceasta, se poate g㠡si distribu㠥ia unei func㠥ii pentru care, în cazul folosirii re㠥elei ini㠥iale, ar fi fost necesare calcule suplimentare și construc㠥ii grafice.

Din punctul de vedere al cîmpului plan paralel, c㠡ruia îi corespunde re㠥eaua ini㠥ial㠠, pe re㠥eaua dual㠠 se modeleaz㠠 cîmpul conjugat (dual). *Aceasta conduce la modificarea sistemului de analogie între m㠡rimile fizice ale cîmpului și ale modelului.* În leg㠠tur㠠 cu aceasta, se modific㠠 metodica și mijloacele tehnice pentru modelarea condi㠥iilor la limit㠠.

Re㠥elele electrice duale se pot construi pentru cazul model㠡rii curgerii fluidelor grele cînd func㠥ia necunoscut㠠 este presiunea (P) sau poten㠥ialul vitezelor (Φ). Întrucît re㠥elele care se pot construi în acest caz sînt plane pentru ele circuitele duale se g㠡sesc u㠙or.

În tabelele de mai jos se prezint㠠 analogiile între parametrii cîmpului modelat și parametrii re㠥elelor primare și duale. În tabelele I și II m㠡rimea c㠡utat㠠 este presiunea, iar în tabela III — poten㠥ialul vitezelor.

Tabela I

Ecua㠥ia cîmpului studiat	$\nabla [K \nabla (P - \gamma Z)] = 0$	
Parametrii cîmpului	Re㠥ea cu surse interne de tensiune	
	Re㠥eaua primar㠠	Re㠥eaua dual㠠
Presiunea P	Poten㠥ialul electric U	Curentul electric I
Debitul de lichid Q	Curentul electric I	Poten㠥ialul electric U
Poten㠥ialul for㠥ei de gravita㠥ie $\gamma \Delta z$	Sursa de tensiune E	Sursa de curent J
Rezisten㠥a hidraulic㠠 Rh	Rezisten㠥a electric㠠 Re	Conductan㠥a electric㠠 Ge

În lucrarea [1] au fost deduse ecua㠥iile care guverneaz㠠 curgerea fluidelor grele prin medii poroase, ar㠠tîndu-se c㠠 în cazul cînd intereseaz㠠 distribu㠥ia presiunii ecua㠥ia se poate pune sub forma :

$$\nabla [K \nabla (P - \gamma Z)] = 0 \tag{1}$$

și

$$\nabla [K \nabla P] = \gamma \frac{\partial K}{\partial Z} \tag{2}$$

iar în cazul cînd se caută potențialul vitezelor ecuația capătă forma

$$\nabla [\nabla \Phi] = 0 . \tag{3}$$

Tabela 2

Ecuația cîmpului studiat	$\nabla [K \nabla P] = \gamma \frac{\partial K}{\partial Z}$	
Parametrii cîmpului	Rețea cu surse interne de curent	
	Rețeaua primară	Rețeaua duală
Presiunea P	Potențialul electric U	Curentul electric I
Debitul de lichid Q	Curentul electric I	Potențialul electric U
Debitul condiționat de forța de gravitație $\gamma \Delta x \Delta y \left[K\left(x, Z + \frac{\Delta Z}{2}\right) - K\left(x, Z - \frac{\Delta Z}{2}\right) \right]$	Sursa de curent J	Sursa de tensiune E
Rezistența electrică Rh	Rezistența electrică Re	Conductibilitatea electrică Ge

Tabela 3

Ecuația cîmpului studiat:	$\nabla [K \nabla \Phi] = 0$	
Parametrii cîmpului	Rețeaua primară	Rețeaua duală
Potențialul vitezelor Φ	Potențialul electric U	Curentul electric U
Debitul Q	Curentul electric I	Potențialul electric U
Rezistența hidraulică Rh	Rezistența electrică Re	Conductanța electrică Ge

În aceste ecuații P reprezintă presiunea, Φ — potențialul vitezelor, K — permeabilitatea mediului poros, γ — greutatea specifică a lichidului, Z — cota punctului examinat față de un plan de referință, ∇ este operatorul $r \frac{\partial}{\partial X} + \vec{r} \frac{\partial}{\partial Z}$.

Examinăm un exemplu concret de utilizare a rețelei duale pentru modelarea unui cîmp fizic.

Vom studia problema debitului maxim în exploatarea unui zăcămînt de petrol cu apă de talpă fără surse. Galeria de exploatare (fig. 1) parțial deschide stratul petrolifer. Deoarece domeniul studiat este simetric în raport

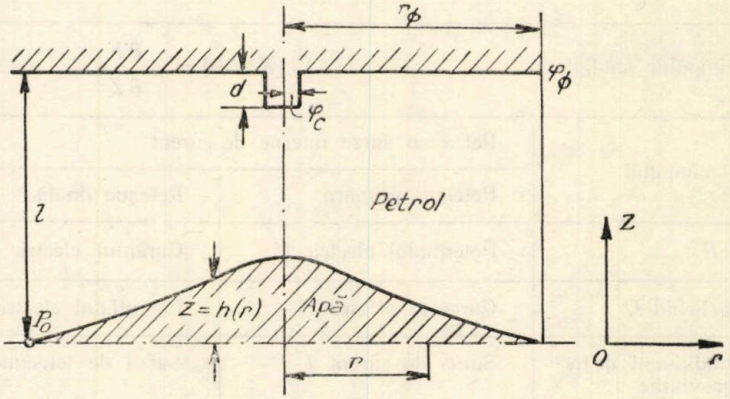


Fig. 1

cu galeria este suficient a se examina cîmpul din stînga. În figura 2, domeniul D_1 este ocupat de petrol, iar domeniul D_2 de către apă. Frontierele $A\ B$ și $C\ D$ sînt impermeabile ($C\ D$ — din motive de simetrie a domeniului).

În lungul frontierelor AE și BC potențialele vitezelor sînt date Φ_1 EA și Φ_2 BC. Frontiera ED desparte apa de petrol și în lungul ei, potențialul vitezei este proporțional cu cota Z.

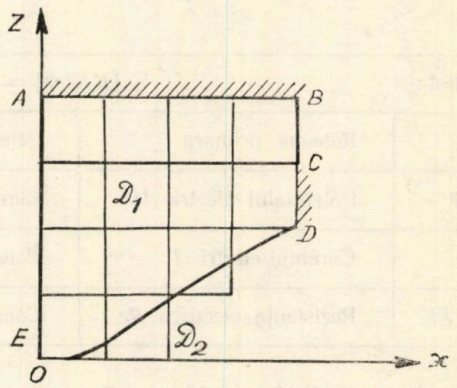


Fig. 2

Împărțim domeniul D_1 cu o rețea de drepte paralele verticale și orizontale, cu un pas constant.

Pentru o mai bună aproximare a frontierei ED are sens *alegerea unui pas mai mic,* dar în acest caz interesează metodica de modelare și nu precizia.

Presupunem că suprafața liberă *ED* este staționară și construim rețeaua de modelare corespunzătoare analogiilor $P \rightarrow U$, $Q \rightarrow I$ (Tabela I) În acest caz, potențialele electrice ale nodurilor frontierelor *AE* și *BC* vor fi funcții de coordonate întrucît *AE* și *BC* nu sînt izobare. În figura 3 se reprezintă modelul. Sursele de tensiune $E_1 \ldots E_5$ și ε_1, ε_2 sînt dispuse pe frontierele *AE* și *BC*. Sursele *e* sînt dispuse în fiecare ramură verticală. Construind rețeaua duală (fig. 4) se observă că fostele frontiere impermeabile (linii

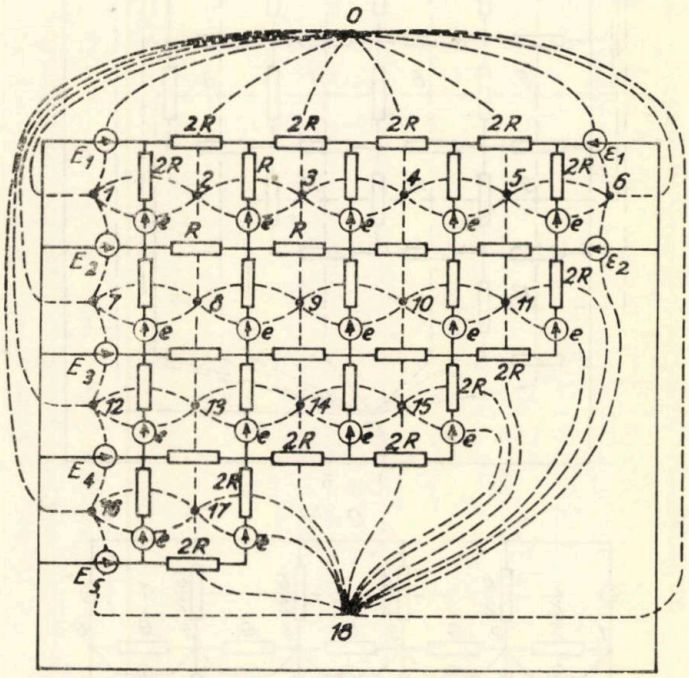


Fig. 3

de curent) au devenit frontiere echipotențiale și invers. Toate *sursele de tensiuni au devenit surse de curent* și în cazul unui mediu omogen, sursele de curent vor fi dispuse numai în nodurile de pe frontiere. Aceasta conduce la micșorarea numărului surselor, ceea ce simplifică modelul.

O analiză similară se poate face plecînd de la tabela II de analogie.

Un interes deosebit îl prezintă construcția rețelei duale pentru aceeași problemă pornindu-se de la sistemul de analogii $\Phi \rightarrow U$, $Q \rightarrow I$ (tabela III). Condițiile la limită au fost arătate mai sus pentru acest caz și rețeaua nu va conține surse interioare (fig. 5). În figura 6 este reprezentată rețeaua duală. Potențialele nodurilor rețelei duale sînt proporționale cu debitul lichidului prin suprafața corespunzătoare unui pătrat din rețea. Măsurînd aceste potențiale, prin interpolare se pot construi liniile de debit constant.

Marele avantaj al acestei rețele constă în aceea că suprafața liberă se poate găsi ușor întrucît toate nodurile dispuse pe ea au același potențial și pot fi legate în scurt.

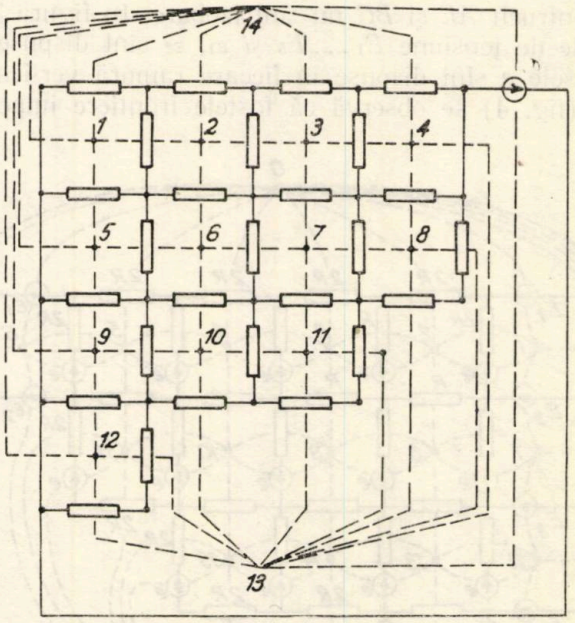


Fig. 5

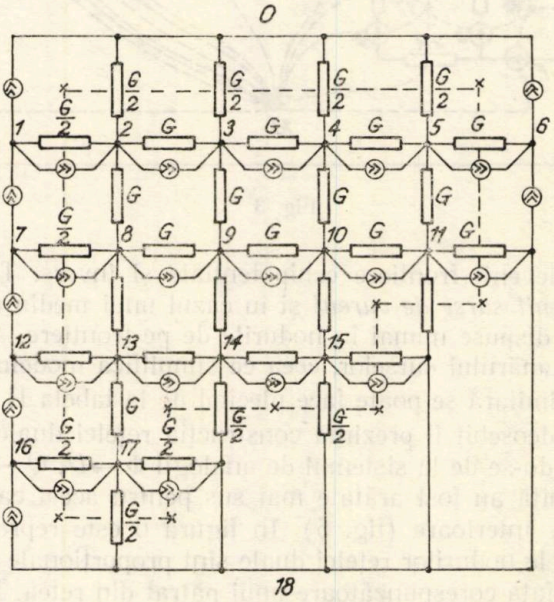


Fig. 4

Din punct de vedere constructiv aceasta are o mare importanță deoarece nu este necesar a se îndepărta rezistențele din rețea pe măsura aproximării succesive a suprafeței libere, ci legînd în scurt nodurile dispuse în lungul acestei suprafețe.

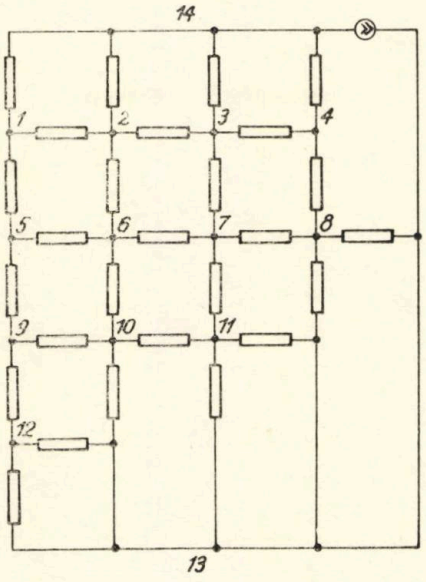


Fig. 6

Acest lucru simplifică modelul și metodologia de găsire a suprafeței libere. În cazul folosirii rețelei duale calculul rezistențelor se efectuează conform sistemului de analogie adoptat.

Catedra de automatică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Reza M., Seely S.*, Modern Network Analysis Mc Grow Hill Book Company N. Y. 1959.
2. *Telelbaum I. M.*, Elektriceskoe modelirovanie Fizmatghiz, Moskva 1959.
3. *Petrescu A.*, Modelarea cu ajutorul rețelelor electrice a curgerii lichidelor incompresibile prin medii poroase neomogene în condițiile acțiunii forței gravitației. Automatica și electronica, nr. 3, 1964.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 11741

INDICAŢII REDACŢIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri şi colaţionate de autor. Relaţiile matematice şi formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele şi graficele vor fi executate în tuş negru pe hîrtie de calc, numerotate şi prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent şi legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referinţă şi, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană şi engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele şi iniţialele de prenume ale autorului, titlul şi volumul lucrării, editura, locul şi anul apariţiei, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina iniţială şi finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text şi se va numerota curent. Referinţele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experienţelor şi afirmaţiilor ştiinţifice revine numai autorilor. Conducerea revistei îşi rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1967 DEC 15

F. 1130

REFERATIVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX NUMĂRUL 2 ANUL 1967
MARTIE — APRILIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY 1983

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX — NUMĂRUL 2

MARTIE — APRILIE
1967

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici* ; Prof. Dr. Docent *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli* ; Conf. Dr. *S. Călin* ; Acad. Prof. Dr. Docent *D. Dumitrescu* ; Prof. *S. Gâdea* ; Conf. Dr. *I. Grădișteanu*, Prof. *C. Ionescu-Bujor* ; Prof. Dr. Docent *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu* ; Prof. *St. Mantea* ; Prof. Dr. *N. Marinescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu* ; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *R. Rădulet* ; Prof. *Al. Rău* ; Prof. *Al. Spătaru* ; Prof. *L. Stoicescu* ; Prof. Dr. Docent *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

Д. Д. Байнов

Решение бесконечной граничной задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка 17

D. Filipescu

Asupra unor transformări geometrice în optică şi grupurile Lie . . 19

FIZICA

D. Iordache

L'étude de la courbe dynamique d'aimantation d'un ferrite mixte de manganèse et zinc, de haute perméabilité 24

CHIMIE ANORGANICĂ

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru, Fl. Popescu

Recuperarea molibdenului din deşeuri şi concentrate indigene . . 43

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

I. Drimuş, A. Măcelaru, Th. Spindler, I. Ionescu, V. Poleacov

Complex Utilisation of Dodecane by Air Oxidation in the Presence of Boric Acid 49

ELECTROTEHNICA

L. Bompa

Des consideration théoriques sur le couplage asynchrone à rotor ferromagnétique 61

TEHNOLOGIA METALELOR

P. Sonea, I. Sonea

Etude du comportement des particules de metal dans l'arc electrique vibre à oscillations ultra sonores transversales, à modele hydrodynamique 85

AVIAŢIE

St. Staicu

Studiul scurgerii supersonice în jurul unui ampenaj cruciform . . 107

AUTOMATICA

P. Dimo, I. Sipoş

Les amplificateurs opérationnels de la machine analogique électronique à calculer MAC-1 121

ELECTRONICA

D. Dascălu

Simple Method for the Calculation of Vacuum Diode High-frequency Characteristics 127

TRANSPORTURI

Al. Popa, A. Carabulea

Contribution à l'étude technique et economique des systèmes de traction électrique et Diesel 133

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY 1963

Резюме

Д. Д. Байнов Д. К. 517.9

Решение бесконечной по пределу для дифференциального уравнения второй степени

Решается уравнение (1) с применением серии Dirichlet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Д. Филипеску Д. К. 517.535

О некоторых геометрических преобразованиях в оптике и группах Lie

В данной работе указывается, что сюдящиеся перенесения с одним и тем же центром образуют группу Lie, и исследуется частный случай, когда соответствующий вектор параллелен данному направлению.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Д. Иордаке Д. К. 538.24 : 549.73 : 546.711 : 546.47

Исследование динамической кривой намагничивания некоторых марганцево-цинковых ферритов высокой проницаемости

Работа исследует поведение параметров гарганцево-щинковых ферритов высокой проницаемости при разных температурных условиях, при ударах и при разных внешних магнитных полях. Проанализирована зависимость параметров Rayleigh от температуры и отклонения, возникающего в области слабых магнитных полей по закону Rayleigh.

Для этих отклонений устанавливается анатомическая формула изображения.

В области средних магнитных полей работа, исходя из экспериментальных исследований, стремится сделать выводы о форме функциональной зависимости магнитной индуктивности и дифференциальной проницаемости и интенсивности магнитного поля.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Д. К. 669.28.004.8

В. Т. Мэркулециу, И. Стругару, Фл. Попеску

Восстановление молибдена из отходов различных отраслей производства

Метод стабильности условий восстановления молибдена из отходов металлургической промышленностии. Молибден переходит в натриевый молибден а затем с помощью хлорида аммония в молибденовокислый аммоний.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Summary

D. D. Bainov

D.C. 517.9

Solving the Infinite Boundary Problem for a Quadratic Differential Equation

In the present note equations (1) are solved using the Dirichlet series.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.C. 517 : 535

D. Filipescu

On Some Geometrical Transformations Changes in Optics and in the Lie Groups

In this paper it is shown that the convergent translations with one and the same centre form a Lie group and the special case when the respective vector is parallel to a given direction, is studied.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.C. 538.24 : 549.73 : 546.711 : 546.47

D. Iordache

Study of the Dynamical Magnetisation Curve of Some High Permeability Mixed Manganese and Zinc Ferrites

This study intends to investigate the behaviour of the magnetical parameter characterising high permeability manganese-zinc ferrites in various temperature, impact and external magnetic field conditions. Both the dependence of the Raleigh parameter upon temperature, and the deviations from the Rayleigh law which appear in the weak magnetic field zone are investigated. Analytical formulae are established for these deviations. From the experimental study in the domain of mean magnetic fields, the author endeavours to draw conclusions regarding the functional dependence form of magnetic inductance and of differential permeability, on the magnetic field intensity.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.C. 669.28.004.8

V. T. Marculeţiu, I. Strugaru, Fl. Popescu

Molybdenum Recovery from Vastes Resulting from Various Manufactures

Method of the stability in the recovery conditions of molybdenum from the wastes resulting from the metallurgical industry. The molybdenum is turned into sodium malybdate and then by means of amonium chloride into ammonium molybdate.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Д. К. 665.5.051 : 661.7 : 661.651

И. Дримуш, А. Мачелару
Тх. Спиндлер, И. Ионеску, В. Полеаков

Комплексное использование додекана окислением воздуха в присутствии борной кислоты

В работе исследовалось окисление н-додекана в присутствии борной кислоты, с целью получить наибольший выход в н-додеканах (промежуточные продукты большого значения в промышленности биоразрушительных веществ). Одновременно были отделены жирные кислоты образовавшиеся в процессе окисления.

Работа, также, задана себе цель выяснить спорный вопрос, касающихся места действия кислорода в молекуле додекана.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Д. К. 621.313.33 : 538 : 621-25

Л. Бомпа

Теоретические соображения относительно синхронного привода с ферромагнетным ротором

В работе представлен метод приближенного определения электромагнитного поля в ферромагнитной движущейся среде. Во первых, рассматривается постоянная проницаемость ферромагнитного материала якоря, и на основе этой гипотезы дается решение кровнения при данных граничных условиях.

В заключение рассчитывается момент вращения машины и сравнивается с результатами литературы, проверенными экспериментально.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

П. Соня, И. Соня Д. К. 621.791.75 : 621.37

Изучение поведения металлических частиц в вибрирующей электрической дуге с поперечными ультразвуковыми колебаниями на гидродинамической модели

Изучаются физические явления, которые сопутствуют металлической частице при перемещении по сварочной электродуге под струей, когда последняя находится под воздействием ультразвукового поля.

Устанавливаются уравнения движения частицы с учетом физических постоянных среды и определением интенсивности ультразвукового поля в условиях использования электрической дуги при сварке. Таким образом можно получить более тонкие структуры и высшие механические характеристики сварных швов.

В работе демонстрируются отдельные результатю экспериментов, структуры и заключения для практического применения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.C. 665.5.051 : 661.7 : 661.651

I. Drimuș, A. Măcelaru, Th. Spindler, I. Ionescu, V. Poleacov

Complex Utilisation of Dodecane by Air Oxidation in the Presence of Boric Acid

This paper studies the oxidation of n-dodecane in the presence of boric acid, in view of obtaining as high a yield as possible in n-dodecanols (intermediate products highly important in the industry of biodegradable detergents). The fatty acids formed during the process of oxidation were separated simultaneously.

The paper also tries to elucidate the much discussed problem of the attacking place of oxygen in the dodecane molecule.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.C. 621.313.33 : 538 : 621—25

L. Bompa

Theoretical Considerations on Asynchrone Coupling with Ferromagnetic Rotor

This paper presents a method of approximation of the electromagnetic field of a ferromagnetic moving field. First the ferromagnetic permeability of the armature material is considered constant, and on this hypothesis the solution of the field equations with given boundary conditions is established. Then, using a graphic method the non-linearity of the material is considered.

Finally the machine torque is estimated and compared with some results in the litterature, checked experimentally.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.C. 621.791.75 : 621.37

P. Sonea, I. Sonea

Study on the Behavour of Metal Particles in an Electric Arc Vibrated by Transverse Ultra-sound Oscillations, on a Hydro-dynamic Model

Some physical phenomena accompanying the metal particle in motion in an electric flux shielded welding arc, when the arc is subjected to the action of an ultra-sound field, are studied.

The motion equations of the particle are established, the physical constants of the medium being taken into account, the intensity of the ultra-sound field being determined, in the conditions of an electric arc used in welding. In this way finer structures and superior mechanical characteristics may be obtained in weded seams.

Some results of exeperimental tests, the structures obtained and the conclusions regarding the practical application of the process are shown in the paper.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Шт. Стайку Д. К. 533.621.01 : 629.13

Изучение сверхзвуковых течений вокруг крестообразного оперения

Работа изучает сверхзвуковые течения вокруг тонкого крестообразного оперения на основе гипотезы распределения антисимметричных падений (вынужденная антисимметрия) для вертикального оперения с дозвуковой передней кромкой.

Излагаются случаи с дозвуковой и сверхзвуковой передней кромкой горизонтального оперения. Определяются осевыевихревые скорости на кроме и пластинке, а также аэродинамические характеристики этих профидей. Делаются замечания для разных частных случаев крыльев в зависимости от крестообразной системы и результаты сопоставления с результатами полученными при прямых методах исследования.

Полученные результаты могут быть использованы для аэродинамических характеристик и для, действующих на крестообразные оперения ракет и сверхзвуковых самолетов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

П. Димо, И. Сипош Д. К. 621.375 : 621.3.024 : 681.14 : 518.5

Операционные усилители аналогических расчетных машин МАС-1

В работе представлены технически характеристики операционных усилителей, используемых в аналогических расчетных машинах МАС-1. Исследованы предлагаемые варианты и обоснованность выбора одного из них.

Представлены некоторые особые вопросы, которые возникли в ходе исследования.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Д. Даскэлу Д. К. 621.3.018 : 621.385.2 : 621.38 : 621.3.023

Проешедший метод расчета высокочастотных характеристик вакуумных диодов

Изучается работа вакуумного диода при низких сигналах и при очень высоких частотах, где возникает эффект времени прохождения электронов. Рассчитывается с помощью простейшего метода известное выражение имхпенданса вакуумного диода.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Ал. Попа, А. Карабуля Д. К. 621.33 : 625.282-833.6

К технико-экономическому исследованию системов электрической и дизельной тяги

Излогаются главные технико-экономические критерии которые возможно применять для сравнения вариантов и представляется способ применения годовых расходов исчисления $Z = f(q)$ функция сообщения подчеркивая особенности применения других критерий.

Применеая критерий $Z = f(q)$ принялся во внимание случай постояных и переменых в времени вложений с и без пуска в эксплоатацию железно дороги частично электрифицированой.

Показывается что на основании применения себестоимости электрификация становится рентабильной в более легких условиях чем показывает критерий $Z = f(q)$. Рекомендуется чтоб при построении кривых регресии употреблять функцию а не вариацию расходов себестоимости в зависимости от сообщений.

Построены кривые $Z = f(q)$ которые позволяют установить области экономичности сравнимых системов тяги.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Șt. Staicu D.C. 533.621.01 : 629.13

Study of Supersonic Flow Around a Cross-shaped Empennage

This paper deals with the study of supersonic motion around a thin cross-shaped empennage in the hypothesis of an antisymmetric incidence distribution (forced antisymmetry) for the vertical plane, whose leading edges are subsonic.

The cases for which the leading edge of the horizontal plane is subsonic or supersonic are treated. Thus, the disturbance axial speeds on the wing and plate, as well as their aerodynamic characteristics are determined. Studies are made on various special cases of wings, which can be obtained starting from the considered cross-shaped system, comparisons being made with the results obtained by the direct treatment method. The results obtained are useful for the determination of the aerodynamic characteristics and of the forces which operate on cross-shaped empennages of rockets and supersonic aircrafts.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

P. Dimo, I. Sipoș D.C. 621.375 : 621.3.024 : 681.14 : 518.5

The Operational Amplifiers of the MAC-1 Analog Computer

This paper presents the technical characteristics of the operational amplifiers used in the MAC-1 analog computer. The variants suggested are investigated and the selection of one of them is justified. Some special problems which have appeared during the investigations, are indicated.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D. Dascalu D.C. 621.3.018 : 621.385.2 : 621.38 : 621.3.023

Simple Method for the Calculation of Vacuum Diode High-frequency Characteristics

The small signal a.c. operation of the vacuum diode at very high frequencies where the electron transit time effect occurs is discussed. The well-known expression of the vacuum diode impedance is calculated in a very simple way.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Al. Popa, A. Carabulea D.C. 621.33 : 625.286—833.6

Contributions to the Technical and Economic Study on the Electrical and Diesel Systems

The study demonstrates the main technical and economic criteria that can be used in comparing variants which show the way applied to the annual outlays of calculation $Z = f(q)$ function of traffic compha-sizing the peculiarities when other cryteria are applied.

As to the application of $Z = f(q)$ criterian the case of constant and variable investissements in time with the setting in fonction of the railway electrified by portions has been taken into account. It is demonstrated that on applying the cost price system the electrification becomes advantageous in better conditions that those shown by the criterian $Z = f(q)$ when tracing the regression curves and not the variation of the cost price expenses in traffic function curves that are traced $Z = f(q)$ permit the fixing up of the economic efficiency fields in the traction systems.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Résumé

C.D. 517.9

D. D. Bainov

Résolution du problème infini de limite pour une équation différentielle du second degré

Dans cette note, on résoud des équations (1) en utilisant la série Dirichlet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

C.D. 517 : 535

D. Filipescu

Coup d'oeil sur quelques transformations géometriques en optique et les groupes Lie

Dans ce travail on démontre que les translations convergentes ayant le même centre constituent un gronpe Lie et on étudie le cas particulier quand le vecteur respectif est parallèle à une direction donnée.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

C.D. 538.24 : 549.73 : 546.711 : 546.47

D. Iordache

Étude de la courbe dynamique de magnétisation de quelques ferrites mixtes de manganèse et zinc, de haute perméabilité

Cette étude a pour but d'examiner le comportement des paramètres magnétiques caractérisant les ferrites de manganès zinc de haute perméabilité dans différentes conditions de température, chocs, champs magnétiques extérieurs. On analyse la dépendance des paramètres Rayleigh de la température, ainsi que les déviations à la loi de Rayleigh, apparaissant dans le domaine des champs magnétiques faibles. Pour ces déviations on établit des formules analytiques de représentation. Dans le domaine des champs magnétiques moyens, on cherche à tirer — de l'étude expérimentale — des conclusions sur la forme de la dépendance fonctionnelle de l'inductance magnétique et de la perméabilité différentielle, selon l'intensité du champ magnétique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

C.D. 669.28.004.8

V. T. Marculeţiu, I. Strugaru, Fl. Popescu

Récupération du molybdène des déchets provenus de différents produits fabriques

La méthode de la stabilité des conditions de récupérarion du molybdène des déchets provenus de l'industrie métallurgique. Le molybdène passe en molybdate de soude et ensuite à l'aide du chlorure d'ammonium, en molybdate d'ammonium.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Zusammenfassung

D.K. 517.9

D. D. Baicov

Die Lösung des unendlichen Randwertsproblems für eine Differenzgleichung zweiter Ordnung

In vorliegender Notiz werden Gleichungen (1) unter Benützung der Serie Dirichlet gelöst.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.K. 517 : 535

D. Filipescu

Betreffend einige geometrische Umformungen in der Optik und den Lie-Gruppen

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die konvergente Parallelverschiebung (Translation) mit demselben Mittelpunkt die Gruppe Lie bildet und es wird der besondere Fall durchprüft, in dem der entsprechende Vektor parallel mit einer gegebenen Richtung ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D. Iordache D.K. 538.24 : 549.73 : 546.711 : 546.47

Das Studium der dynamischen Magnetisierungskurve einiger gemischter Mangan — und Zinkferrite mit einer hohen Permeabilität

Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt das Verhalten der magnetischen Parameter zu studieren, die die Mangan- und Zinkferrite mit einer hohen Permeabilität unter verschiedenen Temperaturbedingungen, Stössen und äusseren, magnetischen Feldern kennzeichnen.

Es wird die Abhängigkeit der Rayleigh — Temperaturparameter, sowie die Abweichungen von dem Rayleigh-Gesetz die in dem Bereich der schwachen magnetischen Felder auftreten, analysiert. Für diese Abweichungen werden analytische Darstellungsformeln bestimmt. In dem Bereich der mittleren magnetischen Feldern wird — zum Experimentalstudium — versucht Schlussfolgerungen betreffend die Form der funktionalen Abhängigkeit der magnetischen Induktivität und der Differenzpermeabilität von der magnetischen Intensität zu ziehen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.K. 669.28.004.8

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru, Fl. Popescu

Rückgewinnung des aus Abfällen verschiedener Erzeugnissen entstammenden Molybdän

Die Methode der Stabilität der Bedingungen zur Rückgewinnung des Molybdän aus den der Metallindustrie entstammenden Abfällen. Das Molybdän verändert sich zuerst in Natriummolybdat und dann mit Hilfe des Ammoniumchlorids in Ammoniummolybdat.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

C.D. 665.5.051 : 661.7 : 661.651

I. Drimuş, A. Măcelaru
Th. Spindler, I. Ionescu, V. Poleacov

Valorification complexe du dodécane par oxydation a l'air en presence d'acide borique

On étudie dans l'article l'oxydation du n-dodécane en présence d'acide borique, en vue d'obtenir le meilleur rendement possible en n-dodécanols (produits intermédiaires de grande importance dans l'industrie des détergents biodégradables). On a également séparé les acides gras formés au cours du processus d'oxydation.

L'ouvrage s'est aussi proposé d'élucider le problème controversé du lieu d'attaque de l'oxygène dans la molécule du dodécane.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

C.D. 621.313.33 : 538 : 621—25

L. Bompa

Des considération théoriques sur le couplage asynchrone a rotor ferromagnétique

Dans cet article on présente une méthode d'approximation du champ électromagnétique d'un milieu ferromagnétique en mouvement. On considère d'abord constante la perméabilité du matérial ferromagnétique de l'induit et sur cette hypothèse on établit la solution des équations du champ pour des conditions de frontière données. On passe ensuite à la considération de la nonlinéarité du matériel, utilisant une méthode graphique.

A la fin on calcule le couple de la machine et on le compare à certains résultats de la littérature, vérifiés expérimentalement.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

C.D. 621.791.75 : 621.37

P. Sonea, I. Sonea

Etude du comportement des particules de metal dans un arc électrique vibré par des oscillations ultra-sonores transversales, selon un modele hydro-dynamique

On étudie certains phénomènes physiques qui accompagnent la particule de métal en mouvement dans un arc électrique de soudure sous flux, lorsque l'arc est soumis à l'action d'un champ ultra-sonore.

On établit les équations de mouvement de la particule, tenant compte des constantes physiques du milieu, déterminant l'intensité du champ ultra-sonore pour les conditions d'un arc électrique utilisé à la soudure.

On peut obtenir de cette manière des structures plus fines et des caractéristiques mécaniques supérieures dans les joints soudés.

On indique aussi certains résultats des essais expérimentaux, les structures ainsi que les conclusions concernant l'application pratique de cette étude.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.K. 665.5.051 : 661.7 : 661.651

I. Drimuş, A. Măcelaru, Th. Spindler, I. Ionescu, V. Poleacov

Die komplexe Verwertung des Dodekans durch Luftoxidation in Anwesenheit der Borsäure

In der Arbeit wurde die Oxidation des n-Dodekans in Anwesenheit der Borsäure verfolgt um dadurch eine grössere Ausbeute der n-Dodekanolen (Zwischenprodukte von grösster Wichtigkeit in der Industrie der biodegradierenden Waschmittel) zu erreichen. Gleichzeitig wurden die Fettsäuren, die sich im Laufe des Oxidationsvorgangs gebildet hatten, getrennt.

Die Arbeit hat auch die Klärung der strittigen Frage betreffend der Angriffsstelle des Sauerstoffs in der Dodekanmoleküle verfolgt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

L. Bompa

D.K. 621.313.33 : 538 : 621—25

Theoretische Betrachtungen über die asynchrone Kupplung mit dem ferromagnetischen Läufer

In der Arbeit wird eine Annäherungsmethode des elektromagnetischen Feldes aus einem ferromagnetischen, sich in Bewegung befindenden Medium vorgestellt. Zuerst wird die Permeabilität des ferromagnetischen Ankermaterials als konstant betrachtet und auf dieser Hypothese wird die Lösung der Gleichungen des Felds mit an der Grenze gegebenen Bedingungen bestimmt. Darau wird zu der Betrachtung der Nichtlinearität des Materials, durch Benützung einer graphischen Methode übergegangen.

Am Schluss wird das Drehmoment der Maschine berechnet und mit einigen Ergebnissen der Literatur, die experimental geprüft wurden, verglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D.K. 621.791.75 : 621.37

P. Sonea, I. Sonea

Das Studium des Verhaltens der Metallteilchen auf hydrodinamischen Modell im elektrischen Lichtbogen, der durch querlaufende Ultraschallschwingungen vibriert wird

Es werden einige physikalische Phänomene studiert, die das sich fortbewegende Metallteilchen im elektrischen Schweisslichtbogen unter der Flusschicht begleiten, während dieser der Wirkung eines Ultraschallfelds unterworfen ist.

Es werden die Bewegungsgleichungen des Teilchens unter Berücksichtigung der physikalischen Mediumskonstante bestimmt und gleichzeitig die Intensität des Ultraschallfeldes bei Benützung eines elektrischen Lichtbogens zum Schweissen festgesetzt. Auf diese Art können für die Schweissnähte feinere Strukturen und höhere Merkmale erhalten werden.

In der Arbeit werden einige Ergebnisse der Experimentalversuche, sowie die Strukturen und Folgerungen betreffend die praktische Anwendbarkeit angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Şt. Staicu C.D. 533 : 621.01 : 629.13

Étude de l'écoulement supersonique autour d'un empennage cruciforme

Cet article s'occupe de l'étude du mouvement supersonique autour d'un empennage cruciforme mince dans l'hypothèse d'une distribution d'incidence antisymétriques (antisymétrie forcée) pour le plan vertical dont les bords d'attaque sont sous-soniques.

On traite les cas pour lesquels le bord d'attaque du plan horizontal est soussonique ou supersonique. On détermine ainsi les vitesses axiales de perturbation sur l'aile et la plaque, ainsi que les caractéristiques aérodynamiques de celles-ci. Les résultats obtenus sont utiles pour la détermination des caractéristiques aérodynamiques et des forces actionnant sur les empennages cruciformes des fusées et des avions supersoniques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

P. Dimo, I. Sipos C.D. 621.375 : 621.3.024 : 681.14 : 518.5

Amplificateurs opérationnels de la machine analogique à calculer M.A.C. — 1.

Le travail présente les caractéristiques techniques des amplificateurs opérationnels utilisés dans la machine analogique à calculer MAC—1. On examine les variantes proposées et on justifie la sélection d'une d'entre elles. On indique quelques problème spéciaux, apparus au cours des recherches.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D. Dascălu C.D. 621.3.018 : 621.385.2 : 621.38 : 621.3.023

Une méthode simple pour le calcul des caractéristiques de haute fréquence de la diode à vide

On étudie le fonctionnement de la diode à vide pour de petite signaux et de très hautes fréquences, où apparaît le temps de passage des électrons. On calcule à l'aide d'une méthode très simple l'expression connue de l'impédence de la diode à vide.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Al. Popa, A. Carabulea C.D. 621.33 : 625.282—833.6

Contributions à l'étude technique et économique des systèmes de traction électrique et Diesel.

Dans cette étude sont présentés les principaux critères techniques et economiques qui peuvent être utilisée à la comparaison des variantes et il est démontré le mode d'application des frais annuels de calcul $Z = f(q)$ fonction de trafic mettant en évidence les particularités d'applications d'autres critères.

A l'application du critère $Z = f(q)$ on a tenu compte du cas investissements constants et variables dans le temps et sans la mise en fonction de la voie ferée électrifié par portions. Il est démontré que sur la base de l'application du prix de revient, l'électrification devient rentable dans les conditions plus d'utiliser au traçage des courbes de regression la fonction $Z = f(q)$ et non la variation des frais du prix de revient en fonction de trafic. On trace les courbes $Z = f(q)$ qui permettent la détermination des domaines d'économicité des systèmes de traction comparées.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Ş t. S t a i c u D.K. 533.621.01 : 629.13

Studium des Überschalleckstroms um ein kreuzförmiges Schwanzleitwerk

Vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Studium der Überschallbewegung um ein dünnes kreuzförmiges Schwanzleitwerk in der Hypothese der Verteilung von antisymmetrischen Inzidenzen (erzwungene Antisymmetrie) für den senkrechten Plan, dessen Flügeleintrittsränder für Überschall ausgelegt sind.

Es werden Fälle mit Überschall — und Unterschall — flügeleintrittskante des waagerechten Plans behandelt. Auf diese Weise werden die axialen Perturbationsgeschwindigkeiten auf den Flügel und die Platte, sowie die aerodynamischen Charakteristiken derselben bestimmt. Es werden Bemerkungen betreffend die verschiedenen Spezialfälle der Flügel gemacht, die ausgehend von dem erwogenen kreuzförmigen System durch die angestellen Vergleiche mit den, durch die direkte Behandlungsmethode erhallten Ergebnissen erzelt werden. Die erlangten Ergebnisse nützen zur Bestimmung der aerodynamischen Charakteristiken und der Kräfte, die auf das kreuzförmige Schwanzleitwerk der Racketen und Überschallflugzeuge wirken.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

P. D i m o, I. S i p o ş D.K. 621.375 : 621.3.024 : 681.14 : 518.5

Eingreifender Verstärker des Analogrechners MAC-1

In vorliegender Arbeit werden die technischen Daten der eingreifenden Verstärker, die in dem Analogrechner MAC — 1 benützt werden, bekanntgemach. Es werden die vorgeschlagenen Varianten geprüft und die Wahl einer davon gerechtfertigt. Es werden einige besondere, im Laufe der Forschungen aufgetretene Fragen angegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

D. D a s c ă l u D.K. 621.3.018 : 621.385.2 : 621.38 : 621.3.023

Eine einfache Methode zur Berechnung Hochfrequenzcharakteristiken der Vakuumdiode

Es wird der Betrieb der Vakuumdiode bei kleinen Signalen und sehr hohen Frequenzen bei denen der Übergangszeiteffekt der Elektronen auftritt, erforscht.

Der bekannte Ausdruck der Diodenimpedanz mit dem Vakuum wird durch eine sehr einfache Methode berechnet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

Al. P o p a, A. C a r a b u l e a D.K. 621.33 : 625.282—833.6

Beitrag zum techno-ökonomischen Studium der elektrischen Zugförderungs-und Dieselsysteme

Es werden die hauptsächlichsten, bei dem Vergleich der Varianten, möglich verwendbare techno-ökonomische Kriterien dargestellt und die Anwendungsart der jährlichen Ausgeben der Rechnung $Z = f(p)$ Trafikfunktion gezeigt, indem man die Anwendungseigentümlichkeiten der anderen Kriterien hervorhebt.

Bei der Anwendung des Kriteriums $Z = f(q)$ berücksichtigte man den Fall der konstant-und mit der Zeit veränderlichen Aufwendungen, mit und ohne Insbetriebsetzen, der auf Strecken, elektrifizierte Eisenbahnlinie.

Man zeigt, dass auf Grund der Anwendung des Kostenpreises, die Elektrifizierung in einfacheren Bedingungen wirtschaftlicher wird, als das $Z = f(q)$ Kriterium zeigt.

Man empfehlt, bei der Rückschrittskurvenzeichnung, die Anwendung der $Z = f(q)$ Funktion, und nicht die vom Trafik abhängende Veränderung der Kostenpreisausgeben.

Man zeichnet die Kurven $Z = f(q)$, die die Bestimmung der Ökonomizitätsbereiche der Vergleichzugförderungs systeme ermöglichen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 2/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

MATEMATICĂ

C.Z.: 517.9

РЕШЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Д. Д. БАЙНОВ
Машинно-электротехническом институте — София

В настоящей заметке применим математический аппарат, использованный в [1] для решения следующей задачи:

Найти решение уравнения

$$y'' + y' + p_1 y y' + p_2 y^3 = 0 \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = A$, $y'(\infty) = 0$.

Решение уравнения отыщем в виде ряда Дирихле

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i a^i e^{-i x} \tag{2}$$

где величина a является параметром, подчиненным условию $|a| < 1$.

Замещаем [2] в [1] и получаем следующие рекуррентные формулы для определения постоянных b_i

$$b_2 = \frac{p_1 b_1^2}{3} \tag{3}$$

$$b_i = \frac{1}{i(i-1)} \left[p_1 \sum_{v=1}^{i-1} v\, b_v\, b_{i-v} - p_2 \sum_{r=1}^{i-2} \sum_{m=r+1}^{i-1} b_r\, b_{m-r}\, b_{i-m} \right]$$

Если $|b_i| \leqq 1$, то ряд [2] является абсолютно и равномерно сходящимся на полуоси $x > -\varepsilon$, где ε является достаточно малым положительным числом.

Полагаем $b_1 = 1$. Предполагаем, что $|b_k| \leqq 1$. Тогда следуя методу математической индукции получаем

$$|b_{k+1}| \leqq \frac{1}{(k+1)k} \left[|p_1| \sum_{v=1}^{k} v\, |b_v|\, |b_{i-v}| + \right.$$

$$\left. + |p_2| \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{m=r+1}^{k} |b_r|\, |b_{m-r}|\, |b_{k+1-m}| \right] \leqq \frac{1}{2} \left(|p_1| + |p_2| \frac{k-1}{k+1} \right) \tag{4}$$

* Manuscris predat la redacție la 20 mai 1966.

Условие

$$|p_1| + |p_2| \leqq 2 \tag{5}$$

обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость ряда [2]. Этим самым мы получили однопараметрическое семейство решений уравнения [1], удовлетворяющих условию $y'(\infty) = 0$. Параметр a определяем из второго граничного условия $y(0) = A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кравченко Т. К., Яблонский А. И.* Решение бесконечной граничной задачи для одного уравнения третьего порядка. Дифференциальные уравнения, т. I, № 3, Минск 1965 г. 327—330.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

C.Z.: 517:535

ASUPRA UNOR TRANSFORMĂRI GEOMETRICE ÎN OPTICĂ ȘI GRUPURILE LIE *

DUMITRU FILIPESCU

C. Ionescu Bujor, în lucrările [1, 2] definește o trasformare pe care o numește translație convergentă și studiază proprietățile acestei transformări.

În această lucrare vom arăta că translațiile convergente cu același centru formează grupuri Lie, respectiv cu 2 și 3 parametri, apoi vom studia cazul particular, al translațiilor convergente cu același centru, plane și în spațiu cînd vectorul respectiv este paralel cu o direcție dată.

De asemenea vom studia ecuațiile cu derivate parțiale care determină invarianții acestor transformări.

I. Translațiile convergente în plan

1. *Translațiile convergente cu același centru O și vector $\overline{V}$, din plan, formează grup Lie.*

Formulele de transformare, pentru translațiile convergente în plan sînt date de relațiile:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1 - \frac{xV_x + yV_y}{x^2 + y^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1 - \frac{xV_x + yV_y}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Aceste transformări, cum se verifică ușor, formează grup Lie cu doi parametri.

2. Dacă ne situăm în cazul particular cînd vectorul $\overline{V}$ are o direcție fixă, direcție care poate fi luată drept una din axe, spre exemplu axa OX, atunci avem deaface cu grupuri Lie, cu un parametru:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1 - \frac{xV}{x^2 + y^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1 - \frac{xV}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

* Manuscris predat la redacție la 20 mai 1966.

3. *Teoremă. Grupul translațiilor convergente de centrul* O *și* $\overline{V}$, *de direcție dată din plan, este isomorf cu grupul translațiilor paralele cu o axă.*

Această proprietate rezultă din faptul că grupurile transformărilor (1) și (2) posedă transformarea identică pentru $\overline{V} = \overline{V}_0$ unde, $V_0 = O$.

Într-adevăr, transformările (2) sînt caracterizate de sistemul de ecuații diferențiale

$$(x_1^2 + y_1^2)\frac{dx_1}{x_1^2} = (x_1^2 + y_1^2)\frac{dy_1}{x_1 y_1} = -dV \tag{3}$$

care are ca integrale prime

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{y_1} &= C_1 \\ x_1 + \frac{y_1^2}{x_1} + V &= C_2 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Cum pentru $V = O$, avem

$$x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y$$

rezultă

$$C_1 = \frac{x}{y}$$

$$C_2 = x + \frac{y^2}{x}$$

Astfel relațiile (4) capătă forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{y_1} &= \frac{x}{y} \\ x_1 + \frac{y_1^2}{x_1} &= x + \frac{y^2}{x} - V \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Care rezolvate în raport cu x_1 și y_1 dau formulele de transformare (2).

Dacă se face schimbarea de variabile

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{x}{y} \\ t &= x + \frac{y^2}{x} \end{aligned}\right\}$$

și notînd cu

$$s_1 = \frac{x_1}{y_1}$$

$$t_1 = x_1 + \frac{y_1^2}{x_1}$$

relațiile (5) primesc forma

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s \\ t_1 &= t - V \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

care constituie grupul de translații de-a lungul axei t.

4. Invarianții translațiilor convergente (2) sînt dați de ecuația

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

Funcțiile invariante sînt deci de forma

$$F = \Psi\left(\frac{x}{y}\right). \tag{8}$$

Orice funcție omogenă de gradul zero este un invariant al acestor transformări.

II. Translațiile convergente din spațiu

1. *Translațiile convergente de centru O și vector $\overline{V}$ din spațiu, formează de asemenea grup Lie cu 3 parametri.* Acest lucru rezultă imediat din forma relațiilor care este următoarea :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1 - \frac{xV_x + yV_y + zV_z}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1 - \frac{xV_x + yV_y + zV_z}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ z_1 &= z\left(1 - \frac{xV_x + yV_y + zV_z}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

2. În cazul particular cînd vectorul $\overline{V}$ are o direcție fixă, ce poate fi luată drept axă Ox, relațiile precedente, capătă forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\left(1 - \frac{xV}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ y_1 &= y\left(1 - \frac{xV}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ z_1 &= z\left(1 - \frac{xV}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

acestea, formînd grup Lie cu un parametru.

3. *Teoremă. Grupul translațiilor convergente din spațiu de centru O și vector* $\overline{V}$, *de direcție dată este isomorf cu grupul translațiilor paralelă cu o axă.*

Transformările (10) sînt caracterizate de transformarea identică și de sistemul de exucații diferențiale :

$$\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1}dx_1=\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1y_1}dy_1=\frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1z_1}dz_1=-dV \tag{11}$$

care are ca integrale prime

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1}{z_1}&=C_1\\ \frac{y_1}{z_1}&=C_2\\ x_1+\frac{y_1^2}{x_1}+\frac{z_1^2}{x_1}&=-V+C_3\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dar pentru $V=0$, $x_1=x$, $y_1=y$, $z_1=z$, deci relațiile precedente devin

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1}{z_1}&=\frac{x}{z}\\ \frac{y_1}{z_1}&=\frac{y}{z}\\ x_1+\frac{y_1^2}{x_1}+\frac{z_1^2}{x_1}&=x+\frac{y^2}{x}+\frac{z}{x}-V\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

care rezolvate în raport cu x_1, y_1, z_1 dau relațiile (10).

Făcîndu-se schimbările de variabile

$$\left.\begin{aligned}s&=\frac{x}{z}\\ t&=\frac{y}{z}\\ u&=x+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{x}\end{aligned}\right\}$$

relațiile (13) se scriu

$$\begin{aligned}s_1&=s\\ t_1&=t\\ u_1&=u-V\end{aligned}$$

care constituie un grup de translații de-alungul axei u.

4. Invarianții translațiilor convergente (10) sînt dați de ecuația :

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{xz}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

sau

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

adică, *funcțiile invariante sînt de forma :*

$$F=\varphi\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right).$$

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ionescu Bujor, C.* Transformări geometrice în optică G.M.F. 5 mai 1961.
2. *Ionescu Bujor, C.* Asupra unor transformări optice. Buletinul I.P.B. Tom XXIII, Fascicola 2, aprilie-iunie 1961.
3. *Vrînceanu, Gh.* Lecții de Geometrie diferențială, vol. I. Editura didactică și pedagogică, 1962.
4. *Ionescu Bujor, C.* Sur les transformations optiques de l'espace. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", martie-aprilie 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

FIZICĂ

C.Z.: 538.24 : 549.73 : 546.711 : 546.47

L'ÉTUDE DE LA COURBE DYNAMIQUE D'AIMANTATION D'UN FERRITE MIXTE DE MANGANÈSE ET ZINC, DE HAUTE PERMÉABILITÉ *

$$\left(\mu_i = 2000\,\frac{Gs}{Oe} \pm 25\%;\right.$$

composition: MnO 29 mol%, ZnO 21 mol%, Fe_2O_3 50 mol%$\left.\right)$

DAN IORDACHE

L'ouvrage présent se propose de faire une étude en détail du problème de la courbe d'aimantation dans le cas du ferrite de Mn-Zn, chose qui n'a pas été trouvée dans la littérature étudiée par nous ([1] — [9]).

Nous considérons utile de diviser la courbe dynamique d'aimantation en trois parts :

— le domaine des champs faibles (le domaine de validité de la loi Rayleigh),

— le domaine des champs moyens (qui est situé autour du champ magnétique pour lequel la perméabilité totale prend sa plus grande valeur),

— le domaine des champs puissants (ou le domaine dans lequel on tend vers la saturation).

Le courbe dynamique d'aimantation sera étudiée dans chacun de ces domaines, sauf le domaine des champs puissants qui fera l'objet d'une prochaine étude.

1. — Le domaine de Rayleigh

Dès 1887, Rayleigh [10] a montré qu'aux faibles intensités du champ magnétique $\left(H \simeq \frac{1}{20} H_c\right)$, entre celui-ci et l'induction magnétique qui apparaît dans un matériel ferromagnétique, il y a une liaison exprimée par la loi :

$$B = \mu_i H + RH^2 \qquad (1)$$

* Manuscris predat la redacție la 1 decembrie 1965.

où :

μ_i = la perméabilité initiale du matériel, et

R = la „constante" (plus correctement le paramètre) de Rayleigh.

Erwing [11] a montré que autant μ_i que R dépend du mode de désaimantation de l'échantillon, avant le commencement des mesures. Legg W. [12] a montré qu'on peut généraliser la loi de Rayleigh pour tous les ferromagnétique polycristallins, à condition que l'échantillon ne présente pas d'entrefer, et qu'il ait effectué une désaimantation préalable.

En analysant les déplacements des parois des domaines d'aimantation spontanée, L. Néel [13], [14] a donné une base théorique de la loi de Rayleigh, au niveau des théories modernes du ferromagnétisme.

De la relation (1) il suit immédiatement :

$$\mu_{tot.} = \mu_i + RH \tag{2}$$

et :

$$\mu_{diff.} = \mu_i + 2RH \tag{3}$$

montrant que, dans le domaine des champs faibles, la perméabilité totale, aussi bien que la différentielle, présente une variation linéaire par rapport l'intensité du champ magnétique, la pente de la caractéristique $\mu_{diff.} = f(H)$. étant deux fois plus grande que celle de la caractéristique $\mu_{tot.} = f(H)$.

Pour déterminer la perméabilité totale dynamique, nous avons mesuré l'inductance d'un tore du matériel étudié (maferrite 2000) bobiné uniformément, dans une seule couche. La mesure de l'inductance a été executée

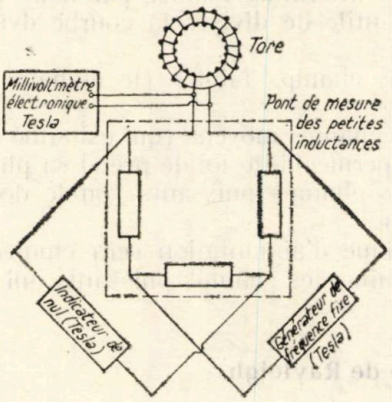


Fig. 1

avec le montage de la fig. 1, à la fréquence de 10 kc/s. Sur la base des résultats expérimentaux on a calculé la perméabilité totale par la formule :

$$\mu_{tot.} = \frac{L_{\mu H}}{4{,}6 \cdot 10^{-3}\, n^2 h \cdot \log \dfrac{D_{ext.}}{D_{int.}}} \tag{4}$$

et l'amplitude du champ magnétique appliqué, par l'expression :

$$H_{mOe} = \frac{0{,}4\sqrt{2}\cdot n\, U_{mv}}{D_m \cdot L_H \sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}\cdot \omega_{\frac{rad}{s}}} \qquad (5)$$

„n" étant le nombre des spires du bobinage disposé sur le tore ; $D_{ext.}$, $D_{int.}$, D_m et h sont respectivement le diamètre extérieur, intérieur, moyen et l'hauteur du tore en cm ; U = la valeur efficace de la tension alternative appliqué aux extremités de l'enroulement du tore, mesurée par le millivoltmètre électronique ; Q = la valeur du facteur de qualité correspondant à l'inductance mesurée (ici R = la résistance du bobinage + la résistance équivalente aux pertes totales dans le ferrite). $\omega = 2\pi f$ où f est la frequence de la tension alternative.

Les erreurs de mesure de l'instalation décrite ci-dessus étant :

— maximum 2% à la mesure de l'inductance } inductance
— maximum 10% à la mesure de Q } mètre Tesla
— maximum 5% à la mesure de la tension (millivoltmètre Tesla)

erreurs qui sont assez grandes ; on a cherché de déterminer — à l'aide d'une analyse minutieuse — les autres sources éventuelles d'erreurs, et de les éliminer ou de les réduire au minimum possible.

L'influence de l'histoire antérieure de l'échantillon.

Avant chaque groupe de mesures, pour une certaine température, l'échantillon a été désaimanté à l'aide de „chocs" de champ magnétique alternatif décroissant lentement vers zéro.

Les erreurs dues à l'effet „dimensionnel" (résonance „spatiale") (v. Polder, [4] ; aussi [15]).

La longueur d'onde λ_m dans le matériel : $\lambda_m = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}} \approx 670$ m. dans les conditions de nos mesures $\left(f = 10 \text{ kc/s} ; \mu = 2000\,\frac{Gs}{Oe}\right)$, étant beaucoup plus grande que les dimensions géométriques des tores utilisés (de l'ordre des millimètres), les erreurs dues à la résonance „spatiale" peuvent être négligées.

Les erreurs dues à la présence du champ magnétique terrestre. L'influence du champ magnétique terrestre est en grande partie diminuee par la forme fermée du circuit magnétique du tore. Cependant on a effectué des mesures d'inductances des tores pour une certaine température, et une valeur déterminée du champ magnétique (de l'ordre de 5 mOe), pour différentes orientations de l'axe des tores par rapport avec la direction locale de l'intensité du champ magnétique terrestre. Les mesures ont montré (tableau 1) qu'il ne se produit aucune modification notable de l'inductance.

Les erreurs dues au phénomène de „désaccomodation". On connaît que le phénomène de désaccomodation consiste en une variation en temps de la

Tableau 1

$f = 10$ kc/s ; $H = 5$ mOe

La position du tore / $L_{\mu H}$ de l'enroulement du tore	L'angle fait de l'axe du tore avec la direction locale de l'intensité du champ magnétique terrestre					L'axe du tore parallèle à l'intensité du champ magnétique terrestre
	0°	45°	90°	135°	180°	
E1	901,1	901,1	901,1	901,1	901,1	901,1
E2	1299	1299	1299	1299	1300	1300

perméabilité magnétique, variation évaluée habituellement par le coefficient i_t défini par la relation :

$$i_t = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \cdot \log \frac{t_2}{t_1}} \tag{6}$$

où μ_2, μ_1 sont les perméabilités magnétiques totales (correspondantes à une certaine valeur du champ magnétique) aux moments t_2, respectivement t_1. (On considère comme origine du temps l'instant où l'échantillon a été désaimanté). Le coefficient i_t est fonction de la température à laquelle découle le procès, et de l'intensité du champ magnétique alternatif auquel est soumis l'échantillon. Pour les nécessités de notre ouvrage nous avons défini un coefficient de temps de la perméabilité totale, donné par la relation :

$$tK_\mu = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 (t_2 - t_1)} = \frac{L_2 - L_1}{L_1 (t_2 - t_1)} \tag{7}$$

pour une certaine valeur de l'intensité du champ magnétique appliqué. Evidemment, la valeur du coefficient tK_μ introduit ci-dessus, dépendra de la grandeur de l'intervalle $(t_2 - t_1)$ considéré, en diminuant avec la croissance de cet intervalle. L'élévation de la portion de la courbe de première aimantation correspondante au domaine de Rayleigh, durant dans le cas de nos mesures env. 15 minutes, nous avons déterminé tK_μ pour des intervalles de temps de cet ordre de grandeur, pour trois types de matériaux ferrites Mn-Zn, qui contiennent respectivement 50 mol%, 55 mol%, et 60 mol% de Fe_2O_3. On a constaté une diminution rapide des propriétés d'instabilité en temps du ferrite Mn-Zn quand le contenu an Fe_2O_3 tend vers 50 mol%, chose en accord avec les constatations de la littérature [16]. C'est le motif pour lequel on a choisi pour l'étude le type de ferrite ayant la composition suivante : MnO 29 mol%, ZnO 21 mol%, Fe_2O_3 50 mol%, pour lequel les coefficients d'instabilité en temps de la perméabilité ont de petites valeurs. Le tableau 2 nous montre que — dans le cas choisi — cet effet introduit

Tableau 2

Tore $E2$; $H_m = 12$ mOe ; $f =$ kc/s

$t_2 - t_1$ (minutes)	5	15	30	60	180	360
tK_μ (10^{-6} s^{-1})	2,88	1,92	1,44	0,84	0,32	0,20
Tore $E1$; $H_m = 5$ mOe ; $f = 10$ kc/s						
tK_μ (10^{-6} s^{-1})	2,687	1,748	1,496			

aussi des erreurs négligeables (plusieurs fois plus petites que les erreurs dues aux autres causes) dans les résultats des mesures effectuées.

En ce qui concerne les *effets des chocs mécaniques*, [17] ils peuvent consister dans la modification de la perméabilité ou du facteur de qualité correspondant à l'enroulement du tore, causée par l'échange de la résistance de quelques contacts imparfaits. On a assuré le montage contre les chocs mécaniques.

Aussi bien *la variation (non-controlée) de la temperature* peut avoir lieu à cause des changements dans le milieu ambiant ou à cause d'échauffement graduel du tore sous l'influence de l'effet calorique dû au courant électrique passé par son enroulement. Dans le premier cas, aussi bien que dans le deuxième, les suites consistent en variations de la perméabilité (qui peuvent avoir des valeurs relativement grandes, dues aux grandes valeurs du coefficient de température de la perméabilité, dans le cas des matériaux ferritiques de haute perméabilité) entraînant des erreurs qui peuvent déformer complètement la caractéristique $\mu_{tot.} = f(H)$. On mentionne que les mesures à différentes températures ont été effectuées dans des chambres thermostat (la chambre Weiss qui assure une constance de la température $\triangle T = \pm 0{,}1°C$, et une chambre pour des températures sous 0°C, qui pouvait présenter une variation maxima de 0,1°C/min).

Les petites valeurs de la puissance dissipée dans le cas de l'élévation du domaine Rayleigh (quelques milliwats), ne peuvent pas provoquer une variation notable de la température du tore, d'autant plus qu'une part considérable de la quantité de chaleur produite est prélevée par le milieu ambiant.

Nous avons pu déterminer la perméabilité totale avec une précision satisfaisante en partant des champs magnétiques alternatifs appliqués ($f = 10$ kc/s) d'amplitude 1 mOe. On a calculé aussi les inductions magnétiques correspondantes à chaque intensité du champ magnétique appliqué, à l'aide de la formule :

$$B = \mu_{tot.} \cdot H \qquad (8)$$

et la perméabilité différentielle :

$$\mu_{diff.}\left(\frac{H_1+H_2}{2}\right)=\frac{B(H_2)-B(H_1)}{H_2-H_1}\quad (H_2 \geqslant H_1) \tag{9}$$

formule qui, dans le domaine de Rayleigh, doit être considérée comme exacte (ce qui résulte des relations (1) et (3). Les graphiques de la fig. 2 attestent

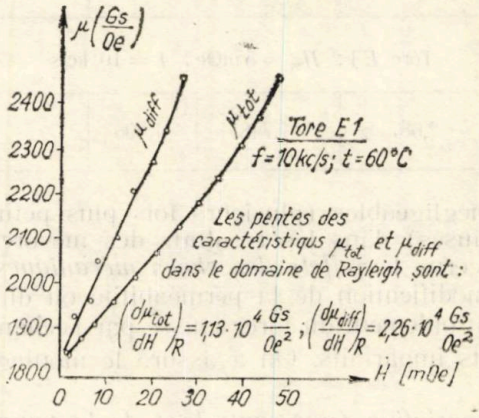


Fig. 2

l'existence d'un domaine de linéairité de $\mu_{diff.}$ et $\mu_{tot.}$ par rapport à l'intensité du champ magnétique (à $t = 60°C$), et son étendue jusqu'à 20—25 mOe à cette température, c'est-à-dire environ $\frac{H_c}{4}$ (les tores étudiés ont eu H_c de l'ordre de 80 mOe à $t = 60°C$). (v. et I. Epelboin [18]). Des graphiques résultés on a pu vérifier que la pente de la droite $\mu_{diff.} = f(H)$ (dans le domaine de Rayleigh) est double par rapport à la pente de la caractéristique $\mu_{tot.} = f(H)$.

1.1. *L'étendue du domaine Rayleigh*

L'intensité la plus grande H_R du champ magnétique alternatif jusqu'où la variation de la perméabilité totale avec l'intensité du champ magnétique est linéaire, peut être évaluée d'une façon peu précise, due tant aux erreurs de mesure, qu'à un certain degré d'appréciation subjective qui est contenue dans cette évaluation. Cependant, tenant compte de l'intérêt que présente cette grandeur, nous avons rédigé le tableau 3, dans lequel apparaît la variation de la limite H_R du domaine Rayleigh avec la température. Comme on peut constater de ce tableau, le domaine Rayleigh décroît avec l'élévation de la température, d'une manière semblable à la réduction du champ coercitif.

Un cas particulier est présenté par la température de 77°C (dans le cas du tore E1), à laquelle le domaine Rayleigh prend une extension d'une grandeur inattendue par rapport à l'allure générale de la courbe $H_R = f(T)$.

Tableau 3

Tore *E*1 ; $f = 10$ kc/s

La température La grandeur	−37°C	−13°C	30°C	60°C	77°C	85°C	96,5°C
H_R (mOe)	90	60	45	26	80	16	8
H_c (mOe) $f = 50$ c/s ; $H_m = 0{,}42$ Oe	176	148,3	109	81,5	76	74,5	—
$\frac{H_R}{H_c}$	0,511	0,405	0,413	0,319	1,052	0,2147	—

On peut en donner l'explication à la base de l'étude des caractéristiques $\mu_{tot.} = f(H)$ avec paramètre — la température, pour les valeurs moyennes de l'intensité du champ magnétique appliqué. Les expériences nous montrent que pour $H < H_R$, la courbure de la caractéristique $\mu_{tot.} = f(H)$ est

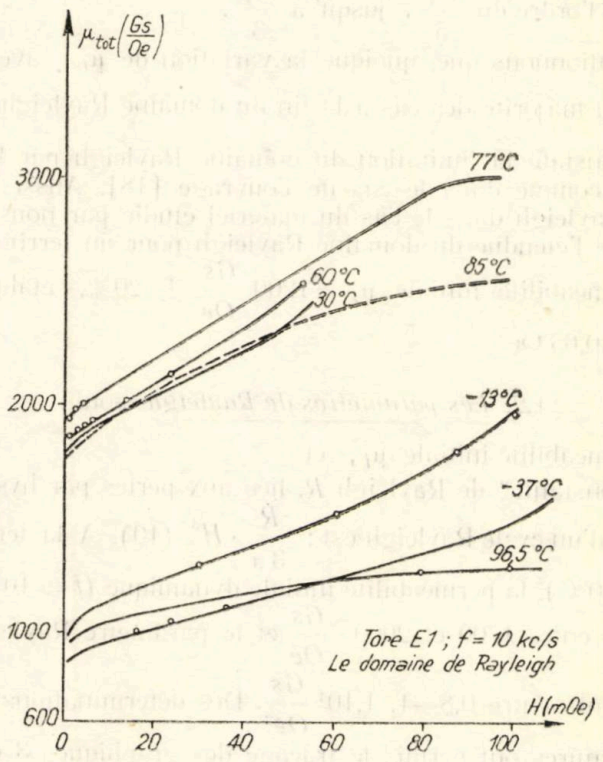


Fig. 3

positive (la concavité dirigée en haute) pour températures pas trop élevées (—37°C . . . 60°C) et négative aux températures voisines au point Curie, qui, dans le cas du matériel étudié, avait des valeurs comprises entre 100 et 110°C. Evidemment on aura une température pour laquelle la courbure de la caractéristique $\mu_{tot.} = f(H)$ sera nulle dans le domaine $H \geqslant \frac{H_c}{5}$, et — dans ce cas — le domaine Rayleigh se prolonge beaucoup, chose qui peut être suivie sur les graphiques de la fig. 3.

Puisque on attend des valeurs plus grandes du H_c à la fréquence de 10 kc/s, par rapport aux valeurs correspondantes à la fréquence $f = 50$ c/s (comme suite du ainsi nommé „frottement" magnétique, le vecteur induction B — établi par des déplacements des parois des domaines — ne peut pas suivre les variations plus rapides de l'intensité du champ magnétique, des valeurs plus grandes du H_c étant nécessaires pour réaliser la désaimantation ; v. Koblenz I. K. [19]), les valeurs des rapports $\frac{H_R}{H_c}$ seront plus petites, et elles seront situées probablement entre les limites 0,2—0,35.

En conclusion, pour le matériel étudié — maferrite 2000, l'étendue du domaine Rayleigh a comme limite supérieure — des intensités du champ magnétique de l'ordre du $\frac{H_c}{5}$, jusqu' à $\frac{H_c}{3}$.

Nous mentionnons que, quoique la variation de $\mu_{tot.}$ avec H est assez rapide $\left(\text{dans la majorité des cas à la fin du domaine Rayleigh } \frac{\mu_{tot.}}{\mu_i} > 1{,}3\right)$, on n'a pas constaté la limitation du domaine Rayleigh par les distorsions harmoniques, comme dans le cas de l'ouvrage [18]. Aussi bien l'étendue du domaine Rayleigh dans le cas du matériel étudié par nous a été trouvée plus petite que l'étendue du domaine Rayleigh pour un ferrite mixte de Mn et Zn de perméabilité initiale $\mu_i = 1200 \frac{Gs}{Oe} \pm 20\%$, établie par Guillaud Ch. [2] : 0,65 Oe

1.2. *Les paramètres de Rayleigh* sont :

— la perméabilité initiale μ_i, et

— la „constante" de Rayleigh R, liée aux pertes par hystérésis, par le fait que l'aire d'un cycle Rayleigh est : $\frac{R}{3\pi} \cdot H_m^3$ (10). A la température ambiante, ($t = 30°C$), la perméabilité initiale dynamique ($f = 10$ kc/s) a eu des valeurs situés entre 1700 et 2000 $\frac{Gs}{Oe}$ et le paramètre Rayleigh correspondant, des valeurs entre 0,8—1. $1{,}10^4 \frac{Gs}{Oe^2}$. Des déterminations faites à différentes températures ont permis le tracage des graphiques 3 et 4, qui nous présentent les changements des paramètres Rayleigh avec la température.

De ces graphiques on peut tirer les conclusions suivantes :

— la variation de la perméabilité initiale dynamique avec la température dans le domaine 30°C.... 77°C est suffisamment lente pour le tore E1 (représentant un cas typique), le coefficient, relatif de température de la perméabilité initiale dynamique correspondant à cet intervalle, ayant la valeur satisfaisante par sa petitesse : $TK/\mu = 1{,}1 \cdot 10^{-6} \frac{Oe}{Gs \cdot °C}$.

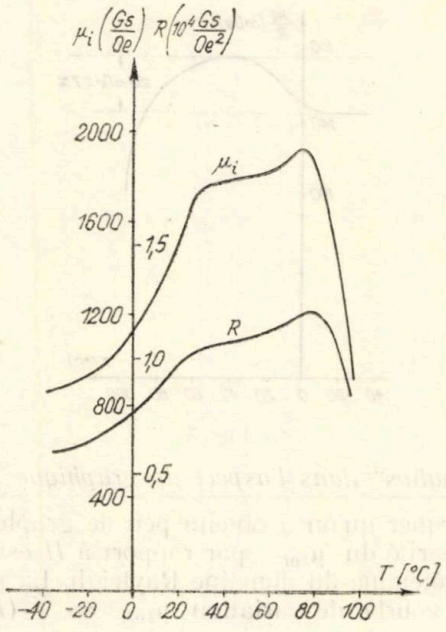


Fig. 4

— dans le domaine —37°C... 30°C la variation de la perméabilité initiale avec la température est beaucoup plus rapide, le coefficient relatif de température de la perméabilité initiale prennant la valeur $TK/\mu = 4{,}35 \cdot 10^{-6} \frac{Oe}{Gs \cdot °C}$, qui peut être appreciée comme noncorrespondante pour des applications du matériel dans ce domaine des températures. On doit remarquer ici que la plupart des applications des ferrites de haute perméabilité (spécialement aux téléviseurs) ont pour domaine de fonctionnement l'intervalle de 20°C à 60°C.

— la variation du paramètre Rayleigh R poursuit presque identiquement la variation correspondante de la perméabilité initiale, chose qui provoque une constance remarquable du rapport $\frac{\mu_i}{R}$ (qui a les dimensions d'un champ magnétique) dans le domaine des températures situées entre —37°C et 85°C (pour le tore E1).

— la variation du paramètre Rayleigh R avec la température tend à rester un peu en retard en comparaison avec la variation de la perméabilité, à mesure que la température s'approche du point Curie. C'est le motif pour lequel le rapport $\frac{\mu_i}{R}$ présente premièrement une legère croissance, atteignant un maximum à la température de 30—40°C pour descendre ensuite, assez rapidement au voisinage du point Curie. (fig. 5).

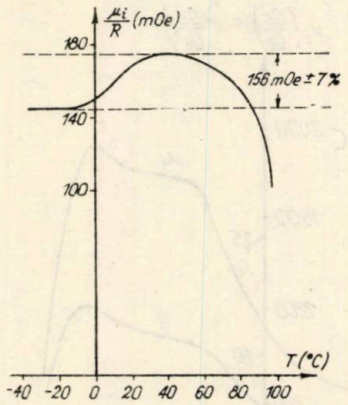


Fig. 5

1.3. *Des „anomalies" dans l'aspect de graphique* $\mu_{tot.} = f(H)$

On doit remarquer qu'on a obtenu peu de graphiques $\mu_{tot.} = f(H)$ pour lesquels la linéarité du $\mu_{tot.}$ par rapport à H est rigoureusement respectée sur l'entière étendue du domaine Rayleigh. La plupart des diagrammes présentent une courbe de variation $\mu_{tot.} = f(H)$ avec la concavité dirigée en bas.

L'allure des graphiques $\mu_{tot.} = f(H)$ nous a suggéré — spécialement dans la domaine des champe très faibles — une „parabole" :

$$\mu_{tot.} = \mu_i + aH^{n-1} \tag{11}$$

d'où :

$$B = \mu_i H + aH^n \tag{12}$$

de coefficient $(n\text{-}1)$ sous-unitaire ; chaque fois qu'on observait des nonlinéarités de la caractéristique $\mu_{tot.} = f(H)$ (cas très fréquents), on a tracé les graphiques log $(\mu_{tot.} - \mu_i) = f(\log H)$. Par un choix convenable de μ_i on a pu ramener toujours ces graphiques à une forme rectiligne, quelques fois dans des conditions très satisfaisantes (v. la fig. 6). Les valeurs des coefficients „a" et „n" de l'équation (11), et l'étendue du domaine de courbure Rayleigh sont données dans le tableau 4. Bien que les valeurs présentées ci-dessus contiennent des irrégularités, chose qui nons montre que les grandeurs „a" et „n" sont très „sensibles" par rapport aux erreurs expérimentales, on peut tirer quelques conclusions :

— le paramètre „a" présente une variation avec la température qui poursuit en quelque sorte la variation respective de la perméabilité initiale

Tableau 4

Tore *EI* ; $f = 10$ kc/s

Le température La paramètre	—37°C	—13°C	30°C	60°C	77°C	85°C	96,5°C
$a\left(10^4 \cdot \frac{Gs}{Oe^2}\right)$	0,389	0,399	0,632	0,69	0,434	0,465	0,146
„n“	1,80	1,675	1,79	1,882	1,76	1,707	1,54
L'étendue du domaine (II) en mOe	93	40	28	10,5	13	67	5

(v. la fig. 7), par rapport à laquelle elle est décalée en avant, c'est-à-dire en sens inverse du graphique de variation du paramètre Rayleigh R avec la température.

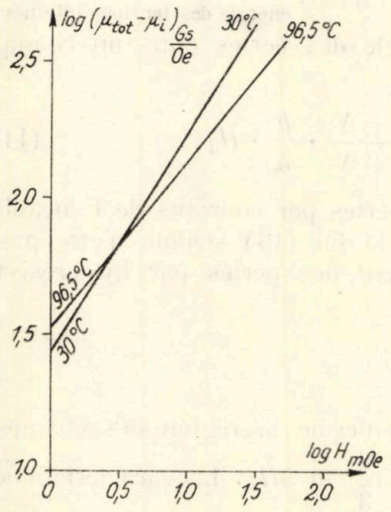


Fig. 6

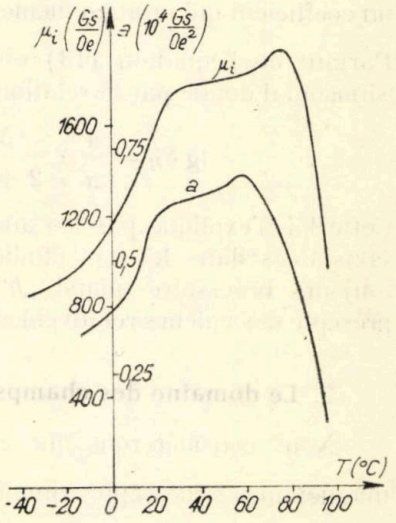


Fig. 7

— l'indice „n“ de la parabole, qui remplace dans l'expression (12) la valeur 2 correspondante à la loi de Rayleigh, a des valeurs comprises entre 1,547 et 1,8825, décroissant assez vite pour des températures qui s'approchent du point Curie.

— l'étendue du domaine décrit par les équations (11), (12) (en conditions incomparablement meilleurs que celles dans lesquelles était satisfaite l'équation classique (1)) baisse avec la croissance de la température, un peu plus rapide que le domaine Rayleigh.

Pour des températures qui dépassent le point (thermique) de changement de la concavité du graphique $\mu_{tot.} = f(H)$ au commencement du domaine des champs moyens (dans le cas du tore EI pour températures $> 77°C$), l'entière portion de la courbe dynamique d'aimantation située à $H\ H_c$ est décrite en conditions satisfaisantes par l'équation (12).

Les constatations de ce paragraphe sont loin de constituer des cas uniques dans la littérature. Ainsi Pawlek (Arch. f. Eisenhüttenwesen, 1942—43, 16, 363) trouve sur des échantillons de FeSi 3%, des variations $\mu_{tot.} = f(H)$ ressemblantes. Des mesures plus complètes ont été effectués dans cette direction par Sixtus [20] sur différents alliages, spécialement de ferronickel. Les matériels étudiés par Sixtus ayant des pertes considérables, l'interprétation donnée par l'auteur à la courbure des caractéristiques $\mu_{tot.}$ et $\operatorname{tg}\delta = f(H)$ dans le domaine des champs magnétiques faibles, a été que les lois de Rayleigh ne s'appliquent qu'aux ferromagnétiques ayant des déplacements irréversibles insignifiants des parois. Pour les autres ferromagnétiques il propose une loi de la forme suivante : $B = H^N(\mu_i H + RH^2)$ (13) semblable à la loi (12) trouvée par nous, N étant un coefficient qui croît en même temps que le rapport $\frac{\text{énergie cristalline}}{\text{énergie des tensions internes}}$.

Partant de l'équation (13) on trouve l'angle des pertes dans un champ sinusoïdal donné par la relation :

$$\operatorname{tg}\delta_H = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{N}{2+N} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1+N}{3+N} \cdot \frac{b}{a} \cdot H_1. \qquad (14)$$

Cette loi n'explique pas les anomalies des pertes par courants de Foucault constatées dans les cas étudiés. Du reste la loi (13) semble n'être pas toujours nécessaire quand „h" (le coefficient des pertes par hystérésis) présente des valeurs relativement grandes.

2. Le domaine des champs moyens

Nous considérerons que ce domaine renferme la région des champs magnétiques situés approximativement entre $\frac{H_c}{3}$ et $5H_c$. La caractéristique de cette région c'est le fait qu'elle contient les deux points d'inflexion et le maximum de la courbe $\mu_{diff.} = f(H)$.

Nous avons déterminé expérimentalement la dépendance $\mu_{tot.} = f(H)$ pour des champs magnétiques correspondants à ce domaine. En ce cas, on peut faire la détermination de $\mu_{tot.}$ par deux méthodes différentes :

— la méthode que consiste à mesurer l'inductance dans le champ magnétique alternatif (ayant une amplitude réglable), à l'aide d'un pont de mesure de l'inductance. La méthode a été décrite ci-dessus. On a utilisé un générateur de fréquence fixe Tesla, les mesures étant suffisamment précises aux fréquences de 400 c/s, 1 kc/s et 10 kc/s.

— la méthode oscillographique d'élévation du cycle d'hystérésis. On a utilisé le montage représenté dans la fig. 8.

En ce cas on a fait les mesures à la fréquence de 50 c/s, déterminée par l'amplificateur-intégrateur utilisé, construit pour des fréquences appro-

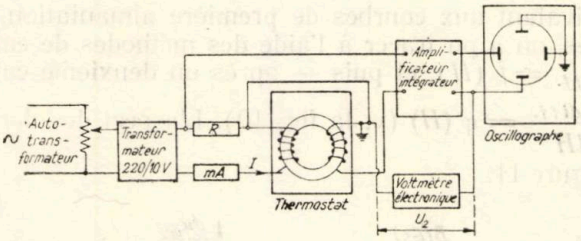


Fig. 8

chées à la fréquence du réseau électrique. On a calculé les grandeurs l'intensité du champ magnétique, l'induction et le champ coercitif sur la base des relations :

$$H_m = \frac{0{,}4\sqrt{2}\cdot n_p I}{d_m} \quad (15); \qquad B_m = \frac{\sqrt{2}\cdot U_2}{\omega \cdot n_s \cdot SK} \quad (16); \qquad H_c = \frac{x_c}{x_m}\cdot H_m \quad (17)$$

n_p, n_s étant le nombre de spires de l'enroulement primaire respectivement secondaire, bobinés sur le tore.

S = la séction du tore, ω = la pulsation du courant $= 2\pi f$, K = la constante d'amplification de l'amplificateur-intégrateur $= \frac{U_2}{U_1}$, On détermine K en rapportant la tension amplifiquée à la tension qui est amplifiée, quand la dernière este nondéformée. Pour cela on change dans le montage le tore avec une résistance purement ohmique. On détermine par expérience et on trace les graphiques $K = f(U_2)$ et $K = f(U_1)$,

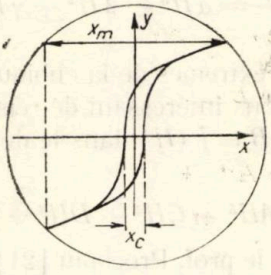


Fig. 9

x_m, x_c sont les dimensions correspondantes (sur l'écran de l'oscillographe) à l'amplitude du champ magnétique et au champ coercitif, pour le cycle d'hystérésis considéré (v. la fig. 9).

2.1. *L'analyse des courbes* $\frac{d\mu_{diff.}}{dH}$ et $\frac{d\mu_{tot.}}{dH} = f(H)$

Sur la base des données obtenues nous avons tracé les caractéristiques $B = f(H)$, équivalant aux courbes de première aimantation. Basé sur ces courbes corrigées, on a pu tracer à l'aide des méthodes de calcul graphique les courbes $\mu_{diff.} = f(H)$, et puis — après un deuxième calcul graphique les courbes $\frac{d\mu_{diff.}}{dH} = \varphi(H)$ (v. la fig. 10). L'aspect des dernières courbes est celui de la figure 11.

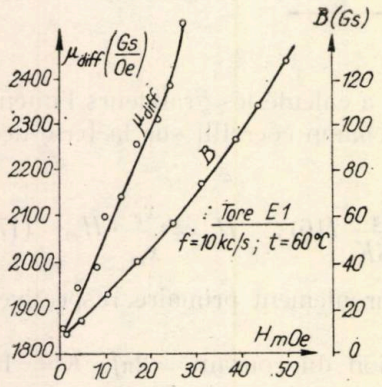


Fig. 10

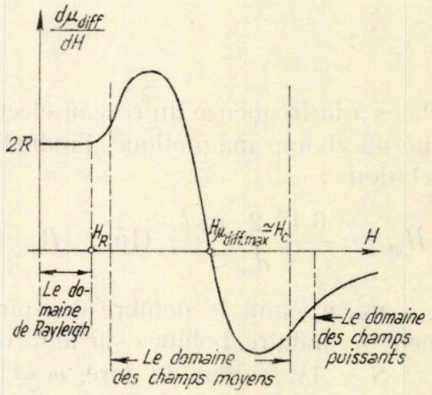


Fig. 11

La forme de la caractéristique $\frac{d\mu_{diff.}}{dH} = f(H)$ dans la zone des champs moeyens nous suggère un fragment d'une cubique :

$$\frac{d\mu_{diff.}}{dH} = \alpha H^3 + \beta H^2 + \gamma H + \delta \tag{18}$$

comprenant les portions des extremes de la cubique, ainsi que la zone d'entre les extrêmes. Nous considérons intéressant de remarquer que l'équation (18) conduit pour la dépendance $B = f(H)$ dans le domaine des champs moyens, à une expression de forme :

$$B = AH^5 + CH^4 + DH^3 + EH^2 \tag{19}$$

semblable à celle établie par le prof. Procopiu [21] :

$$B = aH^5 + bH^3 \tag{20}$$

Si le phénomène observé par Lliboutry [17] aux aciers : l'existence d'un deuxième domaine de linéarité du $\mu_{tot.}$ avec H (avec des autres valeurs des paramètres (μ_i et R) à des intensités du champ magnétique dé-

passant les limites du domaine de Rayleigh, a lieu aussi dans le cas des ferrites étudiés, en ce cas le graphique $\frac{d\mu_{diff.}}{dH}$ doit avoir la forme indiquée dans la figure 12.

On a cherché l'approximation des courbes $\frac{d\mu_{diff.}}{dH} = f(H)$ obtenues de l'expérience par des cubiques de la forme (18) (v. la fig. 13, représentant

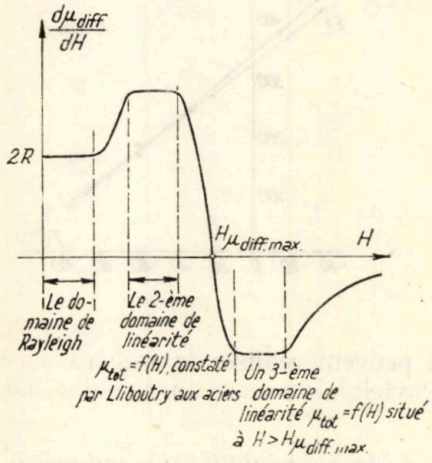


Fig. 12

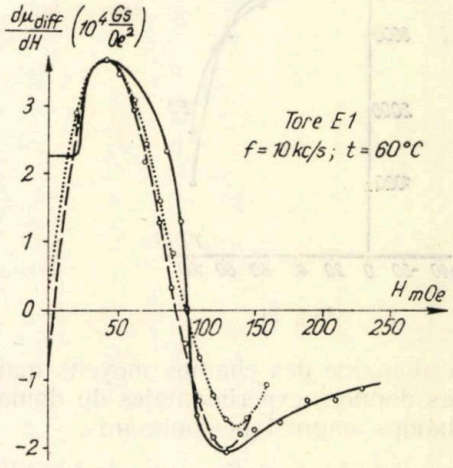


Fig. 13

cette dépendance pour le tore E1, $t = 60°$). On n-a pas réussi l'approximation en conditions satisfaisantes de la courbe expérimentale (continue), par des cubiques (divers graphiques pointillés), les cubiques ayant toutes des extrêmes plus aigues que la courbe expérimentale.

On a constaté que le graphique $\frac{d\mu_{diff.}}{dH} = f(H)$ obtenu de ces mesures est situé entre celui qu'on peut construire à la base de l'équation (18) (modèle Procopiu), et sur l'hypothèse de l'existence d'une deuxième domaine de linéarité du $\mu_{tot.} = f(H)$ (modèle Lliboutry). Des erreurs plus petites interviennent au calcul et à la représentation du graphique $\frac{d\mu_{tot.}}{dH} = f(H)$ (dans ce cas intervenant un seul calcul graphique), la forme de cubique se conservant :

$$\frac{d\mu_{tot.}}{dH} = \alpha' H^3 + \beta' H^2 + \gamma' H + \delta' \qquad (18')$$

avec des autres coefficients. (En ce cas cependant, $\frac{d\mu_{tot.}}{dH} = f(H)$ n'a plus la forme de la fig. 12, dans le cas de l'existence d'un deuxième domaine de linéarité $\mu_{tot} = f(H)$).

On doit encore considérer la possibilité que la dépendance fonctionnelle de $\frac{d\mu_{diff.}}{dH}$ ou $\frac{d\mu_{tot.}}{dH}$ l'intensité du champ magnétique soit décrite seulement en première approximation par des équations du type (18) ou (18'), la dépendance réele contenant des facteurs non-déterminants dans

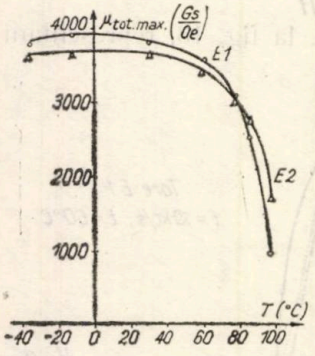


Fig. 14

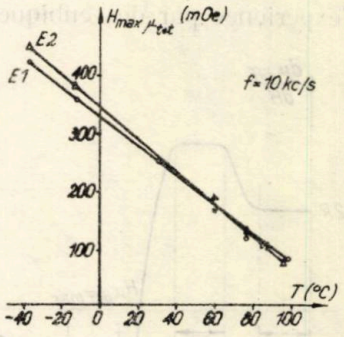


Fig. 15

le domaine des champs moyens mais qui peuvent réaliser le raccord avec les données expérimentales du domaine Rayleigh, ou ceux du domaine des champs magnétiques puissants.

2.2. *La variation avec la température de la perméabilité dynamique au maximum* est représentée (pour les tores E1, E2) dans la fig. 14, d'où on constate que $\mu_{tot.\,max.}$ présente un faible maximum dans la zone 0...30°C, sa variation dans l'intervalle —37°C...40°C ne dépassant pas ± 1,3% autour d'une valeur moyenne.

L'intensité du champ magnétique correspondante au maximum de la perméabilité totale dynamique présente (v. le graphique 15) une diminution linéaire par rapport avec la température.

Le domaine des champs puissants fera l'objet d'un prochain article.

La chaire de physique
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Snoek J. L.* New developments in Ferromagnetic Materials. New-York — Amsterdam, Elsevier Publ. Comp., 1947.
2. *Guillaud Ch.* Etude des ferrites mixtes de manganèse dans les champs alternatifs faibles. Le Journal de Physique et le Radium, 12, 498 (1951).
3. *Guillaud Ch.* Les propriétés des ferrites de manganèse et zinc et les procès physiques qui les gouvernent. Proc. IEE 104 (1957), part. B. suppl., nr. 5, 165—173.
4. *Polder D.* Ferrite materials. The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 97-part. II, 247 (1950).

5. *Snoek J. L.* Conférence sur les propriétés magnétiques des ferrites. Le Journal de Physique et le Radium, 12, 228 (1951).
6. *Guillaud Ch.* Propriétés magnétiques des ferrites. Le Journal de Physique et le Radium, 12, 239 (1951).
7. *Kneller Eckart.* Ferromagnetismus, Berlin, Göttingen, 1962.
8. * * * Magnetism, edited by George T. Rado Harry Suhl, 3 vol., New-York — London, 1963.
9. *Chikazumi Soshin.* Physics of Magnetism, New-York — London, John Wiley, 1964.
10. *Lord Rayleigh.* Phil. Mag., 1887, 23, 225.
11. *Ewing J. A.* Phil. Trans. 176, 523 (1885).
12. *Legg W.* Bell Syst. tech. J. 15, 39 (1936).
13. *Néel L.* Cah. Phys. 1942, 12, 2 et 13, 18 (1943).
14. *Néel L.* Ann. Univ. Grenoble 22, 229 (1946).
15. *Kasilliev A.* Les ferrites, Annales de Radioéléctricité, Tome XII, oct. 1957, p. 337—362.
16. *Ketzo Ohta* et *Tokyo Yamadaya.* Induced Magnetic Anisotropy and Disaccomodation of Manganese-Zinc Ferrites. Proceedings of International Conference on Magnetism and Crystallography, 1961, vol. I, p. 291—295.
17. *Lliboutry Louis.* L'aimantation des aciers dans les champs magnétiques faibles : effets du temps, des tensions, des chocs, des champs magnétiques transversaux. Thèse, Paris, 1950.
18. *Epelboin I.* Délimitation du domaine de Rayleigh dans les champs alternatifs la lumière de récents travaux théoriques et expérimentaux. Le Journ. de Phys. et le Rad., T. 12, 361 (1951).
19. *Koblenz K.* Des éléments magnétiques de commutation dans la collection d'articles L'utilisation des ferrites en télécommunications, Bucarest, 1959.
20. *Sixtus K.*, Z. Physik 121, 100 (1943).
21. *Procopiu S.* C. R. Acad. Sc. Roumanie 7, 43 (1943—1945).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

CHIMIE ANORGANICĂ

C.Z. : 669.28.004.8

RECUPERAREA MOLIBDENULUI DIN DEȘEURI ȘI CONCENTRATE INDIGENE *

V. T. MARCULEȚIU, I. STRUGARU, FL. POPESCU

I. Lucrarea de față constituie o încercare de valorificare a molibdenului, sub forma unui reactiv (molibdatul de amoniu) din deșeurile provenite din industria metalurgică neferoasă, precum și din concentrate indigene, provenite din zăcăminte recent descoperite în țara noastră.

Materialul asupra căruia s-au efectuat încercările se prezintă sub forma unei pulberi de culoare cenușiu-neagră, cu unele sclipiri argintii (datorită cristalelor de molibdenită).

Analiza cantitativă a concentratului s-a efectuat după metodele cunoscute și s-au făcut trei probe paralele, ale căror rezultate sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Componenți %	Analize			
	1	2	3	Media
Mo	61,36	62,08	61,70	61,71
S	31,95	31,70	31,65	31,77
Si	1,86	1,80	1,92	1,86
Cu	0,81	0,80	0,82	0,81
Zn	0,10	0,10	0,10	0,10
Pb	0,06	0,06	0,06	0,06
MgO	0,03	0,03	0,03	0,03
CaO	0,02	0,02	0,02	0,02
$Fe_2O_3 + Al_2O_3$	3,48	3,60	3,60	3,56
TOTAL	99,67	100,19	99,90	99,92

* Manuscris predat la redacție la 10 mai 1966.

În vederea obţinerii molibdatului de amoniu, literatura consultată indică : prăjirea oxidantă a concentratelor de molibden, solubilizarea produsului obţinut în soluţii (de concentraţii diferite) de hidroxid de amoniu şi purificarea molibdatului de amoniu.

Un alt procedeu — mai economic — de obţinere a molibdatului de amoniu, porneşte de la molibdatul de sodiu, care la rîndu-i se obţine cu un randament ridicat prin topire alcalină sau prin tratare cu soluţie de hidroxid de sodiu a produsului rezultat la prăjirea oxidativă a concentratelor.

Trecerea de la molibdatul de sodiu la molibdatul de amoniu, se face prin metoda clasică („ferimolibdat"), metodă care prezintă importante inconveniente : faze multe de prelucrare şi pierderi destul de mari de metal.

II. În această lucrare, ne-am propus să trecem de la molibdatul de sodiu la molibdatul de amoniu pe o cale mai simplă şi mai economică, folosind clorura de amoniu drept agent de precipitare.

Soluţia de molibdat de sodiu se acidulează cu acid clorhidric pînă la un pH convenabil, după care se precipită molibdatul de amoniu cu ajutorul clorurii de amoniu.

La introducerea ionilor NH_4 în soluţia acidulată, se formează — după condiţii — polimolibdaţi de amoniu puţin solubili, sau polimolibdaţi de sodiu şi amoniu.

$$(NH_4)_2\,Mo_3\,O_{10}\cdot H_2O$$

$$(NH_4)_2\,Mo_4\,O_{13}\cdot H_2O$$

$$(NH_4)_2\,Mo_6\,O_{19}\cdot 5H_2O$$

Formarea polimolibdaţilor (tetra molibdatul) de amoniu, din soluţii de molibdat de sodiu, cu ajutorul clorurii de amoniu, decurge conform reacţiei :

$$4Na_2MoO_4 + 6HCl + 2NH_4Cl \rightleftharpoons (NH_4)_2Mo_4O_{13} + 8NaCl + 3H_2O$$

Încercările efectuate au avut drept scop să stabilească condiţiile optime pentru prelucrarea concentratelor de molibden şi mai ales condiţiile de obţinere a molibdatului de amoniu.

Prelucrarea concentratelor, în vederea obţinerii molibdatului de amoniu, este indicată în schema nr. 1.

Încercările au fost executate asupra unor probe de 100—200 g concentrat de molibden.

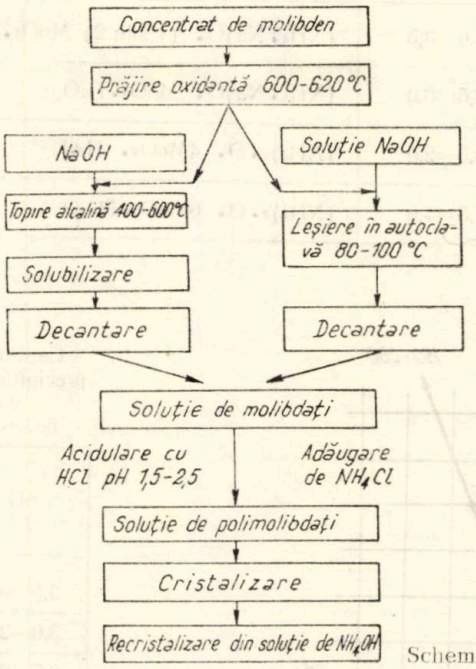
În timpul prăjirii, după cum se vede din schema 1, s-a urmărit ca temperatura să nu depăşească 600—620°C, deoarece volatilitatea oxidului MoO_3 peste această temperatură este apreciabilă : pierderile cresc de la 0,34% la 600°C, pînă la 1,2% la 800°C.

Concentratul supus prăjirii oxidante a fost menţinut la temperatura de 600—620°C, timp de 4—5 ore, pentru a putea obţine un produs care să conţină cît mai puţin sulf.

Procentul de sulf are o destul de mare importanţă pentru operaţiile ulterioare de prelucrare, deoarece poate reduce molibdenul de la

Mo^{6+} la valenţe inferioare, micşorînd randamentul de obţinere a molibdatului, conform reacţiei :

$$12\,MoO_3 + S^{2-} = 4\,\underset{\text{oxid albastru}}{Mo_3O_8} + SO_4^{2-}$$



Schema nr. 1.

In operaţiile de trecere a molibdatului de sodiu în molibdat de amoniu, s-au urmărit următorii parametri :

a) pH-ul soluţiei ;
b) cantitatea de clorură de amoniu necesară precipitării totale a molibdenului sub formă de molibdat ;
c) concentraţia molibdenului în soluţie.

Rezultate :

a) *Tabela 1*

Influenţa pH-ului asupra randamentului de extragere a molibdenului

pH	randament %
3—3,5	99,0
2—2,5	97,5
1—1,5	98,9

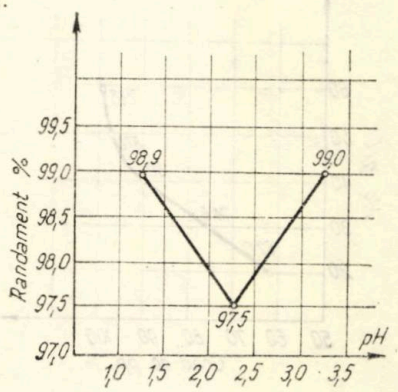


Diagrama 1

Tabela 2

b) Influenţa pH ului asupra compoziţiei polimolibdaţilor.

p.H	precipită :
4,0—3,5	$(NH_4.Na)O.$ (1 sau 2) $MoO_3.H_2O$
3,5—3,0	$(NH_4.Na)O.$ $MoO_3.H_2O$
2,5—2,0	$(NH_4)_2.O.$ $4MoO_3.$ H_2O
1,5—1,0	$(NH_4)_2.O.$ $6MoO_3.5H_2O$

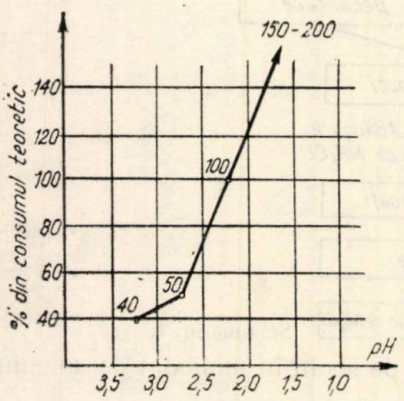


Diagrama 2

c) *Tabela 3*

Cantitatea de NH_4 necesară precipitării totale a Mo faţă de cantitatea teoretică necesară, în funcţie de pH.

pH	NH_4Cl necesară % din consumul teoretic
3,5—3,0	40
3,0—2,5	50
2,5—2,0	100
2,0—1,5	150—200

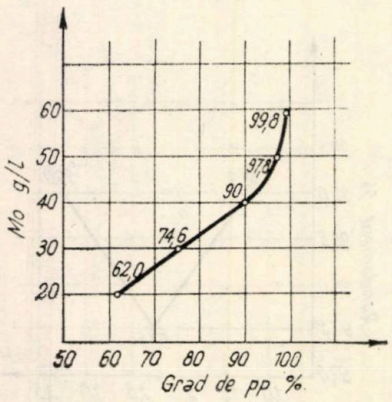


Diagrama 3

d) *Tabela 5*

Influenţa concentraţiei Mo în soluţie asupra gradului de precipitare al poli-molibdatului de amoniu.

Mo g/l	Gradul de precipitare %
20	62,0
30	74,6
40	90,0
50	97,8
60	99,8

Rezultatele arată că pH-ul optim este cel cuprins între valorile 2,5—1,5, cînd precipită tetramolibdatul de amoniu, durata procesului fiind de 8 ore. Mărindu-se durata procesului de precipitare la 10—12 ore, s-a observat o creștere importantă a conținutului de sodiu în molibdatul precipitat, raportul ($Na : NH_4$) crescînd de la 0,1 pînă la 0,5. Se formează polimolibdați binari de sodiu și amoniu, care prezintă un interes practic mult mai mic, deoarece oferă un randament de extracție a molibdenului mai scăzut (din cauza solubilității mai mari față de molibdații de amoniu).

O influență importantă asupra duratei de precipitare o are adăugarea de clorură de amoniu solidă, care contribuie la formarea centrilor de cristalizare, durata procesului reducîndu-se de la 8 ore la 7 ore și chiar la 6,5 ore. De asemenea agitarea continuă a soluției în timpul precipitării, are o influență pozitivă asupra procesului de cristalizare.

Polimolibdatul de amoniu și polimolibdatul de amoniu și sodiu obținuți, au fost solubilizați în hidroxid de amoniu (1 : 1) din care s-a recristalizat molibdatul normal de amoniu. Operația de recristalizare s-a efectuat la rece și s-a repetat de 3 ori.

Dizolvarea polimolibdaților în hidroxid de amoniu la cald, urmată de recristalizare, deși scurtează durata procesului, nu este indicată, deoarece s-a constatat că duce la formarea de bi și tetramolibdati.

Încercările au condus la obținerea unui molibdat cu un conținut de 99,9% în molibdat de amoniu.

Molibdenul din molibdatul de amoniu a fost determinat volumetric, cu o soluție de azotat de plumb, în prezența sării de sodiu a 4-(2-pirydil-azo-rezorcinol) ca indicator.

III. Încercările efectuate în vederea stabilirii condițiilor de recuperare a molibdenului (sub forma unui reactiv) din concentrate indigene, au dus la următoarele concluzii :

a) Concentratele se pot prelucra, atît prin topire, cît și prin leșiere cu hidroxid de sodiu, ultimul procedeu prezentînd avantajul că micșorează durata procesului de extragere a molibdenului și simplifică utilajul folosit.

b) Obținerea molibdatului de amoniu și recristalizarea lui, nu prezintă dificultăți, operația efectuîndu-se cu randament ridicat.

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Scadden E.* Nucleonics, vol. 15, nr. 4, april 1957, p. 102—3.
2. *Barahanova V., Kojemeakino L.* Țvetnie metalî, nr. 1, ian. 1960, p. 23—5.
3. *Skorov V.* Țvetnie metalî, nr. 3, mart. 1958, p. 7—11.
4. *Busk G. H.* The Analyst, vol. 80, nr. 952, iulie 1955, p. 536.

5. *Brymer L., Anderson R.* I.E.C., vol. 49, nr. 10, oct. 1957, p. 1721—4.
6. *Bigeon I.* Industrie chimique, nr. 461, dec. 1955, p. 377—86.
7. *Perruche L.* Nature, nr. 3266, ian. 1957, p. 224—7.
8. *Zolotarew L.* Ţvetnîe metalî, nr. 1, ian. 1958, p. 57—62.
9. *Kovirsin V., Apollonov V.* Ţvetnîe metalî, nr. 8, aug. 1957, p. 67—73.
10. *Bedunean.* Rev. Prod. Chimice, nr. 1245, ian. 1958, p. 3—7.
11. *Şapira K. I.* Jurnal prikladnoi himii nr. 3, 1962, p. 486—490.
12. *Karov Z. G., Perlman F. M.* Jurnal neorgacischii himii nr. 3, 1960, p. 713.
13. *Abaşin V.* Tehnologhia prolucesnia W i Mo.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z. : 665.5.051 : 661.7 : 661.651

n-ALKANES OXIDATION XII (7,25—34)

COMPLEX UTILISATION OF DODECANE BY AIR OXIDATION IN THE PRESENCE OF BORIC ACID *

I. DRIMUȘ, A. MĂCELARU, TH. SPINDLER, I. IONESCU, V. POLEACOV

On account of the importance of fatty alcohols for the chemical industries, their preparation has been especially in the attention of research workers for the last thirty years. One of the ways studied was the direct oxidation of paraffins (1—22). Most of the research workers carried out the oxidation in the presence of boric acid or of its esters. With regard to the obtained fatty alcohols, the recorded data are inconsistent, part of the authors claiming to obtain secondary alcohols as a main product and others to obtain a high percentage of primary alcohols.

Owing to the great theoretical and practical importance of this problem, we decided upon the oxidation of a unitary hydrocarbon, namely the dodécane, in the presence of boric acid. On the other hand, this work has a technological character, aiming at establishing conditions for better yields in fatty alcohols, as well as the utilisation of the fatty acids resulted as by-products. This way to obtain secondary alcohols is considered of interest, owing to the convenient supply of the raw material (n-alkanes obtained from petroleum fractions by means of molecular sieves or by means of urea adducts) as well as to their large field of application. As it is well known, secondary fatty alcohols are valuable intermediates in the biodegradable detergents industry.

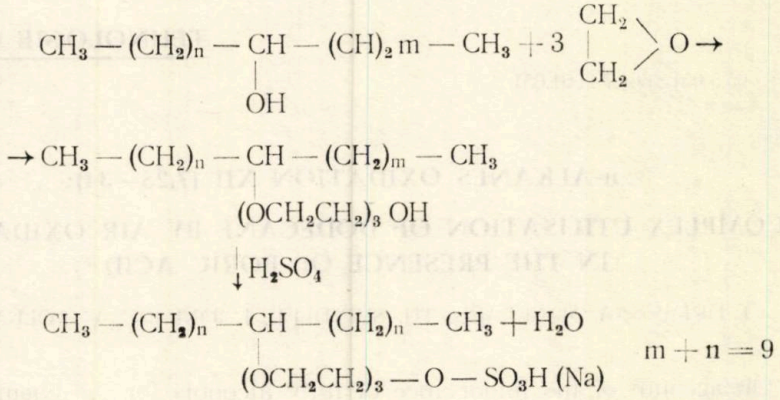
— Direct esterification by sulphuric acid of n-dodecanols, in special conditions, leads to sodium n- dodecylsulphate :

$$CH_3-(CH_2)_n-\underset{\displaystyle OH}{\underset{|}{CH}}-(CH_2)_m-CH_3 + H_2SO_4 \rightarrow \qquad m+n=9$$

$$\rightarrow CH_3-(CH_2)_n-\underset{\displaystyle O\ SO_3H\ (Na)}{\underset{|}{CH}}-(CH_2)_m-CH_3 + H_2O$$

* Manuscris predat la redacție la 15 februarie 1966.

— By triethoxylation of secondary n-dodecanols, followed by the sulfation of the obtained product, a detergent is obtained



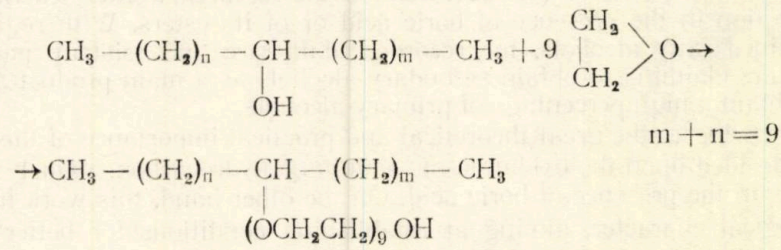
$$CH_3-(CH_2)_n-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-(CH)_2\,m-CH_3 + 3\ \begin{matrix}CH_2\\|\\CH_2\end{matrix}\!\!>\!O \rightarrow$$

$$\rightarrow CH_3-(CH_2)_n-\underset{\underset{(OCH_2CH_2)_3\,OH}{|}}{CH}-(CH_2)_m-CH_3$$

$$\downarrow H_2SO_4$$

$$CH_3-(CH_2)_n-\underset{\underset{(OCH_2CH_2)_3-O-SO_3H\,(Na)}{|}}{CH}-(CH_2)_n-CH_3 + H_2O \qquad m+n=9$$

— By the ethoxylation of n-dodecanols with 8—10 molecules of ethylene oxide, a nonionic detergent is obtained :



$$CH_3-(CH_2)_n-\underset{\underset{OH}{|}}{CH}-(CH_2)_m-CH_3 + 9\ \begin{matrix}CH_2\\|\\CH_2\end{matrix}\!\!>\!O \rightarrow \qquad m+n=9$$

$$\rightarrow CH_3-(CH_2)_n-\underset{\underset{(OCH_2CH_2)_9\,OH}{|}}{CH}-(CH_2)_m-CH_3$$

All these products are valuable detergents 90—95% biodegradable, having the tendency to replace the nonlinear sodium alkyl-aryl-sulphonates, only partially decomposed in the water biological filtering units.

Other big consumers of n-dodecanols are the industries of plasticizers, additives for fuels and lubricants, flotation agents etc.

Experimental

In order to have a systematic view of the laboratory experiments, the main operations of the process will be examined first and, subsequently, the separation and identification of by-products will be described.

1. Air oxidation of dodecane in the presence of boric acid

In order to establish the best oxidation conditions, a series of experiments were carried out at different temperatures and oxidation air flows, the time of oxidation beeing varied between 4 and 5 hours. The operations corresponding to the parameters giving the best results are described further below.

The plant diagram is shown in figure 1.

The oxidising air given by the compressor, once passed through an activated carbon layer and a rotameter, goes through the reaction vessel from the bottom to the top. After passing through the refrigerator, the air and the resulted gases are evacuated in the atmosphere.

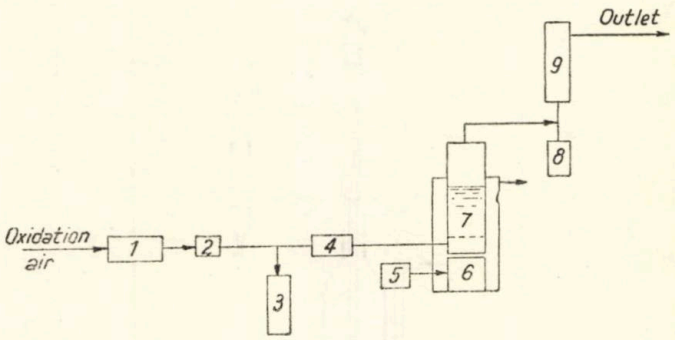


Fig. 1. Oxidation plant diagram

1 — compressor, *2* — activated carbon pipe, *3* — mercury sealed safety trap, *4* — rotameter, *5* — air blowel, *6* — electrical preheater, *7* — reaction vessel, *8* — collecting vessel, *9* — refrigerator

The reactor (fig. 2) consists of a cylindrical Jena glass vessel having a total height of 500 mm and 65 mm outer diameter, provided with a G1 porous plate for the air dispersion, placed at 20 mm from the bottom. The oxidation air enters the reactor through a side glass tube of 10 mm diameter, under the porous plate. The upper part of the reactor is connected by a side tube to the collector vessel provided with a refrigerator.

The adjustment and control of the temperature in the reactor are performed by a contact thermometer. The reactor is heated using as a heating medium the air given by a blower, passed through an electrical heater. The heated air passes through an annular space between the outer wall of the reactor and a cylindrical mantle of 100 mm diameter.

The heater control was realised by an autotransformer mounted in the circuit of a relay commanded by the contact thermometer. When reaching the established temperature, the heating circuit and air blowing are automatically interrupted, (the blower beeing mounted in the relay circuit too).

Working procedure. Optimal working conditions were the following:

— oxidation air flow: 140—150 l/h per 500 g dodecane
— temperature: 155°C
— oxidation time: 4 h.

The dodecane used had a refractive index n_D^{20} 1.4220 and a purity of 100% (checked by gas chromatographic analysis).

500 g of n-dodecane were introduced into the reactor and heated up to 155°C. When reaching this temperature, 30 g of finely divided boric acid

were added (6% by weight of dodecane), and the air bubbling was started immediately, first at a low flow, to avoid excessive foaming. The reaction water, as well as the distilled fatty products were condensed in the refrigerator and collected. After 4 hours, 30 g of water and 9 g of fatty products were collected.

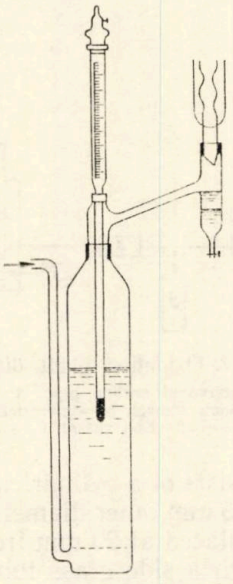


Fig. 2. The oxidation reactor

The progress of the oxidation reaction was followed by determing peroxide, acid and saponification values of samples taken at the following times : 30, 60, 90, 120, 180 and 240 minutes, from the beginning of the reaction. The corresponding curves are represented in fig. 3.

The peroxide value presents a maximum at 90 minutes.

The acid value reaches significant values only after 60 minutes and after that, continues to increase.

This indicates that the percentage of fatty acids insignificant at the beginning of the oxidation, is increasing continuously during the reaction.

The saponification value is continuously increasing, being heigher than the acid value.

At the end of the oxidation process, the heating and air bubbling were interrupted and the fatty product from the collecting vessel was added to the main product.

505 g of a light yellow product which soon changed its color to brown, was obtained.

2. **Vacuum distillation of the product.**

The separation of the obtained boric esters and unreacted dodecane was carried out by vacuum distillation, at a pressure of 2 Hg mm up to the temperature of 95°C. 337 g of distillate, consisting mainly of dodecane (acid value 6,5 mg O/g, saponification value 14,4 mg O/g, carbonyl value * 3,5 mg O/g and hydroxil value ** zero) and 165 g of residue consisting of boric acid esters, were obtained.

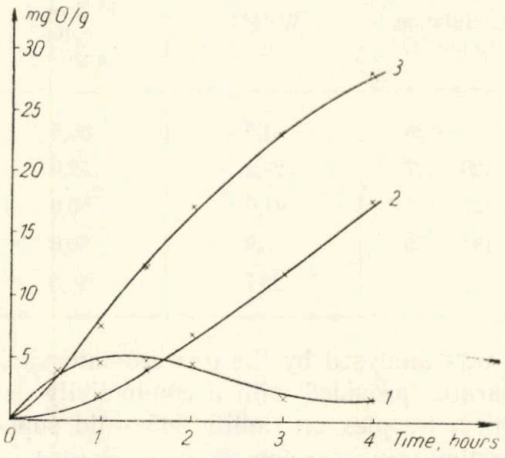


Fig. 3. Time variation of peroxide (1) acid (2) and saporification (3), values

3. **Aqueous hydrolisis of boric acid esters.**

The boric acid esters were hydrolized with 500 ml of hot water, added in portions of 200, 100, 100 and 100 ml, in a separatory funnel. Two layers were separated : the upper layer (152 g) consisting of "crude dodecanols I" (acid value 13,2 mg 0/g, saponification value 32,8 mg 0/g) and the inferior layer consisting of water and boric acid.

4. **"Crude dodecanols I" saponification.**

In order to remove free and esterified acids from the "crude dodecanols I", these were saponified for 5 hours with 150 ml 10% aqueous sodium hydroxide solution. An upper oily layer containing acidity free dodecanols, named "crude dodecanols II" was separated. The aqueous inferior layer, containing the sodium salts of fatty acids, is extracted many times with

* hydroxylamine hydrochloride — kalium hydroxide method
** acetic anhydride — pyridine method.

ether and the ether layers added to the main portion. The combined extracts were then washed with water and dryed on anhydrous sodium sulfate. After removing ether by distillation, 123 g of 'Crude dodecanols II" were obtained.

5. Fractional distillation of "Crude dodecanols II".

"Crude dodecanols II" were fractionated under a vacuum of 6 Hg mm and 4 fractions were collected :

	Distillation range °C	Weight g	Hydroxyl value mg/O/g	Carbonyl value mg/O/g
Fraction I	90—120	11,5	66,5	13,1
Fraction II	120—127	29,2	72,5	9,3
Fraction III	127—134	41,6	80,0	5,4
Fraction IV	134—150	8,8	80,0	8,0
Residue		23,7	86,0	10,0

Each fraction was analysed by the gas cromatographic method, using a Willy-Giede apparatus provided with a conductivity detector and a 2 m column packed with a Reoplex on Cellite 545 solid support.

A series of preliminary experiments were carried out on a standard mixture composed of equal amounts of the six pure dodecanols (1-, 2-, 3-, 4-, 5- and 6-n-dodecanols). Only the 1-n-dodecanol gives a single peak, the peak of 2-n-dodecanol partially interfering with the common peak of the 3-, 4-, 5- and 6-n-dodecanols, entirely unsepareted.

The gas chromatography of the four fractions obtained by "crude dodecanols II" distillation, showed only a peak corresponding to 2-n-dodecanol, the other dodecanols beeing cumulated in a common peak. The 1-n-dodecanol appeared only in small quantities in fraction 4.

The obtained chromatograms indicate the following composition of the fractions :

Fraction I : 60—70% secondary n-dodecanols ; the remainings consisting of ketones (n-dodecanones) lower primary alcohols and dodecane.

Fraction II : 95% secondary n-dodecanols and 5% n-dodecanones.

Fraction III : 97% secondary n-dodecanols and 3% n-dodecanones.

Fraction IV : 98% secondary n-dodecanols and 2% primary n-dodecanol.

The dodecanols content of the four fractions, calculated on the basis of the hydroxyl values, agrees with the above results.

6. Other products obtained by air oxidation of dodecane.

A. *Separation of fatty acids from the crude dodecane*

By the saponification of the crude dodecane, recovered by vacuum distillation of the oxidation product, with 10% NaOH, 326 g of pure product was obtained. This represents a 35% conversion. The pure product is recirculated in the oxidation process. The aqueous layer resulted was acidified with hydrochloric acid and the liberated fatty acids were ether extracted. After washing with water and drying on anhydrous Na_2SO_4, the ether was removed and 9,3 g of fatty acids were obtained (acid value 192,5 mg 0/g). The vacuum distillation of these acids at 1—2 Hg mm gave 8 g of product having an acid value 207 mg 0/g. The gas chromatographic analysis of these acids indicated a C_4—C_{10} fraction. Before beeing subjected to chromatography, the fatty acids were converted into their methyl esters by means of diazomethane.

B. *Boric acid recovery and purification*

The aqueous layer containing boric acid was evaporated to dryness. The crude product obtained was then extracted with anhydrous ether, giving 25 g of boric acid and 5.5 g of organic compounds having an acid value 110 mg 0/g.

C. *Processing of the soaps obtained by saponification of "Crude dodecanols I"*

The aqueous fraction containing the sodium soaps of fatty acids was treated with 10% H_2SO_4 in an amount equivalent to the NaOH used. An upper layer consisting of fatty acids insoluble in water was separated. The aqueous layer, containing the sodium sulphate and soluble fatty acids, was repeatedly ether extracted. The ether extracts were dryed over anhydrous Na_2SO_4 and, after removing the ether, 4 g of water soluble fatty acids, having an acid value 100 mg 0/g, were obtained.

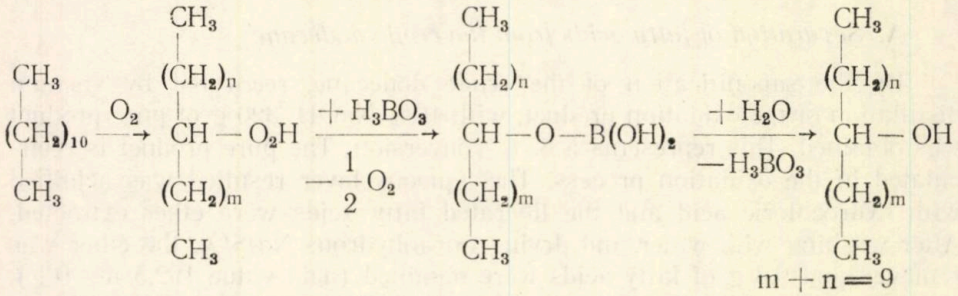
The organic upper layer consists of 16,1 g of water insoluble fatty acids, having an acid value 136 mg 0/g. By vacuum distillation at 3 Hg mm, 9.5 g acids with an acid value 188 mg 0/g were obtained. The gas chromatographic analysis indicated a C_4—C_{10} fraction.

The presumed reactions involved in the oxidation process are the following :

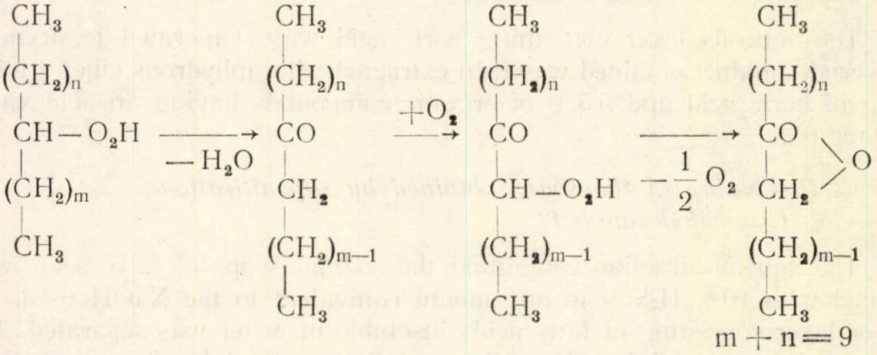
The principal reaction. The dodecane is first oxidized to hydroperoxides, converted to esters by the boric acid.

The assumption of hydroperoxides formation was suggested at the end of the last century (23), but the separation of n-dodecilhydroperoxides failed until now. We suggest a direct reaction between hydroperoxides and the

boric acid. The subsequent processing of the oxidation product, by hydrolisis of the esters, gives the 2-, 3-, 4-, 5, or 6-n-dodecanols :



Secondary reactions. The hydroperoxides formed in the main reaction give the corresponding ketones by losing a water molecule and, via α-ketohydroperoxides, pass into the esters. This reaction was studied by Langenbeck and Pritzkow in the absence of boric acid (24). It could be assumed that hydroperoxide molecules not trapped by the boric acid are thermally decomposed to ketones which, in their turn, are further oxidized to α-ketohydroperoxides and finally the corresponding esters are obtained :



Part of the esters, further oxidized, could afford two molecules of acid. The unoxidized ester is splitted by hydrolysis into one acid and one primary alcohol molecule :

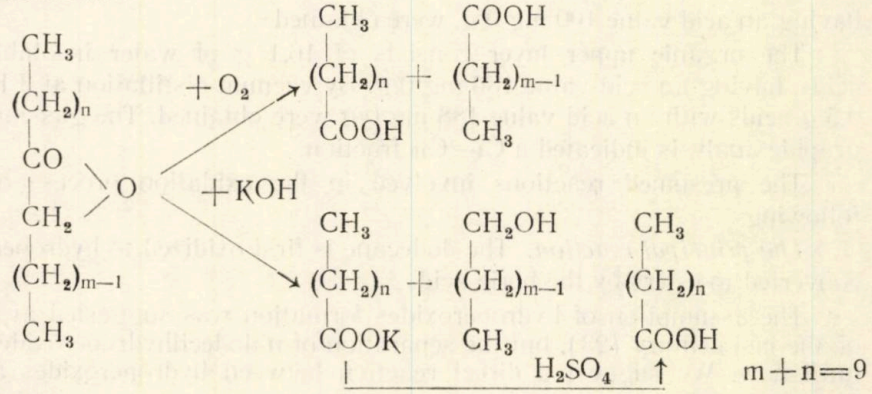


Table 1

			g	g	g
Initial dodecane			500	100	
Recovered dodecane (purified)			326	65.2	
Reacted dodecane (including losses)			174	34.8	100
Crude secondary alcohols II			123	24.6	70.6
Distilled secondary alcohols	Fraction I	Dod-OH	11.5	2.3	6.6
			7.5	1.5	4.3
	Fraction II	Dod-OH	29.2	5.8	16.8
			27.8	5.5	16.0
	Fraction III	Dod-OH	41.6	8.3	24.0
			40.3	8.1	23.2
	Fraction IV	Dod-OH	8.8	1.8	5.05
			8.6	1.7	4.95
	Total	Dod-OH	91.1	18.2	52.15
			84.2	16.8	48.45
Residue			23.7	4.7	13.6
Water insoluble acids			16.1	3.2	9.25
Water soluble acids			4	0.85	2.30
Fatty acids recovered from dodecane			9.3	1.86	5.35
Fatty acids extracted from boric acid			5.5	1.1	3.16

7. Material balance.

All the quantities entered in and resulted from the oxidation reaction, in view of establishing the material balance, are presented in table I.

For 100 g of dodecane reacted (including oxidation losses), the following products are obtained :

Secondary dodecanols . . . . . 48.50 g
Condensed water . . . . . 17.30 g
Lower alcohols, ketones, dodecane (unseparated) . . . . . 4.50 g
Dodecanols distillation residue . . . . . 13.60 g
Water insoluble acids . . . . . 9.25 g
Water soluble acids . . . . . 2.30 g
Acids recovered from dodecane . . . . . 5.35 g
Acids extracted from boric acid . . . . . 3.16 g
Losses at the fractional distillation of dodecanols . . . . . 4.05 g
Losses at the separation of water soluble and insoluble acids . . 5.10 g

8. Conclusions.

The experimental data obtained in the present work lead to the following conclusions :

a) By air oxidation of n-dodecane in the presence of boric acid, n-dodecanols, acids, ketones (n-dodecanones) and lower primary alcohols are obtained.

b) Over 90% of the obtained alcohols consists of n-dodecanols, the oxidation of n-dodecane occurring mainly without a break of the hydrocarbonate chain. The chromatographic analysis indicates the presence of 1-n-dodecanol only in traces, and also of small amounts of 2-n-dodecanol. The majority of the resulted dodecanols have the hydroxyl in the positions 3, 4, 5 or 6. This shows that the attack of the hydrocarbonate chain is directed preferentially towards the center of the molecule. The ends of the molecule are only slightly exposed to these attacks and the methyl groups of the extremities, scarcely attacked.

c) Besides the secondary n-dodecanols, primary alcohols, with a smaller number of carbon atoms than the parent hydrocarbon, are formed, due to a degradation process.

d) Esters and acids are formed in the oxidation process. The analysis of the acids indicates the absence of dodecanoic and undecanoic acids. The decanoic acid appears only in traces, but nonanoic, octanoic, heptanic and hexanoic acids are formed in increasing amounts. Further on, the decreasing of pentanoic and butanoic acid proportions is a new argument that the attack of the dodecane chain occurs preferentially at the center.

e) In the reaction products there have been chromatographically identified about 1% dodecanones (2—6), considered as intermediates in the acid and ester formation.

f) The alcohols distillation residue has a high hydroxyl value, which indicates the possibility of the recovery of some interesting polifunctional products.

g) From 100 g of reacted dodecane, about 48 g of secondary n-dodecanols, as main products, and 20 g of crude fatty acids, C_4—C_{10}, as a by-product, are obtained.

Chair of Organic Technology
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest
Petrochemical Works, Ploiești

LITERATURE

1. * * * German Pat. 552.886 (1934).
2. * * * German Pat 564.396 (1964).
3. U. S. Pat. 1.947.989 (1934).

4. *Nobori H and Kawai S.* J. Soc. Chem. ind Jap. *46,* 195, 1208—10 (1943).
5. *Nobori H. and others.* J. Soc. Chem. ind. Jap., *47,* 475—7, 1617 (1944).
6. *Nobori H. and others.* J. Soc. Chem. ind. Jap., *48,* 79 (1945).
7. *Drimuș and others.* Analele româno-sovietice, nr. 2 (1958).
8. *Başkirov A. N.* Him. Nauka i Prom., *1,* 5, 21—22 (1955).
9. *Başkirov A. N. and others.* Dokl, Akad, Nauk. SSSR, *118,* 149—52 (1958).
10. *Başkirov, A. N., and others.* Dokl, Akad, Nauk. SSSR, *119,* 705—7 (1958).
11. *Başkirov, A. N. and others.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR, *127,* 93—6 (1959).
12. *Scipioni A.* An. Chim. Appl., 39, 311—20 (1949).
13. *Başkirov A. N. and others.* Russian Pat. 105.932 (1957).
14. *Başkirov A. N. and others.* Russian Pat. 106.914 (1958).
15. *Certkov Ia.* B. Russian Pat. 106.355 (1958).
16. *Tao Sheng Yang and others.* Jan. Liao Hsuch Pao, *4,* 210—15 (1959).
17. *Hai-li, Sheng-Ching-Li and others.* Jan. Liao Hsuch Pao, *4,* 253—8 (1958).
18. * * * French Pat. Fr. 1.358.412 (29 Dec. 1962).
19. * * * French Pat. Fr. 1.359.064 (1962).
20. * * * French Pat. Fr. 1.359.063 (25 Sept. 1962).
21. * * * British Pat. Brit. 939.534 (Nov. 1961).
22. *Germain J. E. and Cognion J. M. Chimie et Industrie, 91,* nr. 5 (May 1964).
23. *Bah A. N.* I.P.F.H.O., *29,* 373 (1897).
24. *Langenbeck W. and Pritzkow W.* Chem., Techn., *4,* 9, 391 (1952).
25. *Drimus I., Klang M. Manase I.* Studii și cercetări de chimie III, 3—4, 265—73 (1955).
26. *Drimuș I., Klang M., Manase I.* Revista de chimie ASIT V, 6, 269—73 (1955).
27. *Drimuș I., Manase I., Scheuerman.* Buletinul institutului politehnic București XX, 2 129—39 (1958).
28. *Drimuș I., Manase I.* Industrie chimique belge nr. 2, 151—4 (1960).
29. *Drimuș I., Ioanid G. and others.* Studii și cercetări de chimie VII, 1, 79—94 (1959).
30. *Ioanid G., Drăguț A., Drimuș I. and others.* Large radiation sources in industry. International Atomic Energy Agency, Viena 1960. p. 51—9.
31. * * * Rumanian Pat. 41, 642 (1958).
32. *Drimuș I., Ioanid G. and others.* L'utilisation de l'energie atomique a des fins pacifiques. Geneve 1958, vol. IX, 614—24.
33. * * * Rumanian Pat. 43726 (1960).
34. *Drimuș I., Pribnow V., Avram R., Florea I.* Buletinul Institutului politehnic București XXIII, 1, 119—128 (1961).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

ELECTROTEHNICĂ

C.Z.: 621.313.33 : 538 : 621—25

DES CONSIDÉRATION THÉORIQUES SUR LE COUPLAGE ASYNCHRONE À ROTOR FERROMAGNÉTIQUE *

LUCIAN BOMPA
La chaire d'electrotechnique
Institut polytechnique
Brașov

1. Généralités

1.1. *La construction des couplages asynchrones*

Ces machines sont constituées de deux parties principales :

— l'inducteur, qui par les ampères — tours d'excitation crée le champ d'excitation.

— l'induit, dans lequel par rotation relative avec l'inducteur s'engendrent des courants (Foucault) tourbillonnaires qui, par interaction avec le champ d'excitation, produit le couple mécanique.

Les couplages peuvent être construits en principe, autant par l'induit ferromagnétique que par l'induit non ferromagnétique. Commun à tous les types est la forme cylindrique massive de l'induit.

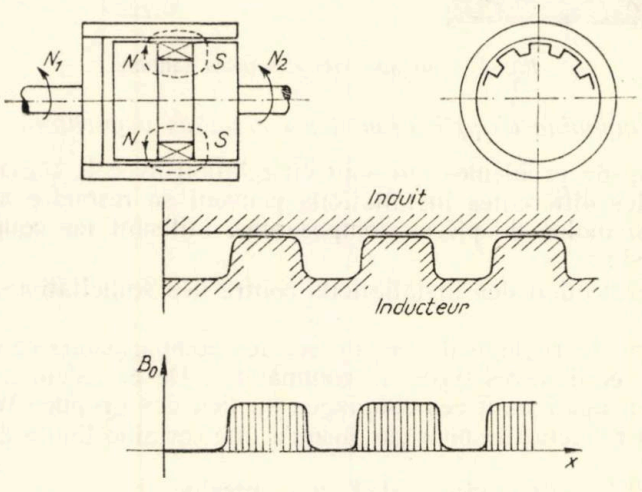


Fig. 1. Couplage de type homopolaire

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest, 28—30 mai 1965.

De tous les types constructifs mentionnons :

Le couplage de type homopolaire, esquissé dans la fig. 1, a la bobine d'excitation disposée entre deux disques dentés qui déterminent la forme alternante de l'induction d'excitation à la périphérie de l'induit.

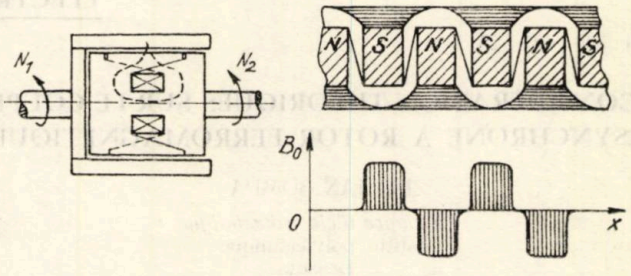


Fig. 2. Couplage avec dents intercalées.

On remarque le type homopolaire de l'inducteur parce que pour chaque disque l'induction d'excitation a la même polarité.

— Le couplage avec dents intercalées ou de type carapace (fig. 2) crée à la périphérie de l'induit une induction hétéropolaire.

— Le couplage avec pôles saillants a un bobinage sur chaque dent et donc aura aussi une induction hétéropolaire (fig. 3).

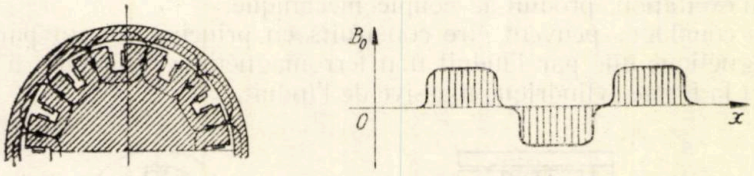


Fig. 3. Couplage avec des pôles saillants.

1.2. *Le domaine d'application des conplages asynchrones*

Beaucoup de problèmes qui sont en relation avec le réglage et l'automatisation des différentes installations peuvent se résoudre assez simplement et avec moins de pièces composantes, utilisant les couplages asynchrones. Ainsi :

— La protection des installations contre des sollicitations mécaniques excessives.

A l'égard du réglage de la vitesse, des comparaisons économiques se sont faites avec d'autres types de commandes. De ce calcul a résulté plus d'économie en appliquant ces couplages au lieu des gropues Ward-Léonard et même un rendement supérieur jusqu'à une certaine limite du réglage de la vitesse.

— Le règlage de la vitesse de l'arbre entraîné.

— La réalisation de caractéristiques spéciales comme par exemple, dans l'installation de puissance des bateaux, excavateurs etc., ou le moteur principal est le moteur Diesel.

Les avantages principaux des installations à couplages d'induction sont :

— la simplicité d'exécution,
— le prix réduit,
— la comodité en exploitation,
— la sûreté du fonctionnement,
— l'usure pratique négligeable parce que entre inducteur et induit n'apparaît pas de contact mécanique.

En comparant les types des couplages décrits plus haut, on constate l'avantage de l'utilisation des couplages avec dents intercalées pour de petites et moyennes puissances. Pour des puissances de centaines de kilowatts on utilise des couplages de type homopolaire et aussi de type avec pôles saillants.

Parce que les pertes de l'induit dûes aux courants tourbillonnaires sont importantes avec l'augmentation du glissement et comme ces pertes se transforment en chaleur, il faut accorder une grande attention à l'étude du système de refroidissement du couplage. Aux couplages jusqu'à quelques kilówatts le refroidissement par air est suffisant, mais aux puissances plus élevées il faut choisir le refroidissement par eau.

2. **Théorie des couplages asynchrones**

2.1. *Le stade de la théorie*

Les premiers essais de présentation de la théorie des couplages asynchrones ont été faits en 1906 de Rudenberg. Cette théorie n'a pas pu justifier les performances des couplages réalisés parce qu'on n'a pas tenu compte de la variation de la perméabilité magnétique de l'induit (μ).

En 1946, Gibbs présente un traité de cette théorie en considérant aussi la variation de la perméabilité en expliquant pour la première fois les performances des couplages réalisés.

En 1957, Sharov ; 1958, Glazenco ; 1963, Pozdeev ; 1963, Davies, Malti, Ramakumar présentent des études théoriques et expérimentales sur ces couplages en analysant surtout les caractéristiques mécaniques. Dans notre pays Remus Răduleț et Alfons Ifrim traitent le champ électromagnétique de ces couplages et aussi le couple mécanique par rapport à l'induction d'excitation [1]. En ce qui suit on présente une théorie tri — dimensionnelle du champ électromagnétique du couplage de type à pôles saillants. On analyse les valeurs du champ électromagnétique et aussi du couple mécanique à différents glissements, en tenant compte en même temps de la variation de la perméabilité après l'intégration des équations différentielles du champ. La considération de la variation de la perméabilité magnétique se fait en utilisant une méthode graphique qui présente l'avantage de tenir compte des caractéristiques particulières du matériel avec lequel se fait l'induit.

Dans le même temps l'influence de la réaction de l'induit s'analyse en introduisant une fonction complexe dénommée „fonction de réaction" parce qu'elle reflète le comportement complet de celle-ci.

2.2. *Hypothèses principales*

Dans cette théorie on suppose les hypothèses suivantes qui se justifient par les résultats expérimentaux présentés dans diverses publications [2], [3], [4].

a) L'inducteur a une disposition alternative des pôles magnétiques (des dents), donc le couplage est de type hétéropolaire.

b) Les lignes du champ magnétique en entrefer ont une distribution sinusoïdale à le périphérie de l'induit. Cette supposition se fait parce que la répartition réelle est presque une sinusoïde, et aussi pour simplifier l'écriture des relations. On peut renoncer à cette hypothèse en developpant l'induction magnétique en série Fóurier à la périphérie de l'induit.

c) L'induit a la forme d'un verre de matériel ferromagnétique homogène, masif et lisse.

d) L'induction le long de la dent est considérée comme constante. Cette hypothèse correspond à la réalité et si on dispose de la répartition plus précise de l'induction on peut la développer en série Fourier au long de cette axe.

e) L'entrefer de la machine se considère plan et uniforme.

f) La profondeur de l'induit se considère infinie. Cette approximation est suffisante, parce que dans les matériaux ferromagnétiques la profondeur de pénétration du champ électromagnétique est fort petite par rapport au rayon de l'induit.

g) L'induit est considéré comme une bande ferromagnétique de longueur $2\,l$ qui se déplace avec une vitesse relative à l'inducteur. Cette hypothèse s'admet pour la même raison de la pénétration infime du champ magnétique par rapport au rayon de courbure. Ainsi on peut utiliser les coordonnées cartesiennes.

h) Tout d'abord la perméabilité magnétique se considère constante à l'intégration des équations différentielles du champ électromagnétique mais, dans leur solution on tient compte de sa variation. Selon les résultats expérimentaux cette supposition ne s'éloigne pas trop de la réalité du point de vue des effets moyens résultant des phénomènes électromagnétiques de l'induit.

2.3. *L'induction d'excitation de l'entrefer*

En vertu des simplifications données plus haut, le système de coordonnées pour la description des phénomènes de l'induit, est montré dans la fig. 4. La répartition de l'induction d'excitation dépend de la géométrie du circuit magnétique de la machine et ceci est montré dans la même figure.

Si nous développons en série Fourier le long de d'axe Oy, l'induction magnétique de l'entrefer supposée périodique et montrée dans la fig. 5, nous obtenons :

$$B_{\delta 0} = \sum_{m=1}^{\infty} B_{0m} \cos(\omega t - \alpha x) \cos \beta_m y \tag{2.1}$$

ou

$$\omega = \frac{2\pi p (N_1 - N_2)}{60} = \frac{2\pi p \cdot n}{60} ; \tag{2.2}$$

ω est la vitesse angulaire relative.

D — le diamètre intérieur de l'induit.
N_1 et N_2 — le nombre de tours de l'inducteur respectif de l'induit en t/m.
n — le nombre de tours relatif entre induit et inducteur.

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau} \tag{2.3}$$

$$\tau = \frac{\pi D}{2} \tag{2.4}$$

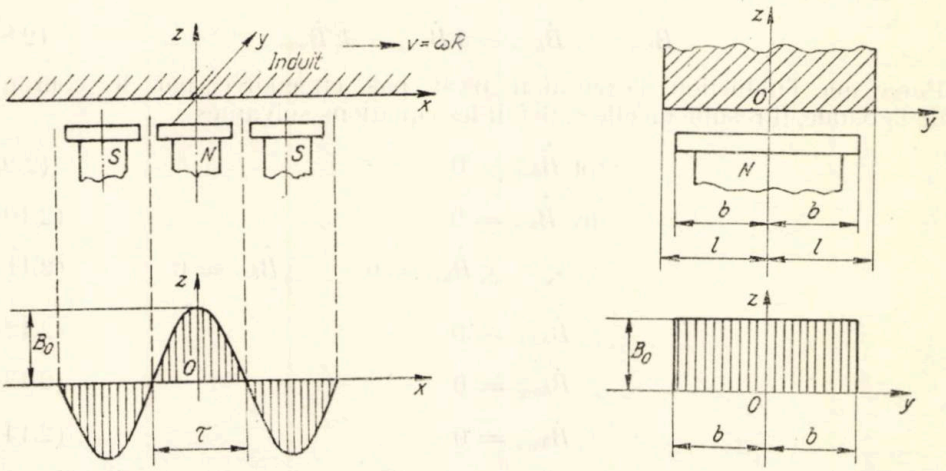


Fig. 4. La répartition dans l'entrefer de l'induction d'excitation.

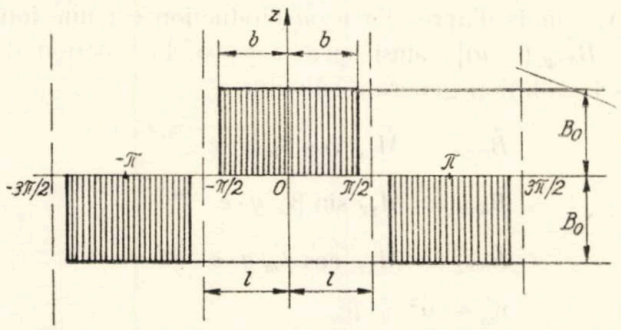


Fig. 5. La prolongation périodique le long de l'axe *Oy* de l'induction d excitation.

p — le nombre de paires de pôles

$$\beta_m = m \frac{\pi}{2l} \tag{2.5}$$

$$B_{\delta m} = \frac{4 B_\delta}{m\pi} \sin m\pi \frac{b}{2l}. \tag{2.6}$$

Si nous appliquons l'écriture en complexe simplifié, la relation (2.1) devient :

$$B_{\delta 0m} = Re \left\{ \dot{B}_{\delta 0m} \, e^{j(\omega t - \alpha x)} \right\}$$

$$\dot{B}_{\delta 0m} = B_{0m} \cos \beta_m y \,. \tag{2.7}$$

Nous mentionnons que cette composante est orientée d'après l'axe Oz.

2.4. *L'induction d'excitation de la bande de l'induit*

$$\dot{\bar{B}}_{\delta m} = \bar{i} \, \dot{B}_{\delta mx} + \bar{j} \, \dot{B}_{\delta my} + \bar{k} \, \dot{B}_{\delta mz} \tag{2.8}$$

Parce que l'induction d'excitation n'est pas engendrée par le courant de la bande, il résulte qu'elle satisfait les équations suivantes :

$$\text{rot } \dot{\bar{B}}_{\delta m} = 0 \tag{2.9}$$

$$\text{div } \dot{\bar{B}}_{\delta m} = 0 \tag{2.10}$$

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\bar{B}}_{\delta m} = 0 \cdot \quad \triangle \dot{\bar{B}}_{\delta m} = 0 \tag{2.11}$$

$$\triangle \dot{B}_{\delta mx} = 0 \tag{2.12}$$

$$\triangle \dot{B}_{\delta my} = 0 \tag{2.13}$$

$$\triangle \dot{B}_{\delta mz} = 0 \tag{2.14}$$

Si nous tenons compte que l'induction d'après l'axe Ox et celle d'après l'axe Oz sont des fonctions paires en y ($B_{\delta mz}(y) = B_{\delta mz}(-y)$ et $B_{\delta mx}(y) = B_{\delta mx}(-y)$), mais d'après l'axe oy l'induction est une fonction impaire [$B_{\delta my}(y) = -B_{\delta my}(-y)$], ainsi qu'à $z = \infty$ la fonction doit être finie, nous obtenons la solution générale suivante :

$$\dot{B}_{\delta mx} = \dot{M}_{1x} \cos \beta_m \, y \cdot e^{-\eta_m z} \tag{2.15}$$

$$\dot{B}_{\delta my} = \dot{M}_{1y} \sin \beta_m \, y \cdot e^{-\eta_m z} \tag{2.16}$$

$$\dot{B}_{\delta mz} = \dot{M}_{1z} \cos \beta_m \, y \cdot e^{-\eta_m z} \tag{2.17}$$

$$\eta_m^2 = \alpha^2 + \beta_m^2 \tag{2.18}$$

Les constantes d'intégration se déterminent comme suit, en écrivant la condition de continuité de la composante d'après l'axe Oz à $Z = O$ il résulte :

$$\dot{M}_{1z} = B_{0m} \,. \tag{2.19}$$

Pour les deux autres composantes nous écrivons que le rotor et la divergence sont nuls.

$$-j\alpha \dot{M}_{1x} + \beta_m \dot{M}_{1y} - \eta_n B_{0m} = 0 \tag{2.20}$$

Prenons l'une des composantes du rotor

$$\frac{\partial \dot{B}_{\delta mz}}{\partial y} = \frac{\partial \dot{B}_{\delta my}}{\partial z} \tag{2.21}$$

$$\dot{M}_{1y} = \frac{\beta_m}{\eta_m} \cdot B_{0m} \tag{2.22}$$

$$\dot{M}_{1x} = j \frac{\alpha}{\eta_m} B_{0m} \tag{2.23}$$

et donc les trois composantes de l'induit sont :

$$\dot{B}_{mx} = j \cdot \frac{\alpha}{\eta_m} \cdot B_{0m} \cdot \cos \beta_m y \cdot e^{-\eta_m \cdot z} \tag{2.24}$$

$$\dot{B}_{my} = \frac{\beta_m}{\eta_m} B_{0m} \sin \beta_m y \cdot e^{-\eta_m \cdot z} \tag{2.25}$$

$$\dot{B}_{mz} = B_{0m} \cos \beta_m y \cdot e^{-\eta_m \cdot z} \tag{2.26}$$

2.5. *L'induction résultant de l'induit*

$$\dot{B}_m = \dot{B}_{\delta m} + \dot{B}_{rm} \tag{2.27}$$

où on a noté :

$\dot{B}_{rm}$ est l'induction de réaction de l'induit

$\dot{B}_m$ est l'induction résultant de l'induit

En écrivant les équations différentielles du champ électromagnétique on a :

$$\text{rot } \dot{B}_{rm} = \text{rot } \dot{B}_m = \mu \dot{J}_m \tag{2.28}$$

$$\varrho \text{ rot } \dot{J}_m = -\frac{\partial \dot{B}_m}{\partial t} = -j \omega \dot{B}_m \tag{2.29}$$

$$\text{div } \dot{B}_m = 0 \tag{2.30}$$

En écrivant le rotor de l'équation (2.28) on a :

$$\nabla X, \nabla X \dot{B}_m = -\nabla^2 \dot{B}_m = \mu \text{ rot } \dot{J}_m = -j \frac{\omega \mu}{\varrho} \dot{B}_m \tag{2.31}$$

$$\triangle \dot{B}_m = j \lambda^2 \dot{B}_m \tag{2.32}$$

où on a noté :

$\dot{J}_m$ — densité du courant (de la bande) de l'induit

ϱ — la résistivité spécifique du rotor ferromagnétique

$\lambda^2 = \frac{\omega \mu}{\varrho}$ une grandeur qui dépend du glissement (2.33)

μ — la perméabilité magnétique du matériel de l'induit ferromagnétique.

En utilisant, la méthode de séparation des variables en équation (2.32) dans laquelle les coefficients sont supposés constants et en écrivant les les conditions suivantes :

l'induction $\dot{B}_{\delta mz}$ et $\dot{B}_{\delta mx}$ sont des fonctions paires en y, mais $\dot{B}_{\delta my}$ est une fonction impaire en y, ainsi qu'a $z = \infty$ les fonctions sont finies, il en résulté les suivantes :

$$\dot{B}_{mx} = \dot{M}_{2x} \cos \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m \cdot z} \tag{2.34}$$

$$\dot{B}_{my} = \dot{M}_{2y} \sin \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m \cdot z} \tag{2.35}$$

$$\dot{B}_{mz} = \dot{M}_{2z} \cos \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m \cdot z} \tag{2.36}$$

Le paramètre $\dot{\gamma}_m$ se détermine de la condition de séparation des variables

$$\dot{\gamma}_m^2 = \eta_m^2 + j\lambda^2 . \tag{2.37}$$

Les trois relations de liaison entre les constantes d'intégration $\dot{M}_{2x}$, $\dot{M}_{2y}$, $\dot{M}_{2z}$ s'obtiennent des conditions suivantes :

— la loi du flux magnétique :

$\nabla \dot{\bar{B}}_m = 0$, il résulte avec (2.40) :

$$\dot{M}_{2x} = j \frac{\dot{\gamma}_m}{\eta_m^2} \dot{M}_{2z} \tag{2.38}$$

— à $z = 0$ la densité du courant d'aprèe l'axe Oz est nulle, parces que l'induit est borné par un milieu diélectrique.

$$\mu \dot{J}_{mz} = \text{rot } \dot{\bar{B}}_m \cdot \bar{k} = \frac{\partial \dot{B}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{B}_{mx}}{\partial y} = 0 \tag{2.39}$$

$$-j\alpha \dot{M}_{2y} = -\beta_m \cdot \dot{M}_{2x} . \tag{2.40}$$

En appliquant la loi du circuit magnétique sur le contour indiqué dans la fig. 6 et considéré situé à $y = 0$, on a :

$$\oint \dot{\bar{H}}_m \, d\bar{l} = \int_0^\infty \dot{J}_{my} \Delta x \cdot dz . \tag{2.41}$$

Mentionnons que la perméabilité magnétique se considère pour le glissement du fonctionnement de la machine.

Si nous négligeons la chute de tension magnétique de l'inducteur on obtient :

$$\oint \dot{\bar{H}}_m \, d\bar{l} = j\alpha \cdot \frac{\dot{M}_{2z}}{\mu \eta_m} \Delta x + j\alpha \frac{\dot{M}_{2z}}{\mu_0} \cdot \Delta x \cdot - j\alpha \frac{B_{0m}}{\mu_0} \left(\frac{1}{\mu_r \eta_m} + \delta \right) \Delta x \tag{2.42}$$

Par l'équation (2.28) on obtient les courants de l'induit :

$$\dot{J}_{mx} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \dot{B}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{B}_{my}}{\partial z}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\gamma_m \dot{M}_{2y} - \beta_m \dot{M}_{2z}\right) \sin \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m \cdot z} \tag{2.43}$$

$$\dot{J}_{my} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \dot{B}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{B}_{mz}}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu}\left(j\alpha \dot{M}_{2z} - \dot{\gamma}_m \dot{M}_{2x}\right) \cos \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m \cdot z} \tag{2.44}$$

$$\dot{J}_{mz} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \dot{B}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{B}_{mx}}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\beta_m \dot{M}_{2x} - \dot{M}_{2y}\right) \sin \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m \cdot z} \tag{2.45}$$

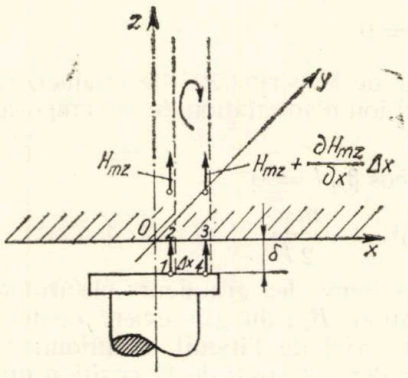


Fig. 6. Figure explicative pour la relation (2.41)

Avec (2.42), (2.44), utilisées dans la relation (2.41) et en faisant les calculs, on obtient :

$$\dot{M}_{2z} = B_{0m} \cdot \dot{\theta}_m \tag{2.46}$$

où on a noté avec $\dot{\theta}_m$ la fonction de réaction :

$$\dot{\theta}_m = \frac{\delta + \dfrac{1}{\mu_r \eta_m}}{\delta + \dfrac{\dot{\gamma}_m}{\mu_r \eta_m^2}} = \frac{1 + \dfrac{1}{\delta \mu_r \eta_m}}{1 + \dfrac{\dot{\gamma}_m}{\delta \mu_r \eta_m^2}} \tag{2.47}$$

Les autres constantes sont déterminées par (2.38) et (2.40).
Les solution générales deviennent :

$$\dot{B}_{mx} = j \frac{\alpha \cdot \dot{\gamma}_m}{\eta_m^2} \dot{\theta}_m B_{0m} \cos \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m z} \tag{2.48}$$

$$\dot{B}_{my} = \frac{\beta_m \dot{\gamma}_m}{\eta_m^2} \dot{\theta}_m B_{0m} \sin \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m z} \tag{2.49}$$

$$\dot{B}_{mz} = \dot{\theta}_m B_{0m} \cos \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m z} \tag{2.50}$$

2.6. *La densité du courant de la bande*

En remplaçant les constantes d'intégration dans les relations (2.43), (2.44), (2.45), on obtient :

$$\dot{J}_{mx} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{j\lambda^2 \beta_m}{\eta_m^2} \dot{\theta}_m B_{0m} \sin \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m z} \tag{2.51}$$

$$\dot{J}_{my} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2 \alpha}{\eta_m^2} \dot{\theta}_m B_{0m} \cos \beta_m y \cdot e^{-\dot{\gamma}_m z} \tag{2.52}$$

$$\dot{J}_{mz} = 0 \tag{2.53}$$

Le choix de l'intervalle de la périodicité de l'induction par la relation (2.5) est justifié par la condition d'annalation de la composante $\dot{J}_{my}$, à $y = \pm l$. Donc :

$$\cos \beta_m l = 0$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{2l} \qquad m = 1, 3, 5 \ldots \tag{2.54}$$

Ainsi sont déterminées toutes les grandeurs électromagnétiques en fonction de l'induction d'excitation B_0, du glissement et des propriétés électriques et magnétiques du matériel de l'induit. Mentionnons que la perméabilité magnétique de l'induit dépend aussi de la position du point considéré de la bande et du régime de fonctionnement de la machine, donc du glissement.

2.7. *L'étude de la fonction de réaction* $\dot{\theta}_m$

Si dans l'expression (2.47) on note :

$$\varepsilon_m = 1 + \frac{1}{\delta \mu_r \eta_m} \tag{2.55}$$

$$M_m = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\mu_r \delta \eta_m^2} \tag{2.56}$$

et si on considère l'approximation :

$$\dot{\gamma}_m = \sqrt{\eta_m^2 + j\lambda^2} \cong \sqrt{j\lambda^2} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}(1 + j) \tag{2.57}$$

qui pour les deux premières harmoniques et pour un glissement supérieur à 5% introduit une erreur inférieure à 6%, on obtient :

$$\dot{\theta}_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{1 + 2u_m + 2u_m^2}} e^{j\varphi_m} \tag{2.58}$$

$$\varphi_m = -\operatorname{arc\,tg} \cdot \frac{u_m}{1 + u_m} . \tag{2.59}$$

La fonction de réaction $\dot{\theta}_m$ nous indique l'influence du phénomène de réaction des courants tourbillonnaires de l'induit sur les grandeurs électromagnétiques. Ainsi si nous nous référons à la variation de cette fonction avec le glissement, on voit que le module de celle-ci diminue par l'augmentation du glissament. Le déphasage introduit par le même phénomène est nul quand le glissement est nul et augmente vers 45° quand u_m augmente vers l'infini.

L'étude plus complète de cette fonction se fera quand nous traiterons la variation de la perméabilité magnétique de l'induit.

2.8. *La détermination du couple de la machine*

Par l'interaction entre le champ de l'induction magnétique de l'induit et les courants tourbillonnaires s'engendre une force moyenne donnée par la relation :

$$d\bar{F}_m = \frac{1}{2}\,\dot{\bar{J}}^*_m \times \dot{\bar{B}}_m\, dv\,. \tag{2.60}$$

Dans celle-ci $\dot{\bar{J}}^*_m$ est la valeur conjuguée de la densité du courant et $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ est l'élément du volume. La force correspondente pour l'intervalle de l'interaction d'un pôle magnétique devient :

$$F_{xm} = 2 \int_{x=0}^{\tau} \int_{y=0}^{l} \int_{z=0}^{\infty} \frac{1}{2}\, \dot{J}^*_{my}\, \dot{B}_{mz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz. \tag{2.61}$$

Le couple total de la machine correspondant á l'harmonique d'order m, est :

$$M_m = \frac{\pi \cdot l \cdot D \cdot p\delta}{2\mu_0} \cdot u_m\, \theta_m^2\, B_{0m}^2 \tag{2.62}$$

Dans cette relation on a utilisé le paramètre u_m introduit par la relation (2.56). Plus haut nous avons considéré la perméabilité magnétique comme constante. Avec la relation (2.62) on peut calculer le couple en tenant compte de la variation de la perméabilité magnétique en fonction du glissement, mais non de la variation avec la variable z.

La littérature citée ne traite pas cette variation, et on prend une valeur moyenne, qui en général se choisit à $z = 0$, mais il faut souligner que ce choix n'est pas justifié théoriquement.

Dans cet article on développe une méthode de calcul dans laquelle on tient compte autant de la variation de la perméabilité magnétique avec le glissement que de la variation par la variable z.

3. La consideration de la variation de la perméabilité.

3.1. *L'etude de la variation de la perméabilité magnétique*

La perméabilité magnétique est une fonction déterminée de la caractéristique de magnétisation du fer de l'induit et de l'induction résultant de l'induit. Parce que cette induction dépend de plusieurs variables :

— de l'induction d'excitation $B_{\delta 0}$, dépendant du temps,

— de la position du point considéré,

— du glissement ; il résulte que la perméabilité magnétique relative est une fonction générale de la forme :

$$\mu_r = F_1[B_m(B_0, x, y, z, t, s)] = F_2(B_0, x, y, z, t, s) \tag{3.1}$$

Pour la simplification de l'étude, on admet que la perméabilité relative a une valeur constante avec les variables x, y et le temps t et donc la relation (3•1) devient :

$$\mu_r = F_3(B_0, z, s) \tag{3.2}$$

Cette supposition est justifiée parce que l'induction résultant de l'induit est presque constante pour une profondeur déterminée autant au long de l'induit qu à la périphérie. De plus, parce que l'induction résultant de l'induit correspond à une grande saturation, la variation par le temps est constante pour la majorité de l'intervalle de la périodicité. Pour le calcul des grandeurs électromagnétiques, il est justifié d'utiliser la perméabilité magnétique correspondant à la première harmonique de l'induction résultant. En négligeant la composante B_{1y} , l'induction résultant dévient :

$$\dot{B}_1 = \left(1 - \frac{\dot{\gamma}_1^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{\theta}_1 B_0 \cdot e^{-\dot{\gamma}_1 z} \tag{3.3}$$

Mais pour des glissements supérieurs à 5%, on a : $\left|\frac{\dot{\gamma}_1}{\alpha}\right| \gg 1$, donc on peut écrire :

$$\dot{B}_1 = j \frac{\dot{\gamma}_1}{\alpha} \dot{\theta}_1 \cdot B_0 \cdot e^{-\dot{\gamma}_1 z} \tag{3.4}$$

En tenant compte de la relation (2.57), le module de l'induction résultant est :

$$B_1 = \frac{\lambda}{\alpha} \theta_1 B_0 e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{3.5}$$

Si nous notons par :

$$\frac{B_1}{B_0} = f_1(\mu_r) \tag{3.6}$$

$$\frac{\lambda}{\alpha} \theta_1 e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} = f_2(s, \mu_r, z). \tag{3.7}$$

la condition de vérification de la relation (3.5), devient : $f_1 = f_2$.

Le résolution du syseéme (3.5), (3.6), 3.7) et la relation qui donne la caractéristique de magnétisation, se fera par une méthode graphique comme suit :

A. La détermination de la fonction $f_1(\mu_1)$

1. On représente graphique la caractéristique de magnétisation $B = f_1'(\mu_r)$ fig. 7.

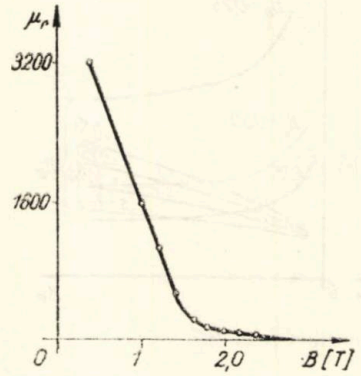


Fig. 7. Caractéristique de magnétisation du matériel de l'induit

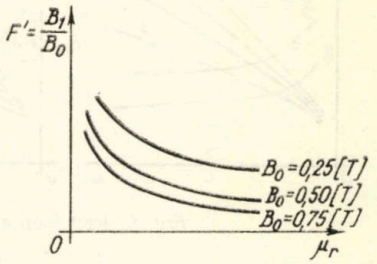


Fig. 8. Représentation graphiques des curbes $f_1(\mu r)$

2. On choisit une série de valeurs pour l'induction d'excitation B_0, par exemple $B_0 = 0{,}25$; 0,25 ; 0,75 [T]

3. On prend une série de valeurs pour μ_r, par exemple : $\mu_r = 25$; 50 ; 100 ; 300 ; 500.

4. On lit de la courbe de magnétisation, les valeurs correspondant pour l'induction.

5. On fait le rapport donné de la relation (3.6) et en représentant graphiquement on obtient la famille des courbes de la fig. 8.

B. La détermination de la fonction f_2 (s, μ_r, z). Pour une machine donnée, en tenant compte des expressions des grandeurs de la relation (3.7) nous pouvons procéder comme suit :

1. On choisit une série de valeurs pour le glissement s, par exemple $s = 0{,}1$; 0,25 ; 0,50 et 1.

2. On choisit une série de valeurs pour μ_r, par exemple $\mu_r = 25$; 50 ; 100 ; 300 ; 500.

3. En utilisant les relations (2.2), (2.3), (2.33), (2.55), (2.56), et (2.58) on calcule la fonction f_2 avec la relation (3.7), correspondant à une z choisie.

4. On répète le calcul précédent pour une série de valeurs pour z, par exmple :

$$z = 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 5 \text{ mm}$$

5. On réprésente graphique la famille de courbes f_2 (μ_r, B_0) pour une certaine z et puis, sur chaque diagramme obtenuu, on répète la représentation de la fonction f_1 (μ_r). Ainsi on obtient le groupe suivant de diagrammes représentés dans la fig. 9.

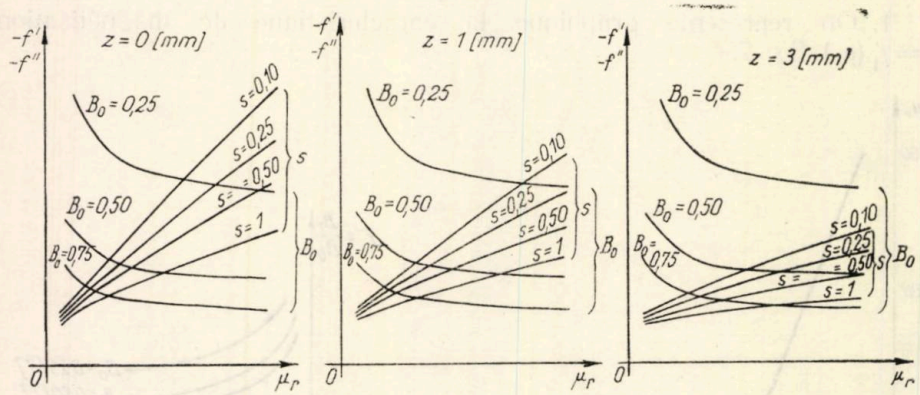


Fig. 9. Représentation graphique des fonction f_1 et f_2.

6. A l'intersection de ces familles de courbes, la relation (3.5) est satisfaite et donc, nous pouvons lire $\mu_r = f_3$ (B_0, z, s). La représentation graphique de cette fonction est donnée par les courbes de forme générale représentées dans la fig. 10.

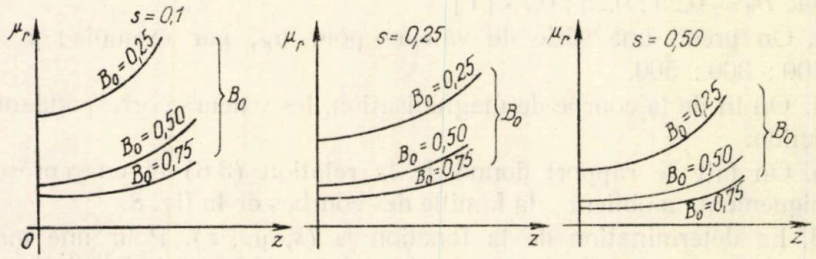


Fig. 10. Représentation graphique de la perméabilité magnétique en fonction de l'induction d excitation, glissement et profondeur.

Le calcul du couple par la relation (2.62) peut être fait soit en tenant compte de la variation de la perméabilité avec z, soit en considérant une valeur constante choisie á une certaine z, valeur qui n'est pas justifiée théoriquement mais en choisissant la valeur pour $z = 0$, l'erreur introduite est négligeable.

La calcul avec une perméabilité choisie pour $z = 0$, se vérifie expérimentalement parce que la perméabilité magnétique est presque constante avec z pour des inductions moyennes et grandes et ce fait est explicable par le phénomène de saturation.

3.2. *La détermination du couple en tenant compte de la variation de la perméabilité avec z.*

En remplaçant (2.44) dans (2.61) et en intégrant par rapport a x et y, on obtient :

$$M_m = p D F_{xm} = \frac{l \cdot \tau \cdot p \cdot D \cdot \lambda^2 \cdot \alpha \cdot B_{0m}^2}{4 \cdot \eta_m^2 \cdot \mu_0} \cdot \int_0^\infty \frac{\theta_m^2}{\mu_r} \cdot e^{-2\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \cdot dz \qquad (3.8)$$

Si nous notons :

$$\frac{\theta_m^2}{\mu_r} \cdot e^{-\sqrt{2}\lambda z} = \Psi'_m \qquad (3.9)$$

le calcul de la relation (3.9) se fera par une méthode graphique comme suit :

1. On choisit une série de valeurs pour l'induction d'excitation par exemple :

$$B_0 = 0{,}25\ ;\ 0{,}50\ ;\ 0{,}75 \quad [\mathrm{T}].$$

2. On choisit une série de valeurs pour le glissement, par exemple : $s = 0{,}1\ ;\ 0{,}25\ ;\ 0{,}50$ et 1.

3. On dresse un tableau de calcul pour chaque harmonique ou la perméabilité magnétique est prise dans la fig. 10.

4. On dresse des tableaux de calcul pour chaque induction d'excitation choisie.

5. On trace des diagrammes de type indiqué dans la fig. 11.

6. On intègre graphiquement la fonction Ψ'_m calculée par la relation (3.9) et il résulte la fonction

$$\Psi_m = \int_0^\infty \Psi'_m \, dz \qquad (3.10)$$

7. On trace la courbes résultant pour chaque induction *Bo*.

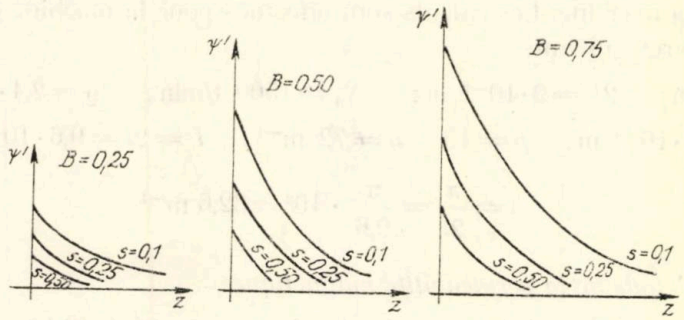


Fig. 11. Représentation graphique de la fonction ψ'.

8. On calcule l'harmonique d'ordre m du couple, par la relation suivante :

$$M_m = K_{2m} \lambda^2 \cdot \Psi_m \cdot B_{0m}^2 \qquad (3.11)$$

9. On trace graphiquement les caractéristiques mécaniques M (s, Bo) qui sont des courbes de formes données dans la fig. 12.

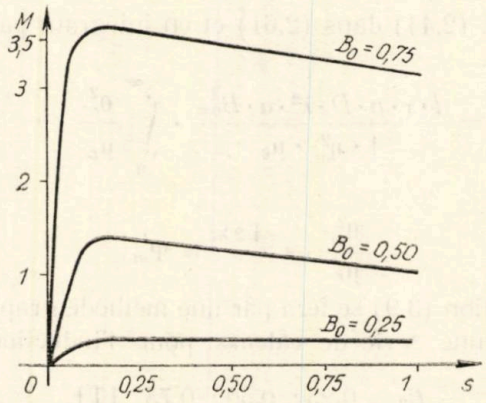


Fig. 12. Caractéristiques mécaniques pour différentes inductions d'excitation.

4. L'étude des grandeurs électromagnétiques de l'induit

Comme une application de la théorie développée plus haut, nous allons considérer une machine donnée, dans laquelle nous étudierons les phénomènes de base qui ont lieu dans l'induit. Pour simplifier les calculs, considérons $\beta_m = 0$, ce qui signifie que nous ne considérons pas l'effet de la longueur finie de la machine. Cette simplification n'introduit pas de grandes erreurs dans l'analyse de la perméabilité magnétique, du champ magnétique et de la fonction de réaction, mais il faut mentionner que les erreurs sont appréciables en ce qui concerne le champ de la densité du courant et le couple de la machine. Les calculs sont effectués pour la machine donnée par les paramètres suivants :

$$D = 0{,}28 \text{ m}; \quad 2b = 9 \cdot 10^{-2} \text{ m}; \quad N_1 = 1500 \text{ t/min}; \quad \varrho = 2{,}4 \cdot 10^{-7}\ \Omega \cdot \text{m};$$

$$\delta = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}; \quad p = 10; \quad \alpha = 72 \text{ m}^{-1}; \quad L = 2l = 9{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ m};$$

$$\beta = \frac{\pi}{2l} = \frac{\pi}{9{,}6} \cdot 10^2 = 32{,}6 \text{ m}^{-1} \tag{4.1}$$

4.1. *L'étude de la perméabilité magnétique*

En procédant par la méthode développé au point (3.1) pour $z = 0$, on obtient le graphique de la fig. 13 et 14.

On remarque que, pour l'induction d'excitation importante, la perméabilité relative reste presque constante, ce qui s'explique par le phénomène de saturation magnétique.

L'induction résultant de l'induit est donnée surtout par la composante d'après l'axe *ox*. Ainsi en utilisant la fonction f_1 représentée dans la fig. 13, on obtient l'induction résultant représentée dans la fig. 15.

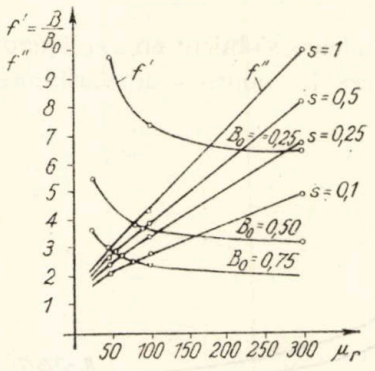


Fig. 13. La résolution graphique de la perméabilité magnétique de l'induit.

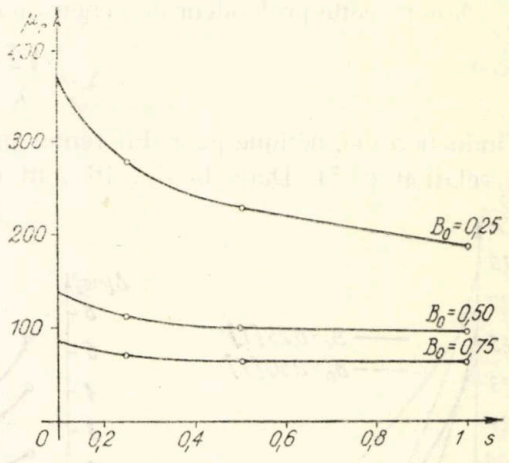


Fig. 14. La variation de la perméabilité magnétique relative de l'induit à $z = 0$ en fonction du glissement et à différentes inductions d'excitatiin.

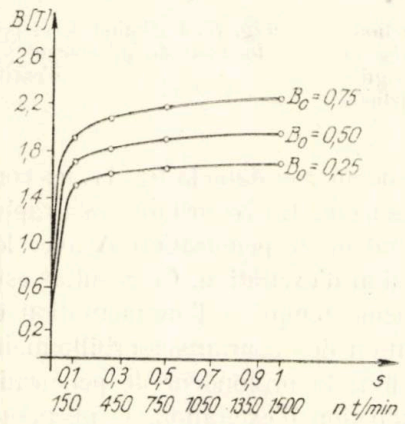


Fig. 15. La variation de l'induction magnétique de l'induit en fonction du glissement pour différentes inductions d'excitation et pour $z = 0$.

4.2. *La pénétration du champ dans l'induit.*

Nous allons analyser les phénomènes dans la première approximation avec la perméabilité constante par rapport à la variable z.

Pour l'aprréciation de la pénétration, nous allons calculer la profondeur pour laquelle le champ se rénduit de „e" fois par rapport à la valeur du champ pour $z = 0$.

Notons cette profondeur de pénétration axec Δ et avec (3.5), il résulte :

$$\Delta = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \tag{4.2}$$

L'induction magnétique pour différentes profondeurs s'obtient en appliquant la relation (3.5). Dans la fig. 16 sont tracées les courbes de variations

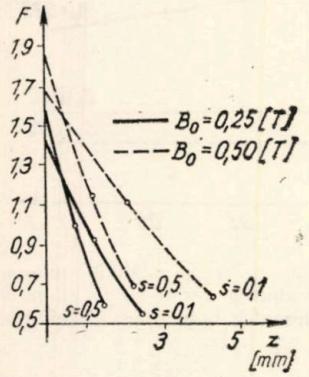


Fig. 16. Variation de l'induction magnétique de l'induit avec la profondeur z pour différents glissements et différentes inductions d'excitation.

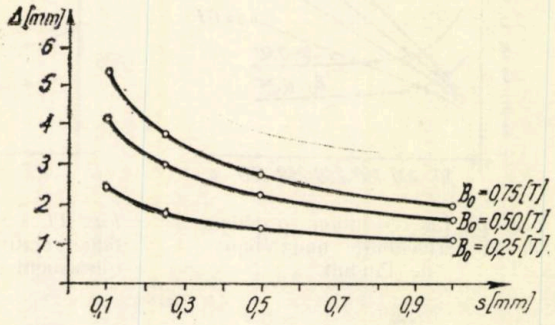


Fig. 17. Variation de la profondeur de pénétration en fonction du glissement pour différentes inductions d'excitation.

du champ avec la profondeur z et dans la fig. 17, les courbes de la profondeur Δ en fonction du glissement. En regardant ces graphiques on remarque la diminution de la profondeur de pénétration Δ avec le glissement et l'augmentation avec l'induction d'excitation. Ce résultat est explicable parce que d'une part, dans le même temps à l'augmentation du glissement correspond aussi l'augmentation des courants tourbillonnaires de l'induit, ce qui diminue le champ et donc la profondeur de pénétration. D'autre part, par l'augmentation de l'induction d'excitation, le phénomène de saturation est plus prononcé, donc l'induction limitée oblige de pouser en profondeur les lignes du flux magnétique, ce qui conduit à l'augmentation de la profondeur de pénétration.

4.4. *L'étude de la réaction de l'induit*

Comme nous avons vu l'étude du phénomène de réaction peut se faire par l'étude d'une fonction nommée fonction de réaction.

Conformement avec la relation (2.53) sont calculés et représentés graphiquement dans les fig. 18 et 19, le module et l'argument de cette fonction.

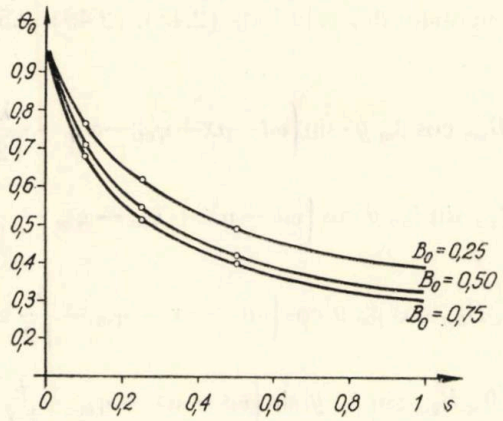


Fig. 18. Variation du module de la fonction de réaction par rapport au glissement pour différentes inductions d'excitation.

De ces graphiques on remarque que la réaction augmente avec le glissement, c'est à dire que le module diminue et l'argument augmente vers 45° avec l'augmentation du glissement.

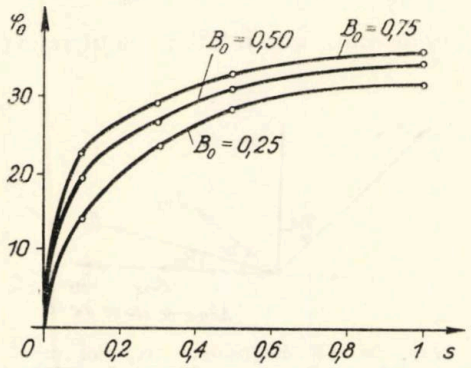


Fig. 19. Variation de l'argument de la fonction de réaction par rapport au glissement pour différentes inductions d'excitation.

Dans le même temps, on remarque que la réaction est plus prononcée avec l'augmentation de l'induction d'excitation, ce qui s'explique par l'intensification des courants tourbillonnaires.

4.5. *Le champ électromagnétique de l'induit*

Les valeurs instantanées pour l'harmonique d'ordre m du champ électromagnétique s'obtiennent des relations (2.48), (2.49), 2.50), (2.51), (2,52), (2.53), et sont :

$$B_{mx} = -\frac{\alpha\gamma_m}{\eta_m^2}\theta_m B_{0m}\cos\beta_m y \cdot \sin\left(\omega t - \alpha x + \psi_m; -\varphi_m - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.3}$$

$$B_{my} = \frac{\beta_m\gamma_m}{\eta_m^2}\theta_m B_{0m}\sin\beta_m y \cos\left(\omega t - \alpha x + \psi_m - \varphi_m - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.4}$$

$$B_{mz} = \theta_m B_{0m}\cos\beta_m y \cos\left(\omega t - \alpha x - \varphi_m - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.5}$$

$$J_{mx} = -\frac{1}{\mu}\frac{\lambda^2\beta_m}{\eta_m^2}\theta_m B_{0m}\sin\beta_m y \sin\left(\omega t - \alpha x - \varphi_m - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.6}$$

$$J_{my} = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda^2\alpha}{\eta_m^2}\theta_m B_{0m}\cos\beta_m y \cos\left(\omega t - \alpha x - \varphi_m - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.7}$$

$$J_{mz} = 0 \tag{4.8}$$

ou on a noté :

$$\psi_m = \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{\lambda^2}{\eta_m^2}; \varphi_m = \text{arctg}^{-1}\frac{u_m}{1+u_m}; \quad u_m = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\mu_r\delta\eta_m^2} \tag{4.9}$$

Les déphasages notés dans ces relations sont relevés dans le diagramme de la fig. 20.

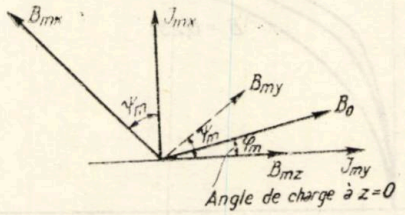


Fig. 20. La diagramme vectoriel des grandeurs électromagnétiques de l'induit pour l'harmonique d'ordre m.

Pour $\beta_m = 0$ et $\gamma_0 \cong \lambda + \alpha$, les relations pour les valeurs instantanées, deviennent :

$$B_{0x} = -\frac{\lambda+\alpha}{\alpha}\theta_0 \cdot B_0 \cdot \sin\left(\omega t - \alpha x + \psi_0 - \varphi_0 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.10}$$

$$B_{0y} = 0 \tag{4.11}$$

$$B_{0z} = \theta_0 \cdot B_0 \cos\left(\omega t - \alpha x + \varphi_0 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.12}$$

$$J_{0x} = 0$$

$$J_{0y} = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot \alpha} \theta_0 \cdot B_0 \cos\left(\omega t - \alpha x - \varphi_0 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} z\right) e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}} z} \tag{4.13}$$

$$J_{0z} = 0$$

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \tag{4.14}$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{u_0}{1 + u_0} \quad \text{(l'argument de charge à } z = 0\text{)} \tag{4.15}$$

Dans l'étude des machines électriques, il est important d'étudier deux grandeurs déterminées du champ électrique : couche de courant et ampères — tours de réaction.

La couche de courant notée par I_y est définie par la relation :

$$\dot{J}_{0y} = \int_0^\infty \dot{J}_{0y}\, dz = \frac{1}{\mu \gamma_0} \cdot \frac{\lambda^2}{\alpha} \cdot \theta_0 \cdot B_0 \tag{4.16}$$

Dans les valeurs instantanées avec l'approximation $\gamma_0 = \lambda$ (très bon pour $s > 5\%$) on a :

$$I_{0y} = \frac{\lambda}{\mu \cdot \alpha} \theta_0 \cdot B_0 \cos(\omega t - \alpha x - \psi_0 - \varphi_0) \tag{4.17}$$

La variation de la couche du courant en fonction du glissement et de l'induction d'exitation est tracée dans la fig. 21.

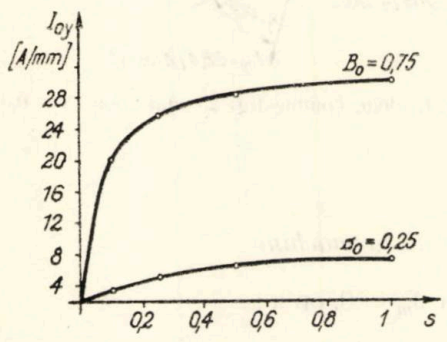


Fig. 21. Variation de la couche du courant de l'induit par rapport au glissement et à différéntes inductions d'excitatioin.

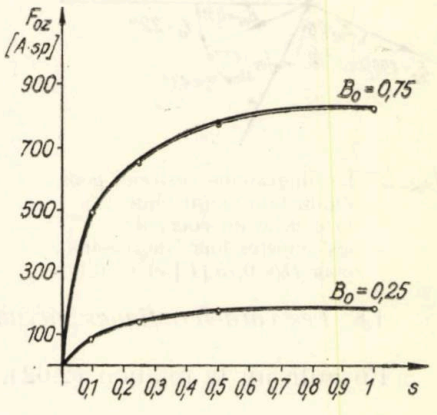


Fig. 22. Variation des ampères — tours de réaction par rapport au glissement à différentes inductions d'excitation.

Les ampères — tours des réaction sont calculés par la relation :

$$F_{0z} = \int_{x}^{x+\tau} I'_{0y\,\max} \cdot \cos(\omega t - \alpha x - \psi_0 - \varphi_0)\, dx = \frac{2I_{0y\,\max}}{\alpha} \sin(\omega t - \alpha x - \psi_0 - \varphi_0) \tag{4.18}$$

Avec (4.17), on a :

$$F_{0z} = \frac{2\lambda}{\mu\alpha^2}\theta_0 B_0 \sin(\omega t - \alpha x - \psi_0 - \varphi_0) \tag{4.19}$$

Les résultats des calculs sont tracés graphiquement dans la fig. 22.

Les diagrammes vectoriels pour ces grandeurs définies plus haut sont représentés dans les fig. 23 et 24. Ceux-ci représentent les grandeurs électromagnétiques à deux profondeurs : pour $z = 0$ et $z = \Delta$. On remarque que le déphasage de charge, c'est à dire le dàphasage entre le champ B_z à la marche à vide ($s = 0$) et le même champ à la marche en charge (s quelconque), varie avec la profondeur z.

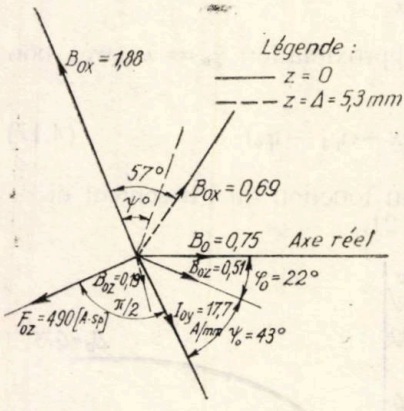


Fig. 23. Le diagramme vectoriel pour :
— l'induction magnétique
— la couche du courant
— les ampères-tours de réaction,
pour B_0=0,75 [T] et s=0,1.

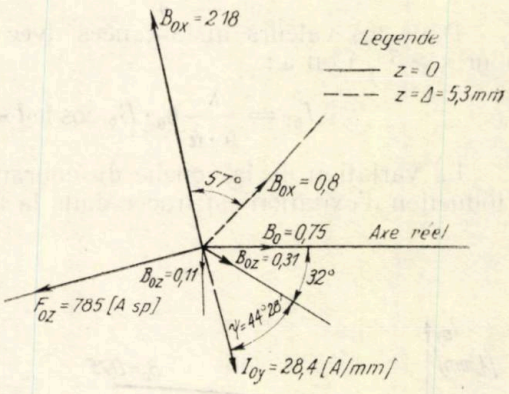


Fig. 24. idem, comme fig. 23 mais pour s = 0,5.

4.8. *Les caractéristiques mécanique de la machine*

En utilisant la relation (2.62), pour $\beta_m = 0$, on a :

$$M_0 = 19{,}25 \cdot u_0\, \theta_0^2\, B_0^2 \,\text{kgf} \cdot \text{m}$$

En faisant les calculs, on obtient les graphiques de la fig. 25.

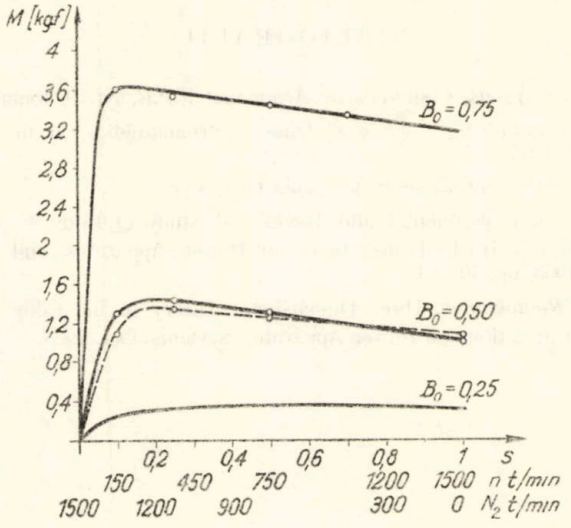


Fig. 25. Caractéristiques méchaniques : — couple par rapport au glissement pour différentes inductions d'excitation, calcule avec les dates et considérations du point 4.
... Idem, calculé d'après une méthode indiquée dans la litterature [2]

4.9. *CONCLUSIONS*

En utilisant les équations du champ électromagnétique de l'induit et les conditions de frontière on a déterminé autant leurs solutions que le couple mécanique de la machine.

A l'intégration des équations on a considéré la perméabilité magnétique constante, puis on a présenté une méthode graphique de détermination du champ électromagnétique et du couple en fonction de la caractéristique magnétique du matériel de l'induit.

L'étude du phénomène de réaction de l'induit est faite en introduisant une fonction complexe dénommée „fonction de réaction".

En comparant le résultat du calcul du couple mécanique de la machine pour $B_0 = 0{,}5$ [T] et $s = 0{,}25$, on obtient :

— par un calcul simplifié en considérant $\beta_m = 0$. ... $M = 1{,}39$ kg f m

— en appliquant le calcul indiqué au point 2 en considérant les premières sept harmoniques ... $M = 1{,}24$ kg f m.

— en appliquant la méthode de calcul indiqué dans la littérature technique [2] ... $M = 1{,}32$ kg f m.

Les petites différences entre ces résultats par rapport à une méthode de calcul de la littérature vérifiée expérimentalement, nous donnent des indications favorables pour la théorie développée plus haut.

BIBLIOGRAFIE

1. *Rădulеț R.* și *Ifrim Alfons,* Comunicările Academiei R.P.R. Nr. 9, tomul XII, 1962.
2. *Pozdeev A. D., Rozman B.,* Cuplaje și frîne electromagnetice cu indus masiv. Editura tehnică 1965.
3. *Sarov B. S.,* Electromagnitnîie muftî skoljenia GEI, 1958.
4. *Davies E. John,* An Experimental and Theoretical Study of Eddy — Current Couplings and Brakes IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 82. Aug. 1963, pp. 401—19.
5. *Malti M. G., R. Ramokumar.* Three Dimensional Theory of the Eddy. Current Coupling IEE Transactions on Power Apparatus Systems. Oct. 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

TEHNOLOGIA METALELOR

C.Z. : 621.791.75 : 621.37

ETUDE DU COMPORTEMENT DES PARTICULES DE METAL DANS L'ARC ELECTRIQUE VIBRE A OSCILLATIONS ULTRA SONORES TRANSVERSALES, A MODELE HYDRODYNAMIQUE *)

P. SONEA, I. SONEA

Les études expérimentales concernant les possibilités d'influencer la structure des joints soudés par des oscillations ultrasonores ont prouvé que les oscillations longitudinales, agissant directement sur la masse liquide selon la méthode proposée par plusieurs auteurs (17), provoquent des modifications insignifiantes de la structure, par rapport à la soudure classique. C'est pourquoi cette méthode ne s'est pas répandue.

Les auteurs de la présente ont expérimenté une autre méthode, qui modifie de manière essentielle la structure du joint par rapport à la soudure classique, réalisant une amélioration de tous les paramètres de la soudure et qui consiste, en essence, à appliquer les oscillations en direction transversale à l'électrode de soudure, et non pas à la masse liquide ou à la pièce à souder, comme préconisé par les méthodes mentionnées dans la littérature.

La concentrateur a été prolongé au moyen d'un manchon dont l'orifice est traversé par le fil à souder, nu. L'axe du concentrateur est situé à une distance de l'extrémité libre de l'électrode, égale à un quart de la longuer d'onde des oscillations, afin que les particules de métal, détachée de l'électrode, partent d'un ventre de l'onde pour se diriger vers la pièce.

Les expériences ont été effectuées sur un joint exécuté par soudure automatique, l'électrode étant vibré à des fréquences variant entre 17,5 kHz et 24 kHz.

Les modifications des paramètres électriques, mécaniques et métallurgiques ont été enregistrées de manière suivie, et ont prouvé que :

1) La vibration de l'électrode favorise l'amorçage de l'arc ;

2) L'arc électrique devenait stable, homogène, et présentait un aspect différent de celui de l'arc non-vibré ;

3) La tension est tombée de 45 à 40 V, l'intensité augmentant selon la caractéristique extérieure du générateur de soudure ;

*Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest. 28—30 mai 1965.

4) Le matériau déposé a augmenté quantitativement, ce qui a été remarqué en maintenant la vitesse d'avance de la soudure, correspondent à l'arc non-vibré.

5) La résistance à la rupture de joint irradié a augmenté de 12,5% en moyene (de 55 kgf/mm² a 64 kgf/mm²).

La dureté, dans les diverses zones, a augmenté de 25% en moyenne : de $H_B = 146$, non-vibre, a $H_B = 182$ (vibré).

L'allongement, de 16 à 18%.

La limite d'écoulement, de 34 à 36%.

La striction, de 37 à 45%.

6) L'importantes modifications métallographiques ont été enregistrées, le résultat étant une structure homogène, constituée de perlite et de ferrite à granulosité polygonale.

7) La structure Widmanstätten, caractéristique pour le joint soudé sans traitement thermique, a successivement disparu, fonction de l'intensité et de la fréquence des oscillations.

8) Les fréquences supérieures à 24 kHz dans le cas étudié, ont moins d'influence sur les paramètres mécaniques et métallurgiques que les fréquences comprises entre 17,5 et 24 kHz.

Le matériau employé a été la tôle en acier GS 16, pour récipients de propane, de 32 mm d'épaisseur.

A part la vitesse d'avancement, toutes les autres conditions de la soudure automatique sous flux sont restées non changées.

Les importantes modifications que la vibration tranversale de l'électrods fait intervenir au cours du processus de soudure, comparé à la soudure classique, soulève de nombreux problèmes nouveaux. Afin de les expliquer, les autuers ont émis deux hypotheses, concourant aux modifications signalées par l'expérience :

1) Les grosses particules de métal fondu se divisent en fragments sous l'influence des oscillations transversales de l'électrode, mettant en liberté les inclusions de gaz, de sorte qu'on arrive à un dégazage avancé du joint soudé. Le degré d'émiettement dépend de l'intensité et de la fréquence des oscillations.

2) La pénétration du champ ultrasonore à l'intérieur des particules de dimensions très réduites provoque une redistribution de la grosseur de grain, en modifiant leur structure des la phase liquide.

Les nouveaux problemes soulevés par ces deux hypothèses sont extreêmement complexes, ce qui a décidé les auteurs à mener l'étude, de deux manières différentes, à savoir : élaborer une étude du comportement des particules de dimensions stables dans l'arc électrique vibré, afin d'établir la relation entre les paramètres de l'oscillation des particules et du milieu, ce qui correspondrait à l'application pratique de la soudure selon la nouvelle méthode ; et d'autre part, une étude relative à l'échange d'énergie entre les microparticules composant une particule stable, énergie fournie par le champ ultrasonore, ce qui contribuerait à la possibilité d'influencer la structure du matériau se trouvant en divers états d'agrégation, par des méthodes, autres que thermomécaniques.

Dans la présente étude, on ne traite que d'un seul problème soulevé par l'application industrielle du procédé de soudure électrique automatique, sous couche de laitier. Dans ce but, ce qui intéresse c'est l'intensité des oscillations ultrasonores appliquées transversalement à l'électrode, afin que la modification de structure se produise. L'intervalle des fréquences est établi par voie expérimentale, étant compris entre 17,5 et 24 kHz. Les modifications de structure les plus importantes, pour intensité constante du champ ultrasonore, sont réalisées entre 17,5 et 18 kHz. L'influence de la fréquence sur la structure n'est pas étudiée dans ce qui suit, et constitue l'objet de recherches futures.

Aux fins de l'étude, on a choisi un modèle hydrodynamique, reproduisant de manière analogue les phénomènes de l'arc électrique vibré, rapporté à un milieu froid (20°) où les phénomènes peuvent être poursuivis beaucoup plus facilement. Ce modèle consiste en un tube élastique, aux parois aussi minces que possible, la section de l'orifice étant égale à celle de l'électrode. L'élasticité du tube doit être choisie de manière à ce que l'amplitude du bout libre soit égale à l'amplitude de l'électrode. Vu cependant que cette condition est pratiquement irréalisable, on choisit un tube très élastique (1), fig. 1 par exemple en caoutchouc ou matière plastique, de secteur d'orifice égale à celle de l'électrode, qu'on introduit dans un autre tube rigide (2), par exemple en cuivre, laiton ou acier. L'axe du concentrateur est fixé à une distance égale à $\lambda/4$ de l'extrémité libre du tube élastique, tandis qu'on règle le tube coaxial en métal jusqu'à ce que l'amplitude du tube électrique soit égale à celle de l'électrode. Un liquide (eau ou mercure) coule par la tube élastique, dont le débit est égal au volume de métal déposé pendant l'unité de temps dans le joint soudé. Ce modèle reproduit le mouvement de la particule de métal dans l'arc vibré, analogue au mouvement des particules de liquide dans l'air. L'analogie est établie à l'aide de coefficients de similitude.

Ainsi, notons par η_1 la viscosité cinématique de l'air froid, par a_1 le rayon de la particule liquide, par ϱ_1 la densité moyenne de la particule liquide. Les coefficients de similitude seront :

$$\frac{\eta_1}{\eta} = k_1^n \; ; \quad \frac{a_1}{a} = k_2 \; ; \quad \frac{m_1}{m} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = k_3 . \tag{1—1}$$

Dans les relations qui suivent, on a procédé à certaines approximations, aux fins de simplification des calculs. Ainsi, on suppose que les forces non-vibratoires, agissant dans l'arc électrique vibré impriment à la particule de métal un mouvement de translation, analogue à celui de la particule de liquide du modèele hydrodynamique. Si l'on admet que v_0 este la vitesse des particules de métal sous l'action des forces non-vibratoires, et l'on note par v_{01} la vitesse de déplacement des particules de liquide, on considère que le rapport entre ces deux vitesses est une constante

$$\frac{v_{01}}{v_0} = k_4 . \tag{1—2}$$

Dans l'arc vibré, diverses forces agissent sur les particules de métal, à savoir des forces de nature thermique, électrodynamiques, de gravitation, de frottement visqueux, aérodynamiques, ainsi que des forces dues à la pression des oscillations ultrasonores. Ces forces ont des influences différentes sur le mouvement de la particule : d'aucunes ont des composantes

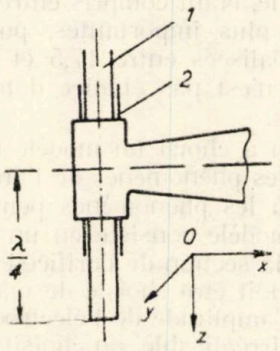


Fig. 1.

sur les trois axes, d'autres rien que sur l'axe Oz. On estime que les forces dues aux causes, autres que la pression ultrasonore — que nous appellerons „forces non-vibratoires" — n'ont qu'une contribution mineure au déplacement de la particule, se réduisant à un mouvement de translation uniforme, à la vitesse — v_{01} ou bien — ce qui revient au même — que le fluide se déplace à la vitesse + v_{01} par rapport à la particule.

A part ces suppositions, il est nécessaire de procéder encore à une deuxième série de simplifications ayant trait à la particule suspendue en soi, à savoir que la particule est rigide et àsymétrie sphérique ; que la pression ultrasonore peut modifier la structure de la particule, mais que celle-ci garde son impénétrabilité pour le milieu, c'est à dire que dans le champ ultrasonore les fragments sont de dimensions tellement réduites, que les forces de cohésion dépassent les forces dues à la pression ultrasonore.

La troisième série de simplifications, enfin, se rapporte au milieu. Ainsi, on admet que le fluide dans lequel a lieu le mouvement s'étend à l'infini, que sa viscosité cinématique est constante, et qu'il est compressible.

Avec ces simplifications, le mouvement de la particule dans le modele hydrodynamique peut être étudié à l'aide de la formule Stokes-Navier

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = 6 \pi a_1 \eta_1 w_r \qquad (1—3)$$

m étant la masse spécifique de la particule, r — le déplacement, a_1 — le rayon de la particule, η_1 la viscosité, w_r — la vitesse relative entre les molécules du gaz et la particule.

Dans le gaz où se produit la vibration, les molécules sont entraînées dans des mouvements oscillatoires le long des axes Ox et Oy, l'amplitude étant la long de l'axe Oz, tendis que le mouvement oscillatoire de long de

l'axe Oz a l'amplitude le long de l'axe Ox. Entre les molècules du gaz et la particule impénétrable transportée par les forces non-vibratoires dirigées dans le sens de croissance sur l'axe Oz, des forces de frottement visqueux font leur apparition, qui l'entrainent dans un mouvement dépendant de ses dimensions et de sa masse. Sur les trois axes, ou peut écrire la relation 1—3 comme suit :

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = 6\pi a_1 \eta_1 w_x$$

$$m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = 6\pi a_1 \eta_1 w_y \qquad (1—4)$$

$$m_1 \frac{d^2z}{dt^2} = 6\pi a_1 \eta_1 w_z$$

En notant par

$$Z_0 = 718 \frac{1}{F} \sqrt{\frac{J}{\varrho_1 V_g}} \qquad (1—5)$$

l'amplitude de l'oscillation sur l'axe Oz dans le cas des oscillations transversales, f étant la fréquence des oscillations, J — l'intensité du champ ultrasonore en w/cm², ϱ_1 — la densité moyenne des particules dans le modèle hydrodynamique et V_g la vitesse de propagation des oscillations dans le gaz, les composantes de la vitesse relative le long des axes Ox et Oy pouvant être exprimées sous la forme :

$$w_x = 2\pi f z_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) - \frac{dx}{dt}$$

$$w_y = 2\pi f z_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} y\right) - \frac{dy}{dt} \qquad (1—6)$$

On suppose que sur l'axe Oz, un mouvement de translation du fluide se superpose à la composante vibratoire à la vitesse de translation v_{01} résultant des forces non-vibratoires, de formule

$$w_z = 2\pi f t x_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) + v_{01} - \frac{dz}{dt} \qquad (1—7)$$

λ étant la longueur d'onde des oscillations.

Avec ces notations, les équations du mouvement, 1—4, deviennent

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = 6\pi a_1 \eta_1 \left[2\pi f z_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) - \frac{dx}{dt}\right]$$

$$m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = 6\pi a_1 \eta_1 \left[2\pi f z_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} y\right) - \frac{dy}{dt}\right] \qquad (1—8)$$

$$m_1 \frac{d^2z}{dt^2} = 6\pi a_1 \eta_1 \left[2\pi f x_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) + v_{01} - \frac{dz}{dt}\right]$$

x_0 étant l'amplitude d'oscillation le long de l'axe Oz, d'expression similaire à 1—5.

En ordonnant les termes dans l'ordre décroissant de la dérivation par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dx}{dt} - 4\pi f \Delta_1 z_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = 2\Delta_1 \\
&\frac{d^2y}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dy}{dt} - 4\pi f \Delta_1 z_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} y\right) = 2\Delta_1 \qquad (1—9) \\
&\frac{d^2z}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dz}{dt} - 4\pi f \Delta_1 x_0 \sin\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} z\right) = 2\Delta_1 v_{01}
\end{aligned}$$

avec

$$\Delta_1 = \frac{3\pi a_1 \eta_1}{m_1}. \qquad (1—10)$$

Avec la remarque que les deux premières équations sont de la même forme, nous nous limiterons à l'intégration de la première et de la dernière équation du groupe 1—9.

La solution de ces équations est basée sur la supposition que les oscillations sont de petite amplitude, que donc en développant la terme

$$\sin\frac{2\pi}{\lambda}x \quad \text{on admet que} \quad \sin\frac{2\pi}{\lambda}x \quad \text{et} \quad \cos\frac{2\pi}{\lambda}x = 1. \qquad (1—11)$$

Ainsi, 1—9 devient

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dx}{dt} - 4\pi f \Delta_1 z_0 \left(\sin 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi f t\right) = 2\Delta_1 \\
&\frac{d^2z}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dz}{dt} - 4\pi f \Delta_1 x_0 \left(\sin 2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda} z \cos 2\pi f t\right) = 2\Delta_1 v_{01}
\end{aligned}$$

En ordonnant les termes, on arrive à

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dx}{dt} + 4\pi f \Delta_1 z_0 \frac{2\pi}{\lambda} x \cos 2\pi f t = 2\Delta_1 + 4\pi f \Delta_1 z_0 \sin 2\pi f t \\
&\frac{d^2z}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dz}{dt} + 4\pi f \Delta_1 x_0 \frac{2\pi}{\lambda} z \cos 2\pi f t = 2\Delta_1 v_{01} + 4\pi f \Delta_1 x_0 \sin 2\pi f t
\end{aligned} \qquad (1—12)$$

Afin de simplifier l'écriture, on procède au remplacement de la variable $2\pi f t = p$, c'est à dire $2\pi f = \frac{dp}{dt}$. Avec ces changments, la dérivée de premier ordre de x est

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} = 2\pi f \frac{dx}{dp} \qquad (1—13)$$

et la dérivée de second ordre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dp^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dp}\cdot\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^2x}{dp^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = (2\pi f)^2\frac{d^2x}{dp^2}. \quad (1-14)$$

Avec 1—13 et 1—14, le couple d'équations 1—12 devient :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dp^2} + \frac{\Delta_1}{\pi f}\cdot\frac{dx}{dp} + 2\frac{\Delta_1}{V_g}z_0 x\cos p = \frac{\Delta_1}{2\pi^2 f^2} + \frac{\Delta_1}{\pi f}z_0\sin p \\ &\frac{d^2z}{dp^2} + \frac{\Delta_1}{\pi f}\cdot\frac{dx}{dp} + 2\frac{\Delta_1}{V_g}x_0 z\cos p = \frac{\Delta_1}{2\pi^2 f^2}v_{01} + \frac{\Delta_1}{\pi f}x_0\sin p \end{aligned} \quad (1-15)$$

avec $V_g = \lambda f$, représentant la vitesse de propagation des oscillations dans le gaz. Afin de ramener ces équations à une forme convenable, on procède à la substitution de variable

$$x = u\,e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} = z \quad (1-16)$$

vu que les équations ne diffèrent qu'en ce qui concerne le terme libre. Dérivant deux fois par rapport à p, on obtient

$$\frac{dx}{dp} = \frac{dz}{dp} = \frac{du}{dp}\,e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} - \frac{\Delta_1}{2\pi f}\cdot u\,e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} \quad (1-17)$$

$$\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2z}{dp^2} = \frac{d^2u}{dp^2}\,e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} + \left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2 u\,e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} - 2\frac{\Delta_1}{2\pi f}\frac{du}{dp}\,e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} \quad (1-18)$$

Avec ces substitutions, les équations 1—15 deviennent :

$$\frac{d^2u}{dp^2} + u\left[\frac{2\Delta_1}{V_g}z_0\cos p - \left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2\right] = \frac{\Delta_1}{\pi f}\left(Z_0\sin p + \frac{1}{2\pi f}\right)e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} \quad (1-19)$$

$$\frac{d^2u}{dp^2} + u\left[\frac{2\Delta_1}{V_g}x_0\cos p - \left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2\right] = \frac{\Delta_1}{\pi f}\left(Z_0\sin p + \frac{v_{01}}{2\pi f}\right)e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} \quad (1-20)$$

Les deux expressions peuvent être ramenées à des équations de type Mathieu à second membre, en substituant les valeurs suivantes :

$$a = \frac{2\Delta_1}{V_g}Z_0\ ;\quad b = -\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2\ ;\quad c = \frac{\Delta_1}{2\pi f}Z_0\ ;\quad d = \frac{\Delta_1}{2\pi^2 f^2} \quad (1-21)$$

$$\frac{d^2u}{dp^2} + u\,(a\cos p + b) = c\,(\sin p + d)\,e^{p\sqrt{b}} \quad (1-22)$$

Le solution de l'équation de type Mathieu à second membre, de forme 1—2, n'est pas encore connue.

Pour l'axe Oz, les coefficients établis par les relations 1—21 restent inchangés, à l'exception de a et d. On notera ainsi

$$a_1 = \frac{2\Delta_1}{V_g} x_0 \quad \text{et} \quad d_1 = \frac{\Delta_1 v_{01}}{2\pi^2 f^2} \tag{1—23}$$

Remplaçant a et d dans 1—22 par a_1, d_1 on remarque que l'écartement par rapport à l'équation Mathieu homogène este provoqué, d'une part par la vibration du fluide, et de l'autre, par son mouvement de translation à la vitesse v_{01}. L'équation 1—22 décrit tant le régime permanent, que celui transitoire de mouvement das particules.

Considérant l'équation homogène 1—22 :

$$\frac{d^2 u}{dp^2} + u(a \cos p - b) = 0 \tag{1—24}$$

on remarque que, sur les trois axes de coordonnées, le régime stationnaire est pareil, indépendamment de v_{01}. En solutionnant cette équation, on peut déterminer l'intensité du champ ultrasonore qui s'applique au modèle hydrodynamique, de manière que le liquide vibré soit transformé en particules de dimensions préétablies.

Afin que la solution de l'équation 1—24 soit l'une des fonctions Mathieu, les coefficients a *et* $(-b)$, figurant dans le deuxième membre, doivent être des valeurs caractéristiques de l'équation homogène, ce qui advient lorsque

$$b = -\frac{1}{2} a^2 + \frac{7}{32} a^4 - \frac{29}{144} a^6 . \tag{1—25}$$

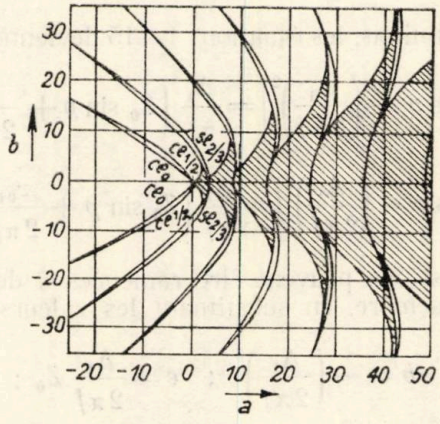


Fig. 2.

Lorsque cette condition est accomplie, la solution de l'équation Mathieu homogène est

$$u = B C e_0 p . \tag{1—26}$$

Co_0 étant la courbe de gauche, passant par l'origine, du diagramme Ince — Strutt, fig. 3. Ainsi, lorsque $p \to \infty$ u est compris dans l'espace entre les deux courbes Ce_0 et $Ce_{1/2}$, le long de la droite $b = -\left[\frac{\Delta_1}{2\pi F}\right]^2$. Pour ces conditions, l'oscillation correspond à la fréquence fondamentale du champ ultrasonore. On remarque un domaine de stabilité très restreint, à la tendance de sortir de cette oscillation. Si l'intensité du champ ultrasonore est suffisamment importante, la particule oscille sur une harmonique égale à la moitié de la fréquence du champ où la domaine de stabilité est plus large.

Revenant à la variable initiale de la relation 1—26, on obtient :

$$x = ue^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} = BCe_0 pe^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}p} = BCe_0\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f}\left(2\pi ft+\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= BCe_0\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)e^{-\Delta_1 t}\, e^{-\frac{\pi}{2}} \qquad (1—27)$$

On obtient une valeur similaire sur l'axe Oz également :

$$z = B_1 Ce_0\left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right)e^{-\Delta_1 t}\, e^{-\frac{\pi}{2}}. \qquad (1—28)$$

D'autre part, si l'on retient deux termes de la relation 1—2, on obtient :

$$b = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{7}{32}a^4$$

ce qui, avec 1—21, donne la relation :

$$-\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta_1}{V_g}Z_0\right)^2 + \frac{7}{32}\left(\frac{2\Delta_1}{V_g}Z_0\right)^4$$

En arrangeant les termes, on obtient une équation bicarrée de la forme suivante :

$$a^4 - \frac{16}{7}a^2 - \frac{32}{7}b = 0. \qquad (1—29)$$

Temant compte de 1—21, et mettant $\lambda f = V_g$, on obtient

$$\frac{7}{32}\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2\left(\frac{4\pi}{\lambda}Z_0\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{\lambda}Z_0\right)^2 + 1 = 0 \qquad (1—30)$$

dont la solution est :

$$\left(\frac{4\pi}{\lambda}Z_0\right)^2 = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2}}{\frac{7}{16}\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2}$$

La valeur de Z_0 est donc :

$$Z_0 = \pm \frac{2 V_g}{\Delta_1} \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2}} \qquad (1-31)$$

Afin que Z_0 ait des valeurs réelles, il faut que

$$\frac{7}{8}\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2 < \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad \Delta_1 < \pi f \quad \text{ou} \quad \frac{3 a_1 \eta_1}{m_1} < f. \qquad (1-32)$$

Considérant la particule à symétrie sphérique de rayon a_1 et de densité ρ_1, on obtient

$$m_1 = V_g \varrho_1 = \frac{4 \pi a_1^3}{3} \varrho_1$$

d'où

$$\Delta_1 = \frac{3 \pi a_1 \eta_1}{m_1} = \frac{9}{4} \frac{\eta_1}{a_1^2 \varrho_1} \qquad (1-33)$$

En égalanat 1—31 à 1—5, on trouve

$$Z_0 = \frac{2 V_g}{\Delta_1} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2}} = 718 \frac{1}{f} \sqrt{\frac{J}{\varrho_1 V_g}}$$

d'où

$$J = 1{,}51 \cdot 10^{-6} \frac{f^2 \varrho_1^3 a_1^4 V_g^3}{\eta_1^2} \left(0{,}5 + \sqrt{0{,}25 - 0{,}11 \frac{\eta_1^2}{a_1^4 \varrho_1^2 f^2}}\right) \qquad (1-34)$$

C'est la formule qui donne l'intensité de l'ultrason en w/cm² pour fragmenter les particules dans le modèle hydrodynamique de rayon a_1 de densité moyenne ρ_1, dans un milieu de viscosité η_1, lorsque ce milieu est vibré à la fréquence f, la vitesse de propagation étant V_g. Dans les considérations ci-haut, on a supposé que les particules oscillent sur l'harmonique fondamentale, à domaine de stabilité restreint, tel qu'il résulte du diagramme Ince — Strutt [10], [11], [12].

La distance entre l'électrode et la pièce étant inférieure à la moitié de la longueur d'onde des oscillation, l'agglomération des particules n'a plus lieu dans l'arc, et par conséquent, la vibration transversale de l'arc provoque la fragmentation des particules détachées de l'électrode, la dimension des fragments dépendant de l'intensité du champ ultrasonore, de la densité moyenne des particules, la vitesse de propagation du champ dans l'arc et de la viscosité du fluide dans l'arc vibré. C'est ainsi qu'on explique en partie le dégazage de la soudure et la grosseur de grain fine, déterminée par les épreuves métallographiques

Si l'intensité du champ ultrasonore est supérieure à celle déterminée par les relations 1—34 et 1—36, l'oscillation est subharmonique, la fréquence étant la moitié de celle du champ, ce qui dans le diagramme Ince — Strutt correspond à

$$u = B'S\, e_{1/2}\, p\, e^{-\frac{\Delta_1}{2\pi f} p} \qquad (1—37)$$

Revenant à la variable initiale on obtient

$$x = B'S\, e_{1/2} \cdot 2\pi f t \cdot e^{-\Delta_1 t} \qquad (1—38)$$

ou bien

$$x = B''S\, e_{1/2} \left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) e^{-\Delta_1 t} \qquad (1—39)$$

Dans ces conditions, les valeurs caractéristiques de b et de a sont associées selon la relation

$$b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, a - \frac{1}{8}\, a^2 - \frac{1}{32}\, a^3 - \frac{1}{384}\, a^4. \qquad (1—40)$$

En retenant les premiers trois termes, et tenant compte de 1—21, on obtient

$$-\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\, \frac{2\Delta_1}{V_g} Z_0 - \frac{1}{8} \left(\frac{2\Delta_1}{V_g} Z_0\right)^2$$

Résolvant en Z_0 on obtient

$$Z_0 = \frac{V_g}{\Delta_1} \left[1 + \sqrt{\frac{3}{2} + 2\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2}\right] \qquad (1—41)$$

Tenant compte de 1—5, on obtient la relation :

$$\frac{V_g}{\Delta_1} \left[1 + \sqrt{\frac{3}{2} + 2\left(\frac{\Delta_1}{2\pi f}\right)^2}\right] = 718\, \frac{1}{f} \sqrt{\frac{J}{\varrho_1 V_g}}$$

d'où

$$J = 3{,}8 \cdot 10^{-4}\, \frac{f^2 \varrho_1^3 a_1^4 V_g^3}{\eta_1^2} \left(1 + \sqrt{1{,}5 + 0{,}257\, \frac{\eta_1^2}{a_1^4 \varrho_1^2 f^2}}\right)^2 \qquad (1—42)$$

L'expérience démontre qu'une intensité du champ ultrasonore trop faible pour produire la fragmentation de la particule correspond à l'oscillation sur l'harmonique fondamentale, tant dans le modèle hydrodynamique, que dans l'arc électrique, d'où l'on peut déduire que l'oscillation des particules est subharmonique, à fréquence égale à la fréquence d'oscillation du champ.

CHAPITRE II

Determination de la vitesse initiale de la particule, sous l'impulsion de la vibration transversale imprimée par les oscillations ultrasonores

(Solutions approximatives)

2.1. *Première approximation*

Reprenant les relations 1—9, leur intégration peut être faite par approximations, en notant

$$2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda} x = p \tag{2—1}$$

et développant sin p en série

$$\sin p = \frac{p}{1!} - \frac{p^3}{3!} + \frac{p^5}{5!} - \dots \tag{2—2}$$

Retenant la premier terme seulement, on a

$$\sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \sin p = p\,. \tag{2—3}$$

Dérivant deux fois la relation 2—1, on obtient

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx}{dt} + 2\pi f \quad ; \quad \frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{\lambda}{2\pi}\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2—4}$$

Tenant compte de 2—3 et 2—4, la première et la dernière relation dans 1—9 deviennent

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\Delta_1\frac{dp}{dt} + \Delta_2^2 \sin p = \Delta_3 \; ; \; \frac{d^2p_1}{dt^2} + 2\Delta_1\frac{dp_1}{dt} + (\Delta_2')\sin p_1 = \Delta_3' \tag{2—5}$$

où

$$\Delta_2^2 = 4\pi^2\frac{1}{\lambda}\,2\Delta_1 f z_0 \; ; \; (\Delta_2') = 4\pi^2\frac{1}{\lambda}\,2\Delta_1 f x_0$$

$$\Delta_3 = 4\pi\Delta_1\left(f - \frac{1}{\lambda}\right) \quad ; \quad \Delta_3' = 4\pi\Delta_1\left(f - \frac{V_{01}}{\lambda}\right) \tag{2—6}$$

Les solutions des équations 2--5 sont données par les relations :

$$p = (C_1 e^{+\delta t} + C_2 e^{-\delta t})\, e^{-\Delta_1 t}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} \tag{2—7}$$

$$p_1 = (C_1' e^{+\delta t} + C_2' e^{-\delta t})\, e^{-\Delta_1 t} + \frac{\Delta_3'}{(\Delta_2')^2} \tag{2—8}$$

où $\delta = \sqrt{\Delta_1^2 - \Delta_2^2}$, C_1, C_2, C_1' et C_2' étant des constantes d'intégration.

Afin de déterminer les constantes, on met les conditions initiales

$At = O$, le particule se trouve dans un ventre, les vitesses initiales sur les trois axes étant

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = V'_{0x} \; ; \; \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = V'_{0y} \; ; \; \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = V'_{0z} + V_{01} \qquad (2—9)$$

Introduisant ces conditions dans 2—7, on obtient

$$t = 0 \; ; \; p = -\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{dp}{dt} = 2\pi f - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) V'_{0x} = 2\pi\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right) \qquad (2—10)$$

$$-\frac{\pi}{2} = C_1 + C_2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} \qquad (2—11)$$

$$-\frac{\pi}{2} = C'_1 + C'_2 + \frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2}$$

En dérivant ensuite les relations 2—7 et introduisant les conditions 2—10, on obtient encore deux équations pour déterminer les constantes

$$2\pi\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right) = -\Delta_1 (C_1 + C_2) + \delta (C_1 - C_2) \qquad (2—12)$$

$$2\pi\left(f - \frac{V'_{0z} + V_{01}}{\lambda}\right) = -\Delta_1 (C'_1 + C'_2) + \delta' (C'_1 - C'_2)$$

où

$$\delta' = \sqrt{\Delta_1^2 - (\Delta_2^1)^2}$$

de 2—11 et 2—12 on obtient :

$$C_1 = \frac{2\pi\left(f - \frac{V'_{0z} + V_{01}}{\lambda}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2}\right)(\Delta_1 + \delta)}{2\delta}$$

$$C'_1 = \frac{2\pi\left(f - \frac{V'_{0z} + V_{01}}{\lambda} - \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta'_3}{\Delta'_2}\right)(\Delta_1 + \delta')}{2\delta}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta_3}{(\Delta_2^1)^2}\right)(\Delta_1 + \delta)}{2\delta} \qquad (2—13)$$

$$C'_2 = \frac{2\pi\left(f - \frac{V'_{0z} + V_{01}}{\lambda}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2}\right)(\Delta_1 - \delta)}{2\delta}$$

A l'aide de 2—13, les relations des équations 2—7 deviennent :

$$x = \frac{\lambda}{2\pi}\left(2\pi f t - \frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} + A e^{-\Delta_1 t} sh\,\delta t - B e^{-\Delta_1 t} ch\,\delta t\right) \qquad (2—14)$$

où

$$A = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta_3}{\Delta_2^2}$$

$$B = \frac{2\pi\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right) - A\Delta_1}{\delta} \qquad (2—15)$$

$$z = \frac{\lambda}{2\pi}\left(2\pi f t - \frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2} + A' e^{-\Delta_1 t} sh\,\delta' t - B' e^{-\Delta_1 t} ch\,\delta' t\right) \qquad (2—16)$$

où

$$A' = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2}$$

$$B' = \frac{2\pi\left(f - \frac{V'_{0z} + V_{01}}{\lambda}\right) - A'\Delta_1}{\delta'} \qquad (2—17)$$

La particule est entraînée dans un mouvement périodique, si, sur les axes Ox et Oy, $\Delta_2 > \Delta_1$, et sur l'axe Oz, $\Delta'_2 > \Delta_1$. Ce mouvement périodique est amorti sur les trois axes, à un facteur constant égal à

$$\Delta_1 = \frac{3\pi a_1 \eta_1}{m_1}$$

Si $\Delta_1 > \Delta_2$ ou $\Delta'_1 > \Delta'_2$, le mouvement est apériodique. Au cas du mouvement périodique amorti, la fréquence d'oscillation de la particule $(f_{x,y})$ sur les axes Ox et Oy est donnée par la relation

$$f_{x,y} = \left(\frac{\Delta_1}{\lambda} f z_0\right)^{1/2} \qquad (2—18)$$

et sur l'axe Oz

$$f_z = \left(\frac{\Delta_1}{\lambda} f x_0\right)^{1/2} \qquad (2—19)$$

f étant la fréquence d'oscillation du champ. De ces deux relations, on remarque que la fréquence d'oscillation de la particule n'est pas égale a celle du champ, dépendant des constantes de la particule, de la viscosité du milieu et de l'amplitudine de l'oscillation.

Reprenant les relations, 2—14 et 2—16, en les égalant à $\frac{\lambda}{4}$ pour $t = 0$, on détermine les composantes de la vitesse initiale, données par les forces du champ ultrasonique :

$$V'_{0x} = V_g + \left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\,\delta + \lambda\,\frac{\Delta_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2^2}\right) \qquad (2—20)$$

Dans cette relation, on met la condition que la vitesse de détachement des particules soit égale a la vitesse de propagation de l'ultra-son dans le fluide. Cette condition correspond aux égalités :

$$\frac{\lambda^2}{4\pi}\,\delta - \lambda\,\frac{\Delta_1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} = 0. \qquad (2—21)$$

La première donne, tenant compte de 1—33, 1—5, 2—6 et 2—8

$$\frac{\Delta_1}{8 V_g}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right) = 718\,\frac{1}{f}\sqrt{\frac{J}{\varrho_1 V_g}}$$

ou ;

$$J = 4{,}2 \cdot 10^{-4}\,\frac{\eta_1^2 f^2}{a_1^4\,\varrho_1 V_g}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right)^2 \qquad (2—22)$$

Une oscillation harmonique correspond a cette intensité de l'ultrason, vu que le terme prépondérant $V_g y$ participe a la première puissance. La deuxième égalité 2—21 prouvé qu'entre l'intensité de l'ultrason et la vitesse de propagation on peut écrire la relation

$$J = 0{,}51 \cdot 10^{-7}\,\varrho_1 (V_g^3 - 2\,V_g^2 + V_g) \qquad (2—23)$$

A cette intensité de l'ultrason correspond une oscillation subharmonique.

A remarquer que, tandis que dans la relation 2—22, l'intensité de l'ultrason dépend de la dimension de la particule, de la viscosité du milieu, de la fréquence des oscillations et de la vitesse de propagation des oscillations, la relation 2—23 ne contient pas les dimensions de la particule, mais seulement la densité moyenne et la vitesse de propagation. On retrouvera cette relation également en tenant compte de la non-linéarité du phénomène.

Pour l'axe Oz on obtient de manière analogue, de la relation 2—16, pour $t = 0$.

$$V'_{0z} = V_g - V_{01} + \left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\,\delta - \lambda\,\frac{\Delta_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{u}\,\frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2}\right) \qquad (2—24)$$

La comparaison de cette expression avec 2—20 montre que sur l'axe Oz, la vitesse initiale est inférieure à celle des axes Ox et Oy, ce qui signifie que la vitesse initiale, imprimée par les forces non-vibratoires, contribue au freinage de la particule. Ce fait est facile à expliquer, tenant compte que

les oscillations s'appliquent en direction transversale par rapport a v_{01} et que, pour $t = 0$, la première période de l'oscillation s'oppose à cette vitesse.

Les relations 2—20 et 2—24 ont été obtenues en rendant linéaires les équations differentielles, considérant le premier terme du développement en série de sin p. Cette manière de traiter le problème éloigne en quelque sorte le phénomène, spécifiquement non-linéaire, du calcul antérieur, donnant les relations qui établissent en première approximation la vitesse initiale de la particule.

2.2. *Deuxième approximation*

Considérant deux termes du développement en série de sin p, les équations 2—5, décrivant le mouvement des particules, deviennent :

$$\frac{d^2p}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dp}{dt} + \Delta_2^2 \left(p - \frac{p^3}{6}\right) = \Delta_3 \tag{2—25}$$

$$\frac{d^2p_1}{dt^2} + 2\Delta_1 \frac{dp_1}{dt} + (\Delta_2^1)^2 \left(p - \frac{p^3}{6}\right) = \Delta_3' \tag{2—26}$$

La solution de ces équations est de la forme

$$\begin{aligned} p &= C_0\, e^{-\Delta_1 t} \cos(k\psi_t + \varphi) \\ p_1 &= C_0'\, e^{-\Delta_1 t} \cos(k\psi_t' + \varphi') \end{aligned} \tag{2—27}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_t &= t + \frac{C_0^2}{32\Delta_1}(e^{-2\Delta_1 t} - 1) \\ \psi_t' &= t + \frac{(C_0')^2}{32\Delta_1}(e^{-2\Delta_1 t} - 1) \end{aligned} \tag{2—28}$$

C_0, C_0', φ et φ' étant des constantes, à déterminer en partant des conditions initiales du problème, qui sont les mêmes que pour 2—10.

Revenant aux fonctions initiales en x et z, corespondant à 2—1 et 2—6, on obtient

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda}{2\pi}\left[2\pi f t - \frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} - C_0\, e^{-\Delta_1 t} \cos(k\psi_t + \varphi)\right] \\ z &= \frac{\lambda}{2\pi}\left[2\pi f t - \frac{\Delta_3'}{(\Delta_2')^2} - C_0'\, e^{-\Delta_1 t} \cos(k\psi_t' + \varphi')\right] \end{aligned} \tag{2—29}$$

Avec $V_g = \lambda f$, le couple d'équation 2—29 devient

$$\begin{aligned} x &= V_g t - \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} - \frac{\lambda}{2\pi}\, C_0 e^{-\Delta_1 t} \cos(k\psi_t + \varphi) \\ z &= V_g t - \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{\Delta_3'}{(\Delta_2')^2} - \frac{\lambda}{2\pi}\, C_0'\, e^{-\Delta_1 t} \cos(k\psi_t' + \varphi') \end{aligned} \tag{2—30}$$

Introduisant les conditions initiales dans 2—27 on a

$$t = 0 \; ; \; p = \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{dp}{dt} = 2\pi\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right)$$

$$t = 0 \; ; \; p' = -\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{dp_1}{dt} = 2\pi\left(f - \frac{V'_{0x} + V_{01}}{\lambda}\right)$$

$$C_0 = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\cos\varphi}$$

$$C_0 \cos\varphi - C_0 \sin\varphi \left(1 - \frac{1}{16} C_0^2\right) = 2\pi\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right) \qquad (2—31)$$

Eliminant C_0 de ces relations, on obtient :

$$\operatorname{tg}^3\varphi - \frac{\pi^2 + 64}{\pi^2} \operatorname{tg}\varphi = -\frac{64}{\pi^2} - \frac{256}{\pi^2}\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right) \qquad (2—32)$$

On résoud cette équation de troisième ordre par un artifice, en remarquant que :

$$A \operatorname{tg}^3\varphi + B \operatorname{tg}^2\varphi + C \operatorname{tg}\varphi + D = (a \operatorname{tg}\varphi + b)(a \operatorname{tg}\varphi + c)^2 =$$

$$= a^3 \operatorname{tg}^3\varphi + a^2(2c + b) \operatorname{tg}^2\varphi + ac(c + 2b) \operatorname{tg}\varphi + bc^2 = 0$$

Après identification, il résulte

$$a^2(2c + b) = 0 \; ; \; ac(c + 2b) = c \; ; \; bc^2 = D$$

d'où

$$a = 1 \; ; \; b = \sqrt[3]{4D} \; ; \; c = -\frac{\sqrt[3]{4D}}{2}$$

On choisit la solution pour tg φ, de $a \operatorname{tg}\varphi + b = 0$, c'est à dire :

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{-\frac{256}{\pi^2} - \frac{1024}{\pi^2}\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right)} \qquad (2—33)$$

Cette valeur a comme correspondant, pour C_0, la relation :

$$C_0 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \left[-\frac{256}{\pi^2} - \frac{1024}{\pi^2}\left(f - \frac{V'_{0x}}{\lambda}\right)\right]^{2/3}} \qquad (2—34)$$

Comme pour la deuxième équation de 2—27, on obtient :

$$\operatorname{tg}\varphi' = \sqrt[3]{-\frac{256}{\pi^2} - \frac{1024}{\pi^2}\left(f - \frac{V'_{0x} + V_{01}}{\lambda}\right)} \qquad (2—35)$$

$$C'_0 = -\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \left[-\frac{256}{\pi^2} - \frac{1024}{\pi^2}\left(f - \frac{V'_{0x} + V_{01}}{\lambda}\right)\right]^{2/3}}$$

Avec ces valeurs, les équations 2—30 deviennent :

$$x = V_g t - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\Delta_3}{\Delta_2^2} + \\ + \frac{\lambda}{4}\sqrt{1+\left[-\frac{256}{\pi^2}-\frac{1024}{\pi^2}\left(f-\frac{V'_{0x}}{\lambda}\right)\right]^{2/3}} e^{-\Delta_1 t}\cos(k\psi_t+\varphi) \qquad (2—36)$$

$$z = V_g t - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\Delta'_3}{(\Delta'_2)^2} + \\ + \frac{\lambda}{4}\sqrt{1+\left[-\frac{256}{\pi^2}-\frac{1024}{\pi^2}\left(f-\frac{V'_{0x}+V_{01}}{\lambda}\right)\right]^{2/3}} e^{-\Delta_1 t}\cos(k\psi'_t+\varphi')$$

En comparant avec 2—14 et 2—16, on constate ce qui suit : les deux premiers termes des relations homologues sont les mêmes, les facteur d'amortissement est le même, mais, dans ces relations, la périodicité et la phase initiale font leur apparition :

$$t = 0 \;;\quad x = \frac{\lambda}{4} \;;\quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

on obtient la relation 2—23 :

$$J = 0{,}51\cdot 10^{-7}\cdot\varrho_1 (V_g^3 - 2V_g^2 + V_g).$$

Rappelons que dans la relation 2—20, à cette intensité de l'ultrason correspond la condition $v_{0x} = v_g$, cependant sans que ce fait résultat directement du passage à la limite. C'est pourqoui la dernière équation, déterminant l'intensité de l'ultrason, doit être considérée plus probable que 2—22, dans les conditions imposées.

Conclusions

De cette étude il résulte que les oscillations ultra-sonores, appliquées à un fluide incompressible en écoulement, produisent des effets différents, selon que les oscillations sont appliqués en direction longitudinale ou transversale. Si les oscillation sont orientées en sens longitudinal par rapport à l'écoulement du fluide, les particules du fluide s'agglomèrent, avec tendance à sortir du champ ultrasonore. Si les oscillations sont orientées en direction perpendiculaire à la direction d'écoulement du fluide, celui-ci est pulvérisé en particules, dont la dimension dépend de l'intensité des oscillations, de la vitesse de propagation des oscillations dans le milieu où se produit la pulvérisation, de la viscosité du milieu, de la densité moyenne du fluide, et de la fréquence des oscillations.

Les deux effets peuvent trouver de nombreuses applications pratiques. Dans le cas étudié par les auteurs, le phénomène de la pulvérisation a été apliqué à la soudure électrique en tant qu'énergie active, d'importantes modifications étant obtenues, tant concernant les caractéristiques électriques de l'arc, que la structure du joint soudé, ce qui est plus important.

Certains résultats sommaires obtenu ont été présentés au chapitre I. En essence, la procédé présenté réussit à détruire la structure Widmanstätten, ce qui jusqu'à présent n'a été obtenu que par le traitement thermique adéquat des joints soudés.

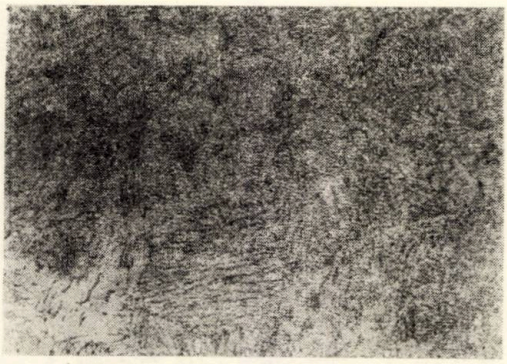


Fig. 3.

Par la déstruction de la structure Widmanstätten, on peut expliquer les augmentations importantes enregistrées dans la résistance à la rupture, l'allogement, la striction et la limite d'écoulement, signalées par les essais de laboratoire.

La figure 3 représente la micrographie, pour une vibration de l'électrode à $J = 3{,}8$ w/cm^2. On remarque une distribution plus ordonnée de la grosseur de grain, mais la structure Widmanstätten persiste (grossissement 120 x).

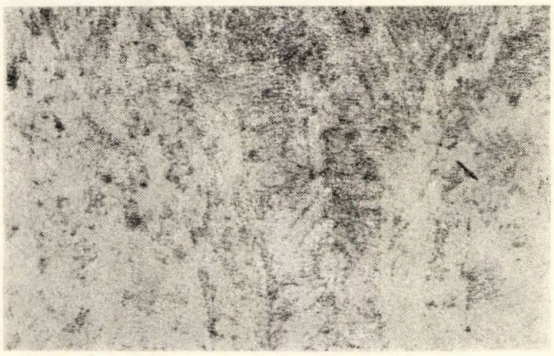


Fig. 4.

Pour le reste les conditions de soudure restent les mêmes.

La figure 4 représente la micrographie dans la zone de soudure, dans les conditions de la soudure classique (grossissement 120 x), à approximativement 8 mm du bord.

Dans la même zone, la soudure vibrée à $J = 13{,}6$ W/cm² est représentée par la micrographie de la fig. 5. On remarque la destruction complète de la structure Widmanstätten, une distribution uniforme de la granulométrie polygonale constituée de perlite et ferrite. Pour cette soudure,

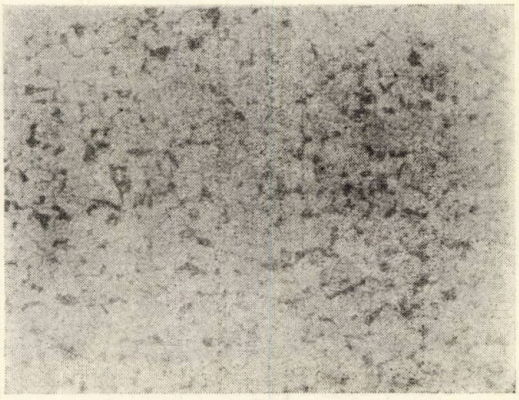


Fig. 5.

$\sigma_r = 70$ kgf/mm², $H_B = 175$, l'allongement 18%, la limite d'écoulemen 36%, la striction 45% (grossissement 120 x).

Dans les mêmes conditions, la fig. 6 reproduit la micrographie dans la zone de transition (grassissement 200 x) ; en comparant avec la fig. 3, on remarque la disparition de la structure Widmanstätten, dans cette zone également.

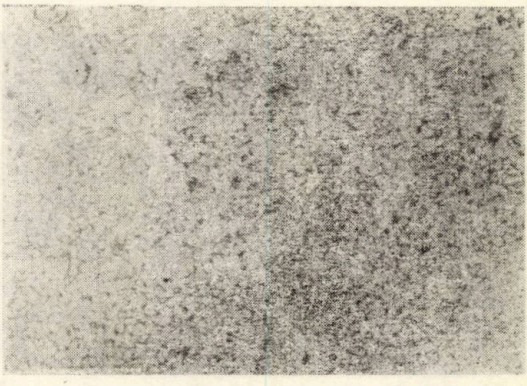


Fig. 6.

On remarque la grosseur de grain uniforme, un peu différente par rapport à la fig. 7, à cause du refroidissement plus lent de cette zone. Des détails se référant aux essais mécaniques et technologiques peuvent être trouvés dans l'ouvrage sous (10).

Les résultats expérimentaux ont servi à vérifier les formules obtenues par voie théorique. On a constaté que :

Les relations 1—34 et 1—36 donnent pour l'intensité du champ ultrasonore de l'arc électrique, des valeurs trop faibles pour produire le phénomène. C'est pourqoui elles ne peuvent pas être utilicées pour la cas analysé. Le fait s'explique par le domaine de stabilité très restreint, comme montré au chapitre I.

Pour une particule à $a = 0{,}01$ mm, les relations 1—42 et 1—43 peuvent être employées avec unei approximation de 9—11% par rapport aux données expérimentales. Ces relations peuvent donc être pratiquement employées, tant pour l'arc électrique que pour le modèle hydrodinamique. L'approximation est à atribuer aux nombreuses simplifications admises dans le calcul, ainsi qu'à la complexité du phénomène, extrêmement difficile à étudier par la méthode exposée.

Les relations 2—22 et 2—23, obtenues à condition que la vitesse des particules soit égale à la vitesse de propagation du champ, sont à 14—16% d'approximation, ce qui prouve que, lorsqu'elle se détache de l'électrode, respectivement du modèle, la particule est entraînée par les forces du champ ultrasonore à très grande vitesse, comparable à celle de propagation du champ ultrasonore dans l'air.

L'oscillation des particules, à fréquence subharmonique égale à la moitié de la fréquence du champ, peut être justifiée aussi par le ton émis pendant la vibration de l'électrode ou du modèle, et qui rentre dans le domaine audible. Evidemment que pendant la vibration, des harmoniques d'ordre inférieur à 1/2 surviennent également. Vu cependant que l'amplitude de ces harmoniques est petite, leur étude ne peut être faite qu'à l'aide de générateurs puissants.

Un générateur d'ultrason à tubes a servi pour les expériences, dont la puissance aux bornes était de 1,5 kW.

La chaire de technologie des métaux
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIGRAPHIE

1. *Jahnke Ende.* Tabelles de fonctions. Fizmatghiz 1959.
2. *Rijic-Gradstei.* Tabelles d'intégrales. E. T. 1955.
3. *Meixner-Schäfke.* Mathieusche Functionen u Sfäroidfunctionen Springer-Berlin 1954.
4. *Mac Laohlan.* Theory and Application of Mathieu-Function Oxford 1947.
5. *Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A.* Elliptic Cylinder and Sferoidal Fontions New York 1941.
6. *Fletoher A. F., Miller C. P., Rosenhead.* An Index of Mathematical Tables — New York 1946.
7. * * * Mathematical Tables and other Aids to Computation (Zeitschrift).
8. * * * Washington sei 1943.
9. *Drăganu M.* Introduction mathématique à la Physique. Ed. Academiei R.P.R. — 1954.
10. *Sonea I.* Recherches relatives à l'amélioration des joints soudés par vibration à oscillations ultrasoniques comme énergie active, Thèse de dissertation 1965.

10. * * * Handbuch der Physik Tom VIII/1 1959. Springer Berlin.
11. * * * Handbuch der Physik Tom VIII/2 1963. Springer Berlin.
12. * * * Handbuch der Physik Tom 1 1956. Springer Berlin.
13. *Cristea M.* Déplacement de la particule solide dans le champ sonique. Bul. I. P. Bv. Vol. VI. Brașov 1964.
14. *Bergmann.* Der Ultraschall. Zürich 1954.
15. *Hueter Th., Bolt. R.* Sonics. New York 1962.
16. *Bădărău-Grumăzescu.* Bases de l accustique moderne. Ed. Academiei R.P.R. 1962.
17. *Leviuga B. A.* Vlianie ultravukovîh kolebanii na kristalizații svarcinoi vanî pri avtomaticescoi svarke. Articol în revista Avtomaticeskaia Svarka Nr. 1 — 6 — 1960.
18. *Crawford A. E.* Ultrasonic Engineering with particular references to high power applications — London. Buherworths Scientific Publication 1955.
19. *Hueter Th.* Moderne ultraschalltechnik ETE 70—1949.
20. *MaFauschek I.* Einführung in die Ultraschalltechnik VEB Verlag Tehnik — Berlin 1957.
21. *Bugard P.* Les ultrasons 1949.
22. *Vigoureux P.* Ultrasonics. London : Champman Hall 1950.
23. *Richardson E. C.* Ultrasonics Physics. London Cleaver-Hume Press 1952.
24. *Bar R.* Uber die Theorie des Durchgangs von Ultraschall durch dünne Plahe Halv phys AcFa 11 (1938).
25. *Hazzard G. W.* Ultrasonic Absorption in liquids S. acoust. soc. amer 22 (1950).
26. *Hartz G., Mende H.* Der Schallstrahlungedruck in Flüssigkeiten Z. Phys. 114 (1939).
27. *Horton S. P.* The effect of intermolecular band on the onset of cavitatio, S. aconst. Soc. Amer. 25 (1953).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

AVIAȚIE

C.Z.: 533.621.01 : 629.13

STUDIUL SCURGERII SUPERSONICE ÎN JURUL UNUI AMPENAJ CRUCIFORM *

ȘTEFAN STAICU

1. Considerații preliminare

În prezenta lucrare vom face studiul mișcării, în regim supersonic, în jurul unui ampenaj cruciform subțire, planul vertical avînd o distribuție antisimetrică de incidențe, cu borduri subsonice.

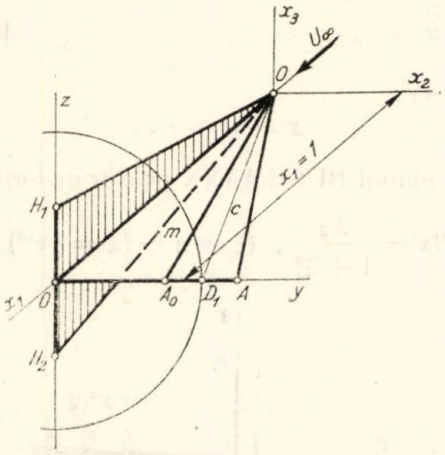


Fig. 1

Urmărind aceeași cale ca și în [1], [2], [3] vom considera ampenajul cruciform raportat la un sistem de axe trirectangulare $Ox_1x_2x_3$ (fig. 1) cu originea în vîrful său, avînd axa Ox_1 orientată după direcția curentului neperturbat U_∞.

Fie, planul fizic, cel normal ($x_1 = 1$) pe direcția curentului, definit de coordonatele [1] (fig. 2):

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}; \tag{1}$$

* Manuscris predat la redacție la 19 ianuarie 1966.

planul auxiliar $O\eta\zeta$, (fig. 3), obținut din cel fizic prin transformarea geometrică a lui BUSEMANN :

$$Br = \frac{2\varrho}{1+\varrho^2}, \quad \Theta = \theta, \quad (r^2 = y^2 + z^2, \ \varrho^2 = \eta^2 + \zeta^2, \ B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}); \tag{2}$$

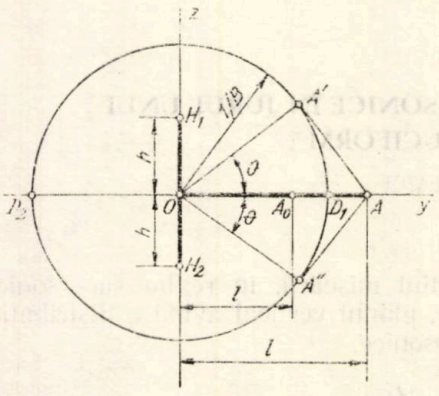


Fig. 2

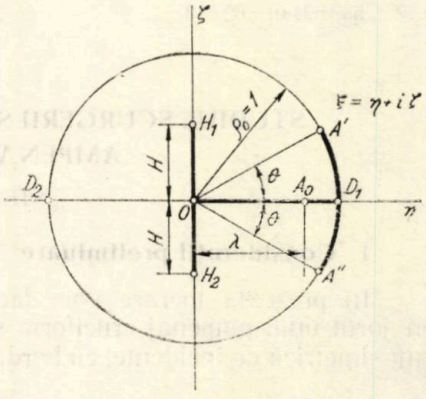


Fig. 3

planul auxiliar (fig. 4) :

$$x = y + iz, \tag{3}$$

care s-a obținut din planul BUSEMANN prin transformarea conformă :

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad (\xi = \eta + i\zeta = \varrho e^{i\theta}), \tag{4}$$

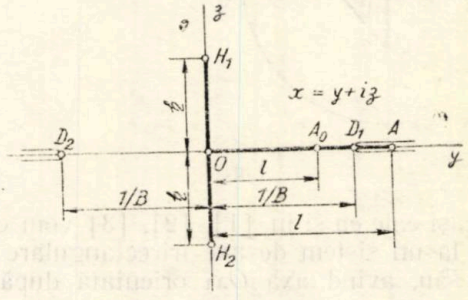


Fig. 4

care va reproduce urmele planului orizontal și conului MACH în adevărata mărime, prin tăieturile (o, l), respectiv $(-\infty, -1/B)$ și $(1/B, \infty)$, (fig. 4); și planul complex X, (fig. 5), pe care l-am definit prin transformarea conformă :

$$X^2 = x^2 + b^2, \quad (X = Y + iZ). \tag{5}$$

Se va determina viteza axială de perturbație în planul X definit de (5), pe care o notăm cu u, și care este necesară pentru calculul coeficientului de presiune, [1] :

$$C_p = -2\,\frac{u}{U_\infty}\,, \tag{6}$$

și a caracteristicilor aerodinamice.

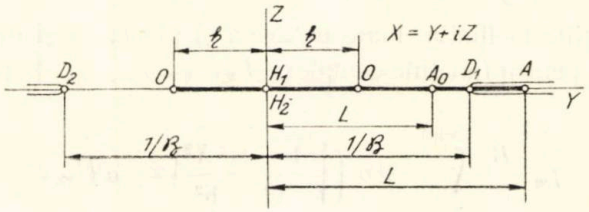


Fig. 5

Din teoria mișcărilor omogene de ordin superior vom avea, [2] :

$$\frac{(n-1)!\,u_a^{(n)}}{x_1^{n-1}} = Re\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q\,C_{n-1}^q\,x^q \int_{\text{cercul MACH}}^{\text{aripă}} \frac{dF_{n00}}{x^q}\,, \tag{7 a}$$

pentru punctele de pe aripă, și

$$\frac{(n-1)!\,u_p^{(n)}}{x_1^{n-1}} = Re\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q\,C_{n-1}^q\left(\frac{x}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^q \int_{\text{cercul MACH}}^{\text{placă}} \left(\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\right)^q dF_{n00}\,, \tag{7 b}$$

pentru punctele de pe placă, considerațiile fiind făcute în planul complex x, definit de (3).

Pornind de aici, vom determina mai departe distribuția de presiuni și caracteristicile aerodinamice pentru ampenajele cruciforme pentru care bordul de atac A, al planului orizontal, este subsonic sau supersonic, [4].

2. Scurgerea omogenă de ordinul unu (n=1) în jurul ampenajului cruciform avînd bordul planului orizontal, subsonic.

a. *Viteza axială de perturbație u, pe ampenaj.*

Vom considera, în acest sens, că planul orizontal are incidența α, iar placa o distribuție de incidențe antisimetrică [5] (antisimetrie forțată) : $+\beta$ pentru partea de sus $-\beta$ pentru cea de la intradosul aripii.

În acest caz, pornind de la (7a), și considerînd singularitățile din borduri, vom obține în planul X definit de (5) :

$$\mathfrak{U} = F_{100} = \frac{A_{10} + A_{11}X}{X}\sqrt{\frac{X+b}{L-X}}\,, \tag{8}$$

care pentru punctele de pe aripă și placă, capătă forma :

$$u = \frac{A_{10} + A_{11} Y}{Y} \sqrt{\frac{Y + \mathfrak{b}}{L - Y}} . \tag{9}$$

În expresia vitezei (9), A_{10} și A_{11} sînt constante ce urmează a fi determinate.

b. *Determinarea constantelor.*

Din condițiile la limită, luate pe aripă și placă, ca și din condițiile de compatibilitate pentru funcțiile complexe $F_{n-q-r,\,q,\,r}$ [3], se deduce sistemul :

$$Im \frac{B}{\mathfrak{B}} \int_{\text{cercul MACH}}^{\text{aripă}} \mathfrak{U}\, d \left(\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{B}^2 X^2}{X^2 - \mathfrak{b}^2}} \right) = \alpha U_\infty , \tag{10a}$$

$$Re \int_{\text{cercul MACH}}^{\text{placă}} \mathfrak{U}\, d \left(\frac{1}{\sqrt{X^2 - \mathfrak{b}^2}} \right) = - \beta U_\infty . \tag{10b}$$

Introducînd expresia lui $\mathfrak{U}$ dată de (8) și efectuînd integralele între limitele $(L,\ 1/\mathfrak{B})$ pentru prima ecuație și $(L,\ \mathfrak{b})$ pentru ecuația a doua, [7], (fig. 5) rezultă :

$$A_{10} = \frac{\mathfrak{b} U_\infty}{2\pi \sqrt{2\mathfrak{b}(L+\mathfrak{b})}\,[(1+\mathfrak{B}L)\,E(k) - \mathfrak{B}(L-\mathfrak{b})\,K(k)]} \times$$
$$\times \{ \pi\alpha (L-\mathfrak{b}) \sqrt{2\mathfrak{b}(L+\mathfrak{b})(1+\mathfrak{B}\mathfrak{b})(1+\mathfrak{B}L)} +$$
$$+ 2\beta [(1+\mathfrak{B}\mathfrak{b})(L-\mathfrak{b})^2 \Pi(\varrho, k) + 2\mathfrak{b}(1+\mathfrak{B}L)(L+\mathfrak{b})\,E(k) -$$
$$- (1+3\mathfrak{B}\mathfrak{b})(L^2-\mathfrak{b}^2)\,K(k)] \} , \tag{11}$$

$$A_{11} = \frac{U_\infty}{2\pi \sqrt{2\mathfrak{b}(L+\mathfrak{b})}\,[(1+\mathfrak{B}L)\,E(k) - \mathfrak{B}(L-\mathfrak{b})\,K(k)]} \times$$
$$\times \{ \pi\alpha (L-\mathfrak{b}) \sqrt{2\mathfrak{b}(L+\mathfrak{b})(1+\mathfrak{B}\mathfrak{b})(1+\mathfrak{B}L)} +$$
$$+ 2\beta [(1+\mathfrak{B}L)(L-\mathfrak{b})^2 \Pi(\varrho, k) - 2\mathfrak{b}(L+\mathfrak{b})(1+\mathfrak{B}L)\,E(k) -$$
$$- (1-\mathfrak{B}\mathfrak{b})(L^2-\mathfrak{b}^2)\,K(k)] \} , \tag{12}$$

unde $K(k)$, $E(k)$ și $\Pi(\varrho, k)$ sînt integrale eliptice complete de prima, a doua și, respectiv, a treia speță, avînd modulul k și parametrul ϱ, dați de relațiile :

$$k = \sqrt{\frac{(1-\mathfrak{B}L)(1+\mathfrak{B}\mathfrak{b})}{(1+\mathfrak{B}L)(1-\mathfrak{B}\mathfrak{b})}} , \quad \varrho = - \frac{2\mathfrak{b}(1-\mathfrak{B}L)}{(1-\mathfrak{B}\mathfrak{b})(L+\mathfrak{b})} . \tag{13}$$

c. *Calculul caracteristicilor aerodinamice.*

Mai departe vom determina caracteristicile aerodinamice ale sistemului cruciform, în ipoteza unei distribuții antisimetrice forțate de incidențe pentru planul vertical.

— Coeficientul de presiune pe aripă, [1] :

$$C_{pa} = -2\,\frac{u_a}{U_\infty}\,, \tag{14}$$

unde expresia lui u_a este dată de (9), luată pentru punctele corespunzătoare aripii.

— Coeficientul de portanță :

$$C_{za} = \frac{4}{l U_\infty}\int_0^l u\,dy = \frac{4}{l U_\infty}\int_{\mathfrak{b}}^L u(Y)\,\frac{Y\,dY}{\sqrt{Y^2-\mathfrak{b}^2}}\,, \tag{15a}$$

în urma calculelor, devine :

$$C_{za} = \frac{2\pi}{U_\infty\sqrt{L^2-\mathfrak{b}^2}}\,[2A_{10} + A_{11}(L+\mathfrak{b})]. \tag{15b}$$

— Coeficientul de rezistență de undă, se deduce din cel de portanță :

$$C_{xa} = -\alpha\,C_{za}\,. \tag{16}$$

— Coeficientul de moment de ruliu :

$$HC_{ma} = \frac{8}{3\,l\,U_\infty}\int_0^l u\,y\,dy = \frac{8}{3\,l\,U_\infty}\int_{\mathfrak{b}}^L u(Y)\,Y\,dY\,. \tag{17a}$$

Efectuînd calculele sîntem conduși la rezultatul :

$$HC_{ma} = \frac{1}{3\,U_\infty\sqrt{L^2-\mathfrak{b}^2}}\left\{2\sqrt{2\,\mathfrak{b}\,(L-\mathfrak{b})}\,[4A_{10}+3A_{11}(L+\mathfrak{b})]+\right.$$

$$\left.+(L+\mathfrak{b})\,[4A_{10}+A_{11}(3L-\mathfrak{b})]\,\cos^{-1}\frac{3\,\mathfrak{b}-L}{\mathfrak{b}+L}\right\}, \tag{17b}$$

în care H este o lungime de referință care poate fi egală chiar cu unitatea.

— Coeficientul de succiune al aripii. Urmărind aceeași cale ca în [3], vom putea scrie corespunzător bordului subsonic al aripii :

$$\sigma_a = -\frac{\pi\sqrt{1-B^2l^2}}{l\,S_a\,U_\infty^2}\,[u_a^2\,(L-Y)]_{Y\to L} =$$

$$= -\frac{2\pi}{L^2U_\infty^2}\sqrt{\frac{(L+\mathfrak{b})\,(1-\mathfrak{K}^2L^2)}{(L-\mathfrak{b})\,(1-\mathfrak{K}^2\mathfrak{b}^2)}}\,(A_{10}+A_{11}L)^2\,. \tag{18}$$

— Coeficientul de presiune pe placă :

$$C_{pp} = -2\frac{u_p}{U_\infty}, \tag{19}$$

unde expresia lui u_p este dată de (9), considerată pentru punctele corespunzătoare planului vertical al sistemului cruciform.

— Coeficientul de rezistență de undă al păcii, este :

$$C_{xp} = -\frac{4\beta}{hU_\infty}\int_0^h u(z)\,dz, \tag{20}$$

care ținînd seama de relația :

$$dz = -\frac{Y}{\sqrt{\flat^2 - Y^2}}\,\frac{(1-\mathfrak{B}^2\flat^2)^{3/2}}{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)\sqrt{1-\mathfrak{B}^2Y^2}}\,dY, \tag{21}$$

devine :

$$C_{xp} = \frac{2\beta(1-\mathfrak{B}^2\flat^2)^{3/2}}{hU_\infty}\int_{-\flat}^{\flat} u(Y)\,\frac{Y\,dY}{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)\sqrt{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)(\flat^2-Y^2)}}. \tag{22a}$$

Se obține, astfel :

$$\begin{aligned} C_{xp} = \frac{2}{\flat(1-\mathfrak{B}L)U_\infty}\sqrt{\frac{1-\mathfrak{B}\flat}{1+\mathfrak{B}\flat}}\Big\{ & A_{10}\big\{(1+\mathfrak{B}^2L\flat)[E(\varphi_0,k)-E(k)]+ \\ & +[\mathfrak{B}(L-\flat)-2][F(\varphi_0,k)-K(k)]\big\}- \\ & -A_{11}(L+\flat)[F(\varphi_0,k)-E(\varphi_0,k)-K(k)+E(k)]+ \\ & +(A_{10}\mathfrak{B}+A_{11})\,\frac{1-\mathfrak{B}L}{1+\mathfrak{B}L}\sqrt{2\flat(L+\flat)(1+\mathfrak{B}\flat)(1+\mathfrak{B}L)}\Big\}, \end{aligned} \tag{22b}$$

în care $F(\varphi_0,k), E(\varphi_0,k)$ și $K(k), E(k)$ sînt integralele eliptice complete și incomplete de prima și a doua speță, de modul k și argument φ_0 dați de relațiile :

$$k = \sqrt{\frac{(1-\mathfrak{B}L)(1+\mathfrak{B}\flat)}{(1-\mathfrak{B}\flat)(1+\mathfrak{B}L)}}, \quad \varphi_0 = \sin^{-1}\frac{1-\mathfrak{B}\flat}{1+\mathfrak{B}\flat}. \tag{23}$$

— Coeficientul de moment de ruliu al plăcii :

$$HC_{mp} = \frac{8}{3U_\infty h}\int_0^h u(z)\,z\,dz = -\frac{4(1-\mathfrak{B}^2\flat)^2}{3hU_\infty}\int_{-\flat}^{\flat} u(Y)\,\frac{Y\,dY}{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)^2}, \tag{24a}$$

în urma efectuării calculelor, [7], ia forma :

$$HC_{mp} = \frac{1}{3\mathfrak{B}^2 \flat U_\infty \sqrt{1-\mathfrak{B}^2\flat^2}} \left(\frac{1-\mathfrak{B}^2\flat^2}{1-\mathfrak{B}^2 L^2}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \left\{ \mathfrak{B}^2 \sqrt{\frac{2\flat(L-\flat)(1-\mathfrak{B}^2L^2)}{1-\mathfrak{B}^2\flat^2}} [2A_{11}(L+\flat)+A_{10}(2+\mathfrak{B}^2L\flat)] - \right.$$

$$-(1-\mathfrak{B}L)\sqrt{(1-\mathfrak{B}L)(1+\mathfrak{B}\flat)}\,[A_{11}(\mathfrak{B}\flat-5\mathfrak{B}L-6)-$$

$$-A_{10}\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\flat-\mathfrak{B}L-2)]\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L-\flat)(1-\mathfrak{B}\flat)}{(L+\flat)(1+\mathfrak{B}\flat)}} -$$

$$-(1+\mathfrak{B}L)\sqrt{(1-\mathfrak{B}\flat)(1+\mathfrak{B}L)}\,[A_{11}(\mathfrak{B}\flat-5\mathfrak{B}L+6)+$$

$$\left. +A_{10}\mathfrak{B}(\mathfrak{B}\flat-\mathfrak{B}L+2)]\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L-\flat)(1+\mathfrak{B}\flat)}{(L+\flat)(1-\mathfrak{B}\flat)}} \right\}. \qquad (24\,b)$$

— Coeficientul de succiune al plăcii. Considerînd succiunea din jurul bordurilor subsonice ale planului vertical vom avea :

$$\sigma_p = -\frac{\pi\sqrt{1-B^2h^2}}{hS_pU_\infty^2}[u_p^2(h-z)]_{z\to h} = -\frac{\pi A_{10}^2}{h^2U_\infty^2\sqrt{l^2+h^2-B^2l^2h^2}}. \qquad (25)$$

Observații.

1) Presupunînd că placa nu are incidență, ($\beta = 0$), vom obține, pentru caracteristicile aerodinamice, aceleași rezultate de mai sus, în care constantele A_{10} și A_{11} devin :

$$A_{10} = \frac{\alpha U_\infty \flat(L-\flat)\sqrt{(1+\mathfrak{B}\flat)(1+\mathfrak{B}L)}}{2[(1+\mathfrak{B}L)E(k)-\mathfrak{B}(L-\flat)K(k)]}, \qquad (26)$$

$$A_{11} = \frac{1}{\flat}A_{10}. \qquad (27)$$

2) Dacă $l \to 0$, ($L \to \flat$), caracteristicile aerodinamice sînt identice cu cele ale aripii delta subțiri cu incidență antisimetrică (antisimetrie forțată), avînd deschiderea (anvergura) $2h$ cu borduri de atac subsonice.

3) Dacă $h \to 0$, ($\flat \to 0$), se obține scurgerea în jurul aripii triunghiulare subțiri, pentru care una din muchiile bordului de atac devine paralelă cu direcția curentului neperturbat U_∞, iar cealaltă are bordul de atac subsonic.

3. Scurgerea omogenă de ordinul unu (conică propriu-zisă), n = 1) în jurul ampenajului cruciform avînd bordul de atac al planului orizontal-supersonic.

a. *Viteza axială de perturbaţie u, pe suprafaţa ampenajului.*

În ipoteza unei distribuţii antisimetrice forţate pentru placă, vom obţine, în planul X, pentru viteza axială de perturbaţie următoarea expresie:

$$\mathfrak{U} = F_{100} = A_{10} \frac{\sqrt{(X+\mathfrak{b})(1-\mathfrak{B}X)}}{X\sqrt{\mathfrak{B}}} + K_{10}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L+\mathfrak{b})(1-\mathfrak{B}X)}{(1+\mathfrak{B}\mathfrak{b})(L-X)}}, \quad (28)$$

care pentru punctele corespunzătoare aripii respectiv plăcii, capătă forma:

$$u = A_{10} \frac{\sqrt{(Y+\mathfrak{b})(1-\mathfrak{B}Y)}}{Y\sqrt{\mathfrak{B}}} + K_{10}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L+\mathfrak{b})(1-\mathfrak{B}Y)}{(1+\mathfrak{B}\mathfrak{b})(L-Y)}}, \quad (29)$$

unde A_{10} şi K_{10} sînt constante ce se vor determina mai departe.

b. *Determinarea constantelor.*

Procedînd ca mai sus, utilizînd ecuaţiile (10 a) şi (10 b), pentru determinarea constantelor A_{10} şi K_{10}, sîntem conduşi la sistemul:

$$I_m \sqrt{1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{b}^2} \int_{\text{cercul MACH}}^{\text{aripă}} \mathfrak{U} \frac{X\,dX}{(X^2-\mathfrak{b}^2)\sqrt{(X^2-\mathfrak{b}^2)(1-\mathfrak{B}^2X^2)}} = \alpha U_\infty, \quad (30\,a)$$

$$Re \int_{\text{cercul MACH}}^{\text{placă}} \mathfrak{U} \frac{X\,dX}{(X^2-\mathfrak{b}^2)\sqrt{X^2-\mathfrak{b}^2}} = -\beta U_\infty. \quad (30\,b)$$

Subliniind expresia lui $\mathfrak{U}$ dată de (28), în (30 a), (30 b), efectuînd integralele între limitele $(1/\mathfrak{B}, \mathfrak{b})$ pentru ecuaţia a doua şi considerînd semireziduul în jurul bordului supersonic $X = L$, pentru ecuaţia întîia, (fig. 5), se obţine:

$$K_{10} = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B} \frac{Bl}{\sqrt{B^2l^2-1}}, \quad (31)$$

$$A_{10} = \frac{2\mathfrak{b}\sqrt{2\mathfrak{B}\mathfrak{b}}\,U_\infty}{\pi\sqrt{1+\mathfrak{B}\mathfrak{b}}}\left\{\beta+\alpha\left[\sqrt{\frac{(L-\mathfrak{b})(1-\mathfrak{B}\mathfrak{b})}{2\mathfrak{b}(1+\mathfrak{B}L)}}-\sqrt{\frac{1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{B}^2L^2-1}}\right]\right\}. \quad (32)$$

c. *Calculul caracteristicilor aerodinamice.*

Vom determina, aşa cum s-a procedat mai sus, caracteristicile aerodinamice, pentru aripă (planul orizontal) şi pentru placă (planul vertical).

— Coeficientul de presiune al aripii :

$$C_{pa} = -2\frac{u_a}{U_\infty}, \tag{33}$$

în care expresia vitezei axiale de perturbație de pe aripă este dată de (29).

— Coeficientul de portanță, se va calcula separat pe cele două regiuni, (fig. 1), ale căror suprafețe sînt, respectiv :

$$S_m = \frac{1}{2B}, \quad S_c = \frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{B}\right). \tag{34}$$

Pentru regiunea (m) vom avea :

$$\frac{1}{2B} C_{zm} = \frac{2}{U_\infty}\int_0^{1/B} u\,dy = \frac{2}{U_\infty}\int_{b}^{1/\mathfrak{B}} u(Y)\frac{Y\,dY}{\sqrt{Y^2 - b^2}}, \tag{35}$$

iar pentru regiunea (c) :

$$\frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{B}\right) C_{zc} = \frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{B}\right)\frac{4\alpha}{B}. \tag{36}$$

Coeficientul total de portanță al aripii va fi :

$$C_{za} = \frac{2\pi}{\mathfrak{B}\sqrt{L^2 - b^2}\,U_\infty}\left[A_{10}(1 - \mathfrak{B}b) + \right.$$
$$\left. + K_{10}\sqrt{\mathfrak{B}(L+b)}\left(2\sqrt{\mathfrak{B}(L-b)} + \sqrt{\mathfrak{B}L - 1}\right)\right]. \tag{37}$$

— Coeficientul de rezistență de undă :

$$C_{xa} = -\alpha\, C_{za}. \tag{38}$$

— Coeficientul momentului de ruliu :

$$HC_{ma} = \frac{8}{3lU_\infty}\int_0^l uy\,dy = \frac{8}{3U_\infty\sqrt{L^2 - b^2}}\int_b^L u(Y)\,Y\,dY, \tag{39a}$$

după efectuarea calculelor, devine :

$$HC_{ma} = \frac{1}{3\mathfrak{B}^2 U_\infty\sqrt{L^2 - b^2}}\left\{\sqrt{2\mathfrak{B}b(1 - \mathfrak{B}b)}\left[A_{10}(1 - 3\mathfrak{B}b) + \right.\right.$$
$$\left. + K_{10}\sqrt{\mathfrak{B}(L+b)\ (\mathfrak{B}L - 1)}\right] +$$
$$+ 2K_{10}\mathfrak{B}^2(L^2 - b^2)\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\sqrt{\frac{(L+b)(1 - \mathfrak{B}b)}{(L-b)(1+\mathfrak{B}b)}}\right] +$$
$$\left. + \left[A_{10}(1+\mathfrak{B}b)^2 + 2K_{10}(1 - \mathfrak{B}b + 2\mathfrak{B}L)\sqrt{\mathfrak{B}(L+b)(\mathfrak{B}L - 1)}\right]\sin^{-1}\sqrt{\frac{1 - \mathfrak{B}b}{1+\mathfrak{B}b}}\right\}, \tag{39b}$$

în care H este lungimea de referință a momentului de ruliu.

Coeficientul de presiune pe placă :

$$C_{pp} = -\frac{2\,u_p}{U_\infty}\,, \tag{40}$$

în care expresia lui u_p este cea a lui u dată de (29), considerată pentru punctele de pe placă.

— Coeficientul de rezistență de undă al plăcii, va fi :

$$C_{xp} = -\frac{4\,\beta}{h\,U_\infty}\int_0^h u(z)\,dz =$$

$$= \frac{2\beta\,(1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{h}^2)^{3/2}}{h\,U_\infty}\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} u(Y)\,\frac{Y\,dY}{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)\sqrt{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)\,(\mathfrak{h}^2-Y^2)}}\,. \tag{41 a}$$

Introducînd pe $u\,(Y)$ din expresia (29), se obține :

$$C_{xp} = \frac{2}{\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}\,U_\infty}\Bigg\{A_{10}\sqrt{2\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}\,(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})} -$$

$$-K_{10}\,\mathfrak{B}\,(1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{h}^2)\sqrt{\frac{(L^2-\mathfrak{h}^2)(1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{h}^2)}{\mathfrak{B}^2L^2-1}}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L-\mathfrak{h})(1-\mathfrak{B}\mathfrak{h})}{(L+\mathfrak{h})(1+\mathfrak{B}\mathfrak{h})}} -$$

$$-(1+\mathfrak{B}\mathfrak{h})\Bigg[A_{10}\sqrt{2(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})} -$$

$$-K_{10}\,(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})^2\sqrt{\frac{\mathfrak{B}\,(L+\mathfrak{h})\,(1+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})}{2\,(\mathfrak{B}L-1)}}\Bigg]\cos^{-1}\frac{1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}}{1+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}}\Bigg\}. \tag{41 b}$$

— Coeficientul de moment de ruliu al plăcii :

$$HC_{mp} = \frac{8}{3\,U_\infty\,h}\int_0^h u(z)\,z\,dz = \frac{-4\,(1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{h}^2)^2}{3\,h\,U_\infty}\int_{-\mathfrak{h}}^{\mathfrak{h}} u(Y)\,\frac{Y\,dY}{(1-\mathfrak{B}^2Y^2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{h}^2}}{3\,\mathfrak{B}^2\,\mathfrak{h}\,U_\infty}\Bigg\{\frac{1}{2}\,(1+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})\sqrt{2(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})}\Bigg[A_{10}\,(5+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}) -$$

$$-K_{10}\,\frac{\mathfrak{B}L-1}{\mathfrak{B}L+1}\sqrt{\frac{\mathfrak{B}\,(L+\mathfrak{h})}{\mathfrak{B}L-1}}\Bigg]\cos^{-1}\frac{1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}}{1+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}} -$$

$$-2\,K_{10}\,\frac{\mathfrak{B}^2(L^2-\mathfrak{h}^2)}{\mathfrak{B}^2L^2-1}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L^2+\mathfrak{h}^2)\,(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})}{(L-\mathfrak{h})\,(1+\mathfrak{B}\mathfrak{h})}} -$$

$$-\sqrt{2\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}\,(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})}\Bigg[A_{10}\,(3+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}) - K_{10}\sqrt{\frac{\mathfrak{B}\,(L+\mathfrak{h})}{\mathfrak{B}L-1}}\Bigg]\Bigg\}. \tag{42}$$

— Coeficientul de sucțiune al plăcii. Procedînd asemănător ca mai sus, se deduce :

$$\sigma_p = -\frac{\pi\sqrt{1-B^2h^2}}{h\,S_p\,U_\infty^2}\,[u_p^2(h-z)]_{z\to h} =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{1-B^2h^2}}{U_\infty^2\,h\,S_p}\left[\frac{(\sqrt{\mathfrak{h}^2-\mathfrak{z}^2}+\mathfrak{h})(1-\mathfrak{B}\sqrt{\mathfrak{h}^2-\mathfrak{z}^2})\,A_{10}^2}{\mathfrak{B}(\mathfrak{h}^2-\mathfrak{B}^2)}(\mathfrak{h}-\mathfrak{z})\right]_{\mathfrak{z}\to\mathfrak{h}} = -$$

$$= -\frac{\pi A_{10}^2}{B\,h^2\,U_\infty^2}\,. \tag{43}$$

Observații.

1) În cazul plăcii fără incidență, ($\beta = 0$), se obțin, pentru caracteristicile aerodinamice, aceleași rezultate ca mai sus, dar constantele A_{10} și A_{11} devin :

$$K_{10} = \frac{2\,\alpha\,U_\infty}{\pi\,B}\,\frac{B\,l}{\sqrt{B^2l^2-1}}\,, \tag{44}$$

$$A_{10} = \frac{2\,\alpha\,\mathfrak{h}\sqrt{2\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}}\,U_\infty}{\pi\sqrt{1+\mathfrak{B}\,\mathfrak{h}}}\left[\sqrt{\frac{(L-\mathfrak{h})(1-\mathfrak{B}\,\mathfrak{h})}{2\,\mathfrak{h}(1+\mathfrak{B}L)}}-\sqrt{\frac{1-\mathfrak{B}^2\mathfrak{h}^2}{\mathfrak{B}^2L^2-1}}\right]. \tag{45}$$

2) Pentru $l\to\infty$, ($L\to\infty$), se obțin caracteristicile aerodinamice ale aripii dreptunghiulare de anvergură $l = 2\,b$ și de profunzime egală cu unitatea, prevăzută cu discuri laterale, avînd aceeași profunzime și de înălțime h.

Astfel vom obține succesiv :

— Coeficientul de portanță al aripii :

$$C_{za} = \frac{\pi}{Bl\sqrt{1-B^2h^2}\,U_\infty}\left[2\,A_{10}(1-Bh)+K_{10}(2\,Bl\sqrt{1-B^2h^2}-1+Bh)\right]. \tag{46}$$

— Coeficientul de rezistență de undă al aripii :

$$C_{xa} = -\,\alpha\,C_{za}\,. \tag{47}$$

— Coeficientul de moment de ruliu al aripii :

$$HC_{ma} = \frac{1}{3\,B^2l\sqrt{1-B^2h^2}\,U_\infty}\left\{\sqrt{2\,Bh(1-Bh)}\left[A_{10}(1-3Bh)-\right.\right.$$

$$-\frac{1}{4}K_{10}(3-Bh)\Big]+\pi K_{10}B^2l^2(1-B^2h^2)+\Big[A_{10}(1+Bh)^2+$$

$$\left.+\frac{1}{4}K_{10}(5\,B^2h^2+2\,Bh-3)\right]\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-Bh}{1+Bh}}\Big\}. \tag{48}$$

— Coeficientul de rezistență de undă al plăcii :

$$C_{xp} = \frac{2\beta\sqrt{1-Bh}}{Bh\,U_\infty}\left[A_{10}\sqrt{2Bh} - K_{10}(1-B^2h^2)\sqrt{1+Bh}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-Bh}{1+Bh}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+Bh)\,(A_{10} - K_{10}(1-Bh)\sqrt{1-B^2h^2})\cos^{-1}\frac{1-Bh}{1+Bh}\right]. \qquad (49)$$

— Coeficientul de moment de ruliu pentru discuri :

$$HC_{mp} = \frac{1}{3B^2hU_\infty}\left\{\frac{1}{2}(1+Bh)\sqrt{2(1-Bh)}[A_{10}(5+Bh) - K_{10}]\cos^{-1}\frac{1-Bh}{1+Bh} - \right.$$

$$\left. - 2K_{10}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-Bh}{1+Bh}} - \sqrt{2Bh(1-Bh)}[A_{10}(3+Bh) - K_{10}]\right\}. \qquad (50)$$

În toate aceste relații, constantele A_{10}, K_{10}, au expresiile următoare, [6]:

$$A_{10} = \frac{2hU_\infty}{\pi(1+Bh)}\left(\alpha + \beta\sqrt{\frac{2Bh}{1-Bh}}\right), \qquad (51)$$

$$K_{10} = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}, \qquad (52)$$

obținute din (31) și (32), prin trecere la limită, $(L \to \infty)$.

3) Dacă se consideră discurile laterale fără incidență, $(\beta = 0)$, în cadrul observației 2), vom obține, aceleași caracteristici aerodinamice în care vom substitui pe K_{10}, A_{10} prin expresiile :

$$K_{10} = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}, \quad A_{10} = \frac{2\alpha h U_\infty}{\pi(1+Bh)}. \qquad (53)$$

4) Dacă vom face ca $h \to 0$, $(\eta \to 0)$ se obțin caracteristicile aerodinamice corespunzătoare aripii triunghiulare subțiri cu una din muchiile bordului de atac paralelă cu curentul neperturbat U_∞, cealaltă având bordul de atac supersonic. În rezultatele obținute se va face $h \to 0$, $(\eta \to 0)$, iar constantele devin :

$$K_{10} = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}\,\frac{Bl}{\sqrt{B^2l^2-1}}, \quad A_{10} = 0. \qquad (54)$$

Considerînd și observația 2), pe lîngă ipoteza $h \to 0$, vom avea cazul aripii dreptunghiulare de anvergură $l = 2\,b$, situată în curent supersonic. Într-adevăr vom obține :

$$K_{10} = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi B}, \quad A_{10} = 0, \qquad (55)$$

pentru cele două constante și

$$C_{za} = \frac{4\alpha}{B}\left(1 - \frac{1}{2Bl}\right) = \frac{4\alpha}{B}\left(1 - \frac{1}{4Bb}\right), \tag{56}$$

pentru coeficientul de portanță, același rezultat fiind obținut și prin tratarea problemei pe cale directă.

Dacă $b \to \infty$ se obține :

$$C_{za} = \frac{4\alpha}{B}, \tag{57}$$

adică coeficientul de portanță al unei aripi dreptunghiulare subțiri de anvergură infinită situată în curent supersonic.

Catedra de aviație
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Carafoli E.* High Speed Aerodynamics. Edit. tehnică, București, 1956.
2. *Carafoli E.* și *Horovitz B.* Scurgerea supersonică omogenă de ordin superior în jurul unei aripi unghiulare prevăzută cu placă normală. Studii și cercetări de mecanică aplicată. Vol. 4. An. VIII. 1957. Editura Academiei R. S. România.
3. *Staicu Șt.* La détermination des caractéristiques aérodynamiques de l'aile cruciforme en régime supersonique. Buletinul Instit. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Nr. 2, 1966.
4. *Carafoli E.* și *Săndulescu S.* Mișcarea oscilatorie armonică a ampenajelor în regim supersonic. Studii și cercetări de mecanică aplicată. Vol. 3. An. XI. 1960. Editura Academiei R. S. România.
5. *Carafoli E.* și *Năstase A.* Studiul aripilor triunghiulare subțiri cu simetrie forțată, în curent supersonic, Studii și cercetări de mecanică aplicată. Vol. 4. An. IX. 1958. Editura Academiei R. S. România.
6. *Carafoli E.* și *Horovitz B.* Mișcarea supersonică în jurul aripii triunghiulare cu discuri marginale. Comunicările Academiei R. S. România, t. III. Nr. 11—12, oct. dec. 1953, p. 395.
7. *Rîjik I. M.* și *Gradștein I. S.* Tabliți integralov, summ, riadov i proizvedenii. Gostehteorizdat, Moskva, 1951.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

AUTOMATICĂ

C.Z. : 621.375 : 621.3.024 : 681.14 : 518.5

LES AMPLIFICATEURS OPÉRATIONNELS DE LA MACHINE ANALOGIQUE ÉLECTRONIQUE À CALCULER M.A.C.-1 *)

PETRE DIMO, IVAN SIPOȘ

L'organe fondamental d'une calculatrice électronique analogique à courant continuu c'est l'amplificateur de calcul, les performaces duquel étant déterminantes pour les performances de la calculatrice, en général.

L'étude théorique des variantes connues [1 ÷ 9] nous a déterminé de continuer les recherches experimentales sur deux variantes d'amplificateur à correction automatique de la dérive du zero (fig. 1 et fig. 2).

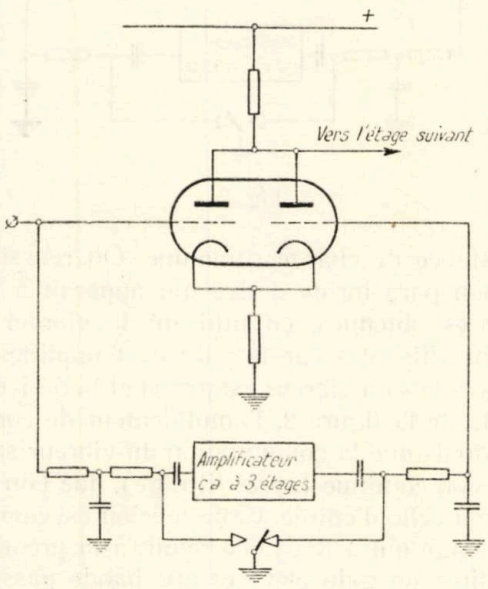


Fig. 1.

Les deux variantes ont à la base le classique schéma de Goldberg [9], comprenant un amplificateur à couplage direct et un amplificateur à vibreur pour corriger automatiquement la dérive du premier.

* Manuscris predat la redacție la 17 ianuarie 1966.

Dans la figure 1, l'amplificateur à vibreur a un nombre impair d'étages d'amplification, tandis que la commutation du vibreur a lieu en antiphase. Après filtrage, la tension continue de sortie a la même polarité que celle d'entrée.

Cette tension est appliquée à la seconde grille de la double triode du premier étage d'amplification, laquelle triode a les anodes reunis et alimentés

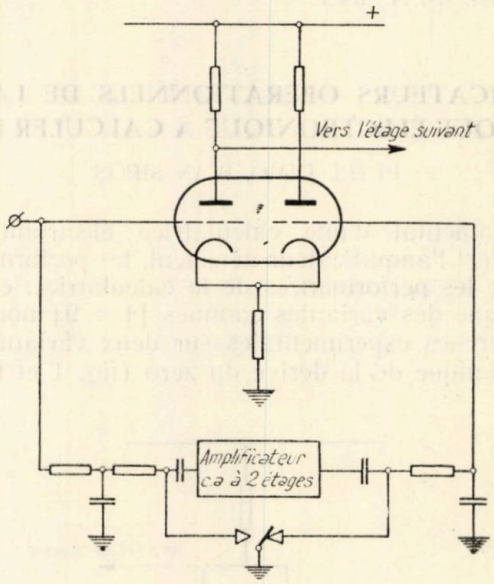


Fig. 2.

à travers une résistance de charge commune. On réussit de cette façon a compenser la tension parasite de dérive qui apparait à la première grille.

Les performances obtenues, en utilisant le vibreur soviétique Bc-12, en 50 Hz, on été insuffisantes car le gain de l'amplificateur est réduit, le bruit de contact des lames du vibreur est grand et la dérive assez importante.

Dans le schéma de la figure 2, l'amplificateur de corréction a un nombre pair d'étages, tandis que la commutation du vibreur se fait en antiphase, de sorte que la tension continue (après filtrage), que l'on obtient à la sortie, est de signe opposé à celle d'entrée. Cette tension est appliquée à le seconde moitié du premier étage qui a le catode réunit à la première moitié.

On a obtenu ainsi un gain élevé et une bande passante suffisante. Le vibreur est constitué par un relais télégraphique à faible bruit, alimenté en 50 Hz, 6,3 V.

Le schéma définitif de l'amplificateur est présenté en fig. 3. Il comprend trois étages amplificateurs en tension et un „cathode follower", ce qui permet l'obtention d'une résistance basse de sortie et une adaptation facile à des charges variables.

L'amplificateur utilise seulement trois sources d'alimentation stabilisée avec une consommation à vide de 20 mA à la sorce de +300 V et de 15 mA à la source de —200 V. La charge maximum est de 5 kΩ.

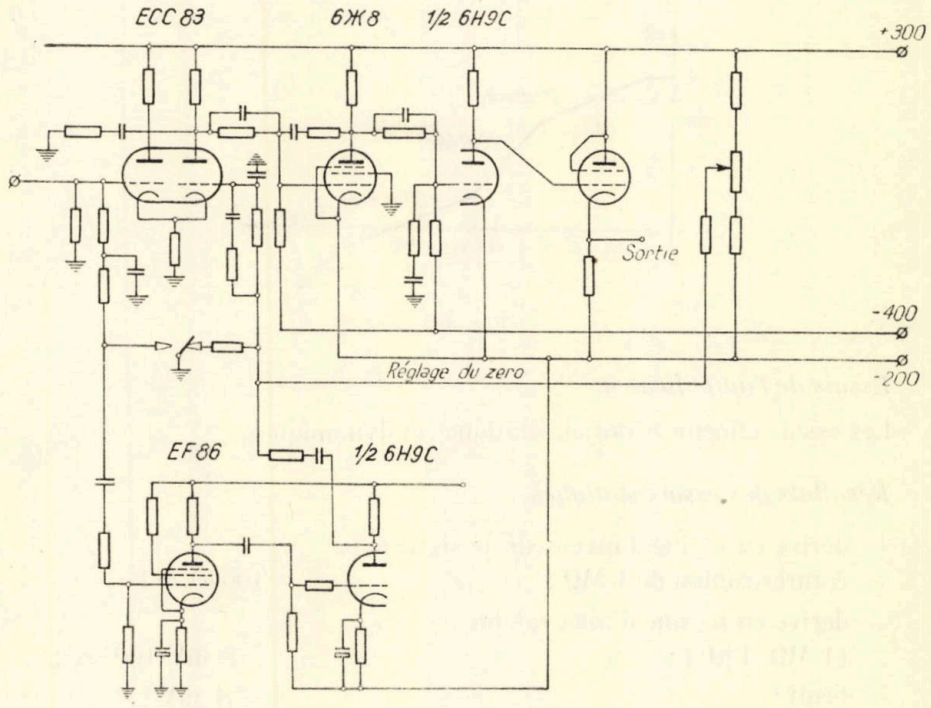


Fig. 3.

Choix des réseaux correcteurs

Le calcul de l'amplificateur en continu est classique. Il faut remarquer seulement que les étages successifs sont couplés moyennant des diviseurs à résistances, reliés à une barre commune de —400 V. Cette tension a été choisie pour que l'atténuation du signal introduite par les diviseurs soit petite.

Le choix correct des réseaux correcteurs est capital pour assurer une bande passante convenable, ainsi qu'une stabilité satisfaisante.

La question a été résolue selon une méthode semiexpérimentale [10], qui tient compte de la caractéristique réelle de fréquence de chaque étage amplificateur et de l'influence que le couplage de l'étage suivant a sur celle-ci.

Pour assurer une bonne stabilité on a imposer à la caractéristique de fréquence en boucle ouverte une pente de —20 db/dec autour de la fréquence critique (fig. 4) sur une longueur comprise entre 0,4 ω et 2,5 ω . On a

ensuite imposer la valeur de l'amplification en boucle ouverte à 100 Hz et on a déduit la caractéristique de fréquence désirée.

Tenant compte de la caractéristique de fréquence relevée (étage par étage) et de celle désirée, on peut déduire les réseaux correcteurs.

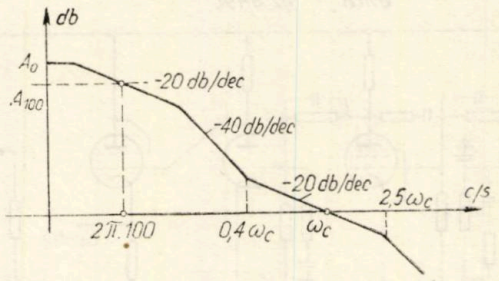


Fig. 4.

Essais de l'amplificateur

Les essais éffectueés ont été statiques et dynamiques.

Résultats des essais statiques

— dérive en régine d'inverseur de signe avec contreréaction de 1 MΩ : 100 μV/8 h ;
— dérive en régime d'intégrateur (1 MΩ, 1 μF) : 8 mV/100 sec ;
— bruit : < 4 mV ;
— gain de l'amplificateur c.c. : 225.000 ;
— gain en continu de l'amplificateur à vibreur : 1.000 ;
— domaine de variation de la tension de sortie : ± 100 V à charge maximum de 5 kΩ,

(l'amplificateur est prévu pour un fonctionnement normal avec une charge maximum de 33 kΩ et avec des résistances de shuntage de la résistance catodique finale pour arriver à 5 kΩ.

Essais dynamiques

— bande passante ; un signal sinusoidal de 1 kHz d'amplitude 100 V contient des distorsions négligéables de nonlinéarité ;

— gain à boucle ouverte : à 20 Hz — 90 000.
à 100 Hz — 9 000.

On démontre [1] que pour assurer une précision meilleure que 0,1‰ à 100 Hz, il faut un gain de 10 000.

Questions spéciales, engendrées par la réalisation pratique des amplificateurs

Certains problèmes d'ordre technologique, en général omis par les textes consacrés au calcul analogique, seront mentionnés :

a) *Les prises de terre*

L'obtention d'un faible bruit de fond est pratiquement conditionné à la réalisation de bonnes prises de terre. Les liaisons des masses des différents amplificateurs ainsi que celles des sources stabilisées ont une disposition optimum. En cas de choix malheureux des points de masse le bruit peut dépasser 20 mV ; on peut aussi observer l'apparition dans le bruit, de signaux de haute fréquence provenant de postes de radio-emissions proches.

b) *Les isolants*

Les propriétés des isolants sont déterminantes pour obtenir des performances élevées. L'isolant utilisé ne doit pas seulement avoir de faibles pertes, mais aussi des faibles variations avec l'humidité, la température et le temps. Selon le schéma de la figure 5 on a mesuré différents matériaux dans des conditions égales quant à la distance entre les points *a* et *b* de contact et à la tension appliquée. De cette façon on peut mesurer avec précision des résistances d'isolment atteignant 10^5 MΩ. Pour des résistances

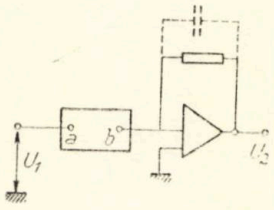


Fig. 5.

de valeur encore plus grandes on peut utiliser un intégrateur standard et mesurer la vitesse d'intégration avant et après l'application de la tension en *a*.

Les meilleurs isolants rencontrés ont été le plexiglass et le diclad, le premier étant pourtant plus sensible à l'humidité. On a donc isolé les bornes d'entrée des amplificateurs ainsi que les éléments de calcul (résistances et capacités) en les montant séparément sur des plaques de plexiglass et de diclad.

c) *Résistances bruyantes*

On a accordé une grande importance à la séléction des résistances car de la calité de celles-ci en dépend aussi grandement le bruit de fond.

d) *Vibreurs*

On a constaté que l'utilisation d'un relais polarisé, de type télégraphique donne des résultats surprenants, quant à la stabilité du fonctionnement.

La chaire d'automatique I
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAFIE

1. *Korn, Huskey.* Computer Handbook — Analog Computers, McGraw Hill, 1962.
2. *Jackson.* Analog Computation, McGraw Hill, 1960.
3. *Korn T., Korn A.* Electronic Analog Computers, McGraw Hill, 1956.
4. *Kogan B. T.* Dispozitive electronice de modelare. Editura Tehnică, 1965.
5. *Schächter S., Munteanu F.* Caracteristici comparative ale diferitelor sisteme de reglare automată a derivei. Comunicare la Congresul I I.F.A.C.
6. *Trapeznikov, V. A.* EMU-5. Editura Academiei de ştiinţe a U.R.S.S., 1955.
7. *Popov V. M.* MECAN-1. Documentaţie tehnică.
8. *Scott N.* Analog and digital computer technology McGraw Hill, 1963.
9. *Goldberg E. A.* Stabilization of D. C. Amplifiers RCA Rev. — 11 : 206 (1950).
10. *Dimo P.* Ipoteze simplificatoare în proiectarea amplificatoarelor operaţionale. Automatica şi Electronica nr. 3, 1966.

Nous tenons à remercier Mr. le proffesseur C. Penescu, Mr. le conférencier A. Petrescu, ainsi que Mr. S. Florea, prodoyen de la faculté d'Energétique, pour l'aide important qui'ils nous ont accordé durant notre travail.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

ELECTRONICĂ

C.Z. 621.3.018 : 621.385.2 : 621.38 : 621.3.023

SIMPLE METHOD FOR THE CALCULATION OF VACUUM DIODE HIGH-FREQUENCY CHARACTERISTICS *

DAN DASCALU

The small-signal a.c. operation of the vacuum diode at very high frequencies, where the transit time is comparable with the signal period, was studied by many authors [1] — [3], but the calculation of the diode impedance was long and difficult. The same result was obtained by the author, using the method applied by Drăgănescu [4] for deriving the impedance of the space-charge-limited dielectric diode, a solid-state device analogous to a vacuum diode. The calculation presented hereafter has the merit of simplicity. A difficult problem of vacuum tubes theory is solved in an elementary way.

The ideal planar vacuum diode theory is based on the following assumptions : a) one-dimensional geometry, (b) negligible magnetic field (c) zero electric field at cathode, (d) electron initial velocities equal to zero at cathode.

The current density $J(t)$ is given by the Maxwell equation.

$$J(t) = en(x, t)\, v(x, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial E(x, t)}{\partial t}. \tag{1}$$

We use also the Poisson equation

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \frac{en(x, t)}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

and assume that the electric field is a potential one

$$E(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial x}. \tag{3}$$

The „motion equation" is given by Newton's law

$$\frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{e}{m} E(x, t). \tag{4}$$

* Manuscris predat la redacție la 17 mai 1966.

The boundary conditions are (assumptions c and d)

$$E(0,t)=0 \quad , \quad v(0,t)=0. \tag{5}$$

Equations (1)—(5) are written for absolute values and the notations are the usual ones.

If a small signal a.c. voltage V_{a1} is superimposed on a large bias V_{a0} we may write the applied voltage in the conventional form

$$V_a(t)=V_{a0}+V_{a1}\,\epsilon^{i\omega t} \tag{6}$$

and the current density is given by the analogous expression

$$J(t)=J_0+J_1\,\epsilon^{i\omega t} \tag{7}$$

For small-signal operation, the response of the device is assumed to be linear. The variation in time of the electric field is given by the same small-signal form [4].

$$E(x,t)=E_0(x)+E_1(x)\,\epsilon^{i\omega t} \tag{8}$$

We may write the electric potential $V(x,t)$, the electron density $n(x,t)$ and the electron velocity $v(x,t)$ in the same form. If, in equations (1)—(5), we replace J, E, V, n, v by their values for small-signal operation and separate each equation in two relations corresponding respectively to the zero and 1 *st* order components, we obtain ordinary differential equations. The zero order components give us the d.c. solution. In the next approximation this solution is used to calculate the a.c. components.

For the d.c. components we find

$$v_0(x)=C\,x^{2/3} \tag{9}$$

and

$$V_0(x)=\frac{m}{2e}\,C^2\,x^{4/3} \tag{10}$$

where

$$C=\sqrt[3]{\frac{9}{2}\,\frac{e}{m\,\varepsilon_0}\,J_0} \tag{11}$$

By substituting $V_0(d)=V_{a0}$ (where d is the interelectrode distance) we again obtain Child's well-known law

$$J_0=\frac{4\,\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{V_{a0}^{3/2}}{d^2} \tag{12}$$

For the a.c. components it is necessary to take into account the relation

$$v_0\,\frac{d\underline{v}_1}{dx}+\left(\frac{dv_0}{dx}+i\omega\right)\underline{v}_1=\frac{e}{m}\,\underline{E}_1 \tag{13}$$

derived from equation (4), and

$$\frac{d\underline{V}_1}{dx} = \underline{E}_1 . \tag{14}$$

We first calculate $v_1 = v_1(x)$ given the differential equation

$$P(x)\frac{d^2\underline{v}_1}{dx^2} + Q(x)\frac{d\underline{v}_1}{dx} + R(x)\,\underline{v}_1 = \frac{e\underline{J}_1}{\varepsilon_0 m} \tag{15}$$

where

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= v_0^2 \\ Q(x) &= 2v_0\left[\frac{dv_0}{dx} + i\omega\right] \\ R(x) &= 2v_0\frac{d^2v_0}{dx^2} + \left(\frac{dv_0}{dx}\right)^2 + i\omega\frac{dv_0}{dx} - \omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Equation (15) results from (1), (2) and (4). Taking into account (9) and (11), the relations (16) may be replaced by

$$\left.\begin{aligned} P(x) &= C^2 x^{4/3} \\ Q(x) &= \frac{4}{3}C^2 x^{1/3} + 2i\omega C x^{2/3} \\ R(x) &= \frac{2}{3}i\omega C x^{-1/3} - \omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

We assume that the solution of equation (15) is given by ∅

$$\underline{v}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^{\frac{k+1}{3}} \tag{18}$$

taking into account the form of the coefiicients P, Q, R and the boundary condition $v_1(o) = o$. We obtain [5].

$$A_k = \frac{9e}{\varepsilon_0 m}\frac{\underline{J}_1}{C^3}\frac{k}{(k+2)!}\left(-\frac{3i\omega}{C}\right)^{k-1} \tag{19}$$

In the next stage we calculate $\underline{V}_1 = \underline{V}_1(x)$ on basis of equations (13), (14). It is possible to assume that

$$\underline{V}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k x^{\frac{k+3}{3}} \tag{20}$$

and, replacing $\underline{v}_1(x)$ by its expression, we find

$$B_k = \frac{18\underline{J}_1}{\varepsilon_0 C}\frac{k+1}{(k+3)!}\left(-\frac{3i\omega}{C}\right)^{k-1} \tag{21}$$

If we calculate $V_1(d) = V_{a1}$ it is very easy to obtain the diode impedance (for unitary cross-section) $Z = V_{a1}/J_1$.

At very low frequencies ($\omega \to 0$) we obtain the internal resistance

$$Ri = \frac{3}{2} \frac{d^{4/3}}{\varepsilon_0 C}. \tag{22}$$

The electron transit angle is given by

$$\Theta = \omega T_d \tag{23}$$

where the electron transit time T_d is

$$T_d = \int_0^d \frac{dx}{v_0(x)} = \frac{3\, d^{4/3}}{C}. \tag{24}$$

The diode impedance results in the form

$$Z = 12\, R_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{(k+4)!} (-i\Theta)^k. \tag{25}$$

After simple transformations [5] we obtain the well-krown form

$$Z = \frac{12\, R_i}{\Theta^4} [2(1-\cos\Theta) - \Theta \sin\Theta] - i \left\{ \frac{2 R_i}{\Theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{12\, R_i}{\Theta^4} [\Theta(1+\cos\Theta) - 2\sin\Theta] \right\}. \tag{26}$$

In conclusion we make the following remark on basis of the calculations presented above. If we note

$$\Theta_x = \omega T_x = \omega \frac{3}{C} x^{4/3} \tag{27}$$

as the electron transit angle corresponding to the cross-section at a distance x from the cathode, it is possible to write the a.c. components $E_1(x)$, $V_1(x)$, $n_1(x)$, $v_1(x)$ in the general form

$$\Lambda(x, \omega) = \Lambda(x, 0)\ \Lambda_1(\Theta_x) \tag{28}$$

where

$$\Lambda_1(\Theta_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (-i\Theta_x)^k, \quad \lambda_0 = 1. \tag{29}$$

For example, the electron density modulation n_1 in the cross-section x is dependent at high frequencies on the corresponding transit angle Θ_x. In this manner, the effect of electron transport becomes quite clear. We can say the same thing about the modulation of electron velocity and the modu-

lation of the electric field. A detailed analysis of the diode response is possible. In paper [6] the mechanism of the small-signal diode response is explained by separating the current components. The dielectric diode was treated in the same way. Particularly, it is possible to explain the appearance of the dynamic negative resistance in space-charge-limited diodes (vacuum or dielectric diode) at very high frequencies.

Chair of Electron Tubes and Transistors
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

REFERENCES

1. *Benham W. E.* Theory of the internal action of thermionic systems at moderately high frequencies. Phil. Mag. 5,641 (1928).
2. *Llewellyn F. B.* Electron inertia effects. Cambridge, 1941.
3. *Тринберг Т. А.* Избранные Вопросы математической теорий электрических и магнитных явлений, Москва, 1948.
4. *Дрэгэнеску М.* Частотные свойства идеального диэлектрического диода при малых сигналах.
Bull. Polytechn. Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest, 27, Nr. 4, pp. 131—138 (1965).
5. *Dascalu D.* Graduation Thesis Department of Electronics Polytechn. Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej Bucharest, June 1965.
6. *Dascalu D.* O imagine fizică a funcţionării la semnale mici a diodelor cu curent limitat de sarcina spaţială Bull. Polytechn. Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest, 28, Nr. 5 (1966).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 2

TRANSPORTURI

C.Z : 621.33:625.282 - 833.6

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE TECHNIQUE ET ECONOMIQUE DES SYSTÈMES DE TRACTION ELECTRIQUE ET DIESEL *

AL. POPA, A. CARABULEA

1. *Exposé du problème.*

L'extension de l'électrification des chemins de fer dans divers pays et l'utilisation intensive de la traction Diesel pose le problème de l'établissement des conditions du maintien ou du remplacement d'une catégorie de traction, par une autre.

Dans cette étude on fait dans ce but, une comparaison technique et économique entre la traction electrique et la traction Diesel sur la base la variation des frais annuels de calcul (Z) en fonction de l'intensité du trafic de marchandises (q) ayant pris en considération une section de 100 km. de longueur.

Les domaines de rentabilité s'établissent en fonction de la déclivité équivalente de la ligne (0—15‰), le tonnage par train (500—2000) tonnes br. l'intensité du trafic de marchandises (5—25) 10^6 t. br. km/km. (dans le cas ou les investissements ne sont pas échelonnés dans le temps.) Dans l'annexe il a été donné un exemple, tenant compte des investissements échelonnés sur toute la durée de la construction et la voie ferrée électrifiée est mise partiellement en service. En établissant les tonnages auquels les frais du calcul sont égaux on a délimité les zones de rentabilité des systèmes de traction électrique et Diesel en mettant à la disposition de la pratique de projection un auxiliaire pour le choix des solutions de plusieurs varientes possibles.

2. *Les prémisses d'une comparaison technique et economique des systèmes de traction.*

Pour comparer les systèmes de traction électriques et Diesel on peut utiliser les critères suivants.

a. Le critère du prix minimal de revient de la marchandise transportée.
c. Le critère des frais annuels de calculs minimaux.
d. Le critère des frais minimaux au total pour une periode donnée.
e. Les critères du maximum de bénéfice et de rentabilité.

---

* Communiquée à la session scientifikue des cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucarest, 27—29 mai 1966.

Le terme de la récupération des investissements supplémentaires se calcule ainsi :

$$t_{rc} = \frac{I_E - I_D}{C_D - C_E} \text{ [années]} \leqslant t_{rn} = (8 - 10) \text{ années.} \qquad (1)$$

òu :

$I_E; I_D$ — les investissements pour l'électrification ou l'extension de la traction Diesel.

$C_D; C_E$ — les frais d'exploitation pour la traction Diesel respectivement électrique.

t_r — le terme de récuperation calculé (t_{rc}) ou bien établi (t_{rn}).

Les calculs démontrent (1) qu'en comparant la traction électrique et la traction Diesel il résulte des termes de récupertion de (4÷6) années dans les conditions de déclivité de (0—10‰) avec tendance d'abaissar au moment de la croissance de la déclivité.

S'il y a plusieurs solutions à comparer alors le calcul du terme de récupération se fait dans l'ordre de l'augmentation des investissements mais il n'est pas recomandable [8] de rapporter la comparaison à une solution donnée [10].

Par l'application du critère du prix de revient on ne prend pas en considération le revenu net réalisé au niveau de l'économie, nationale en raison des investissements faits, se qui mène a préciser certaines conditions plus avantageuses de rentabilité de la traction électrique par rapport au critère des frais annuels de calcul.

La détermination des frais annuels peut être faite en appliquant les relations suivantes :

$$Z = C_e + p_n^I = p_c q + p_n^r (I_i + I_e) \text{ lei/année.} \qquad (2)$$

Si les investissements varient dans le temps alors la relation (2) peut être écrite comme suit :

$$Z = C_e + p_n I_r = C_e + p_n \sum_{k=1}^{t} I_k (1 + p_n)^{t-k} \text{ ; lei/année.} \qquad (3)$$

òu :

C_e = frais d'exploitation.

$p_n = \frac{I}{t_{rn}} = 0{,}1 \text{ an}^{-1}$ = coeficient d'efficience économique.

I — l'investissment effectué pendant une année pour l'objedif proprement dit (I) et pour équivaler (I_e) réalisées dans les branches connexes.

I_r — l'investissement rapporté a la durée (t) en années lequel a pour l'année (k) la valeur (I_k).

p_c — le prix de revient de la marchandise transportée.

q — le trafic annuel de marchandiese

Pour le choix des solutions, il faut que les frais annuels de calcul pour l'électrification (Z^E) et celles pour l'extension du trafic Diesel (Z^D) satisfassent aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} Z^E < Z^D &\text{ la traction électrique est plus économique.} \\ Z^D < Z^E &\text{ la traction Diesel est plus avantageuse.} \end{aligned} \tag{4}$$

Quand la voie ferrée électrifiée peut être exploitée partiellement bien que les travaux d'investissements continuent, l'expression de la quantité (Z) a la forme :

$$Z = C_e + p_n \left[\sum_{1}^{n-r} I_{r+1} (1+p_n)^{q_1-r-i} + I_e - \sum_{1}^{q_1-1} (V' - C') (1+p_n)^{q_1-l-i} \right] \tag{5}$$

où :

- q_1 — la durée totale de la construction en années.
- l — la durée en années depuis le commencement de la construction dans la cas où la solution commence le plustôt jusqu'a l'entrée partielle en fonction des installations de la solution considérée.
- r — la durée considérée des le debut des travaux dans la solution qui commence le plustôt, jusqu'au commencement des travaux dans la solution considérée.
- n — la durée considérée dès le début des travaux dans la solution qui commence le plustôt jusqu'à l'achèvement des travaux dans la solution qui se termine plus vite.
- i — l'année à laquelle on rapporte les investissements.
- V' — le revenu brut pour la partie de la ligne donnée en exploitation par portions.
- C' — les frais pour les portions exploitées partiellement.

Étant donné que dans la littérature de spécialité il existe une série de discussions convernant l'application des relaions (1) (2) (3) (5) les calculs concernant le choix des solutions peuvent être complétés aussi par l'application du critère selon lequel on a donné les frais totaux pour une durée déterminée (Z_{t_1}) et des critères qui mènent à la réntabilité (r) et à un bénefice (B) maximal.

$$Z_{t_1} = \sum_{k=1}^{t1} (I_k - D_k) (1+p_n)^k = \text{minimum} \tag{6}$$

$$r^k = \frac{\sum_{1}^{n} V_{nk}}{I_k} = \text{maximum} \tag{7}$$

$$B = \sum_{1}^{n} [V_{nk} - I_k] (1+p_n)^k = \text{maximum} \tag{8}$$

où .

D_k — les frais directes d'exploitation où les amortisements ne sont pas inclus.

t_1 — la durée considérée égale avec la durée d'existence de l'installation.

t_{rn} — le terme de récupération établi.

V_{nk} — le revenu net.

I_k — l'investissement pandant l'année (k).

Dans cette étude nous utiliserons les relations (2) (3) et (5) en appliquant tout particuliérement la relation (2) pour determiner les frais annuels de calcul dans le cas de la traction électrique et Diesel. A l'intersection des courbes de variation des frais en fonction de l'intensité du trafic des marchandises pour les deux catégories de tractions prises en considération se trouvent les zones pour la délimitation de la rentabilite des solutions comparées.

Dans les calculs faits on a envisage la possibilité d'équivaloir les solutions du point de vue économique.

La comparaison des courbes de régression $Z = f(q)$ avec celles de la littérature $C_1 = f(q)$ et ayant en vue l'experience de plusieurs pays (1) (2) (7) dans l'utilisation de la traction, électrique et Diesel nous considerons que pour l'appreciation de l'efficience de quelques systèmes de traction où il vaut mieux utiliser les courbes $Z = f(q)$ que la variation des frais du prix de revient (C_1) en fonction de l'intensité du trafic.

3. *Les relations de calcul pour les frais de traction.*

Les frais de traction qui sont couramment utilisés dans les administrations des chemins de fer nous obligent à démontrer leur structure qui ne differe des frais annuels de calcul (que par exemple : la reseau electrique et les stations de traction electrique ; les investissements nécessaires aux modifications dans les depôts, etc.) et à les utiliser dans les calculs qui suivent.

L'expresion des frais annuels de calcul peut être envisagés sous la forme :

$$Z = Z_c + p_n I_f \tag{9}$$

où :

Z_c — les frais de traction.

I_f — les investissments pour les installations fixes.

La determination des frais de traction se fait par la relation :

$$Z_c = \frac{q}{G_v}\left[C_{th} \cdot \frac{s}{V_c} + C_{Lm} \cdot \sum_{k=1}^{n} L_k\right] \text{ lei/année.} \tag{10}$$

où :

G_v — le tonnage par train en tonnes.
C_{th} — les frais calculés par train-heure en lei.
V_c — la vitesse commerciale en km/h.
s — la longueur de la section de remorquage en km.
C_{Lm} — les frais en lei/t. br. km.
L_k — travail mécanique des forces de la traction pour divers profils ligne.

Les locomotives qui remorquent les trains sont Diesel 060 DA de 2100 C.P. et électriques 060 EA de 7350 C.P. leur côut varie de $(4—6).10^6$ lei pour les Diesel à $(6—8).10^6$ lei pour celles électriques. Les limites inférieures des investissements pour locomotives ont été établies ayant en vue le programme de perspective.

Les grandeurs de la relation (10) sont déterminés [9] par suite des relations

$$G_v = \frac{F_e - G_L (r_L + i)}{r_v + i} \text{ tonnes.} \qquad (11)$$

où :

F_0 — $10^3\ G_a\ \psi$ la force de traction à la jante de roue, en kgf ;
G_a — la poids adhérent, en kgf ;
ψ — le coefficient d'adhérence égal à (0,24—0,25) pour la traction Diesel et à (0,24—0,28) pour la traction électrique ; (9)
r — $f(V)$ la résistance à la marche fonction de vitesse a été notée (r_L) pour les locomotives et (r_v) pour les wagons ;
G_L — le poids de la locomotive, en tf ;
i — la déclivité maxime de la voie ferrée, ‰.

Dans cette étude nous avons considéré comme pantes équivalentes celles contenues entre (0‰—15‰) comprenant ainsi les situations trouvées le plus souvent dans la pratique.

La vitesse commerciale (V_c) en fonction de la vitesse du train par trajet (V_s) a des formes :

$$V_c = V_s \frac{[1440 - t_s (N_m + 2 N_e)]\, 60\, s}{[1440 \times 60\, s - 1440\, V_s\, t_s]} \text{ [km/h.]} \qquad (12)$$

Dans le cas des voies doubles $V_c = (0{,}9—0{,}95)\ V_s$ pour la traction Diesel et électrique.

N_m — le nombre paire de trains de marchandises.
N_c — le nombre paire de trains pour vayageurs et locaux
= 20 pour les situations prises en considération dans cette étude.
t_s — le temps de stationemment.

Les relations de calcul pour N_m et N_c sont données dans la littérature [9].

La vitesse par section (V_s) est déterminée à l'aide des courbes donées aux fig. (1÷2). Ainsi, par l'intersection des courbes $R_t = f(V)$ avec $F_0 = f(V)$ on peut déterminer la vitesse de section pour déclivités de la ligne de chemin de fer contenues entre (0—15‰) tant pour la locomotive électrique (060 EA) que pour la locomotive Diesel (060 DA).

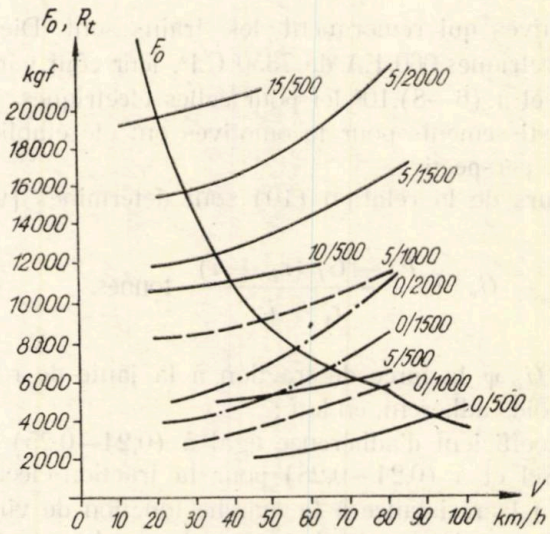


Fig. 1

La résistance totale du train à la marche est calculée par la relation :

$$R_t = G_v (r_v + i_e) + G_L (r_L + i_e) \text{ kgf.} \qquad (13)$$

Les résistances spécifiques des wagons (r_v) respectivement des locomotives (r_L) ainsi que les déclivités équivalentes (i_e) ont été calculées par des relations utilisées dans la pratique, qui se trouvent dans la littérature. [9].

$$C_{th} = \beta 1\, \alpha 1\, C_{Lh} + C_{vh}\, G_v + \beta 1\, C_{eLh} + C_{eth} \qquad (14)$$

$\beta 1$ — (1÷4) tient compte du nombre des locomotives pour le remarquage des trains.

$\alpha 1$ — (1,3÷1,5) tient compte du nombre supplémentaire d'attente des locomotives durant leur réparation. Les valeurs inférieures concernent les locomotives électriques tandis que les valeurs supérieures concernent les locomotives Diesel.

Les frais de traction pour une locomotive — heure sont calculés à l'aide de la relation :

$$C_{Lh} = \frac{I_L}{8760}\left[\frac{1}{t_{rn}} + \frac{1}{t_i}\right] + \text{c.P. lei/loc.heure} \qquad (15)$$

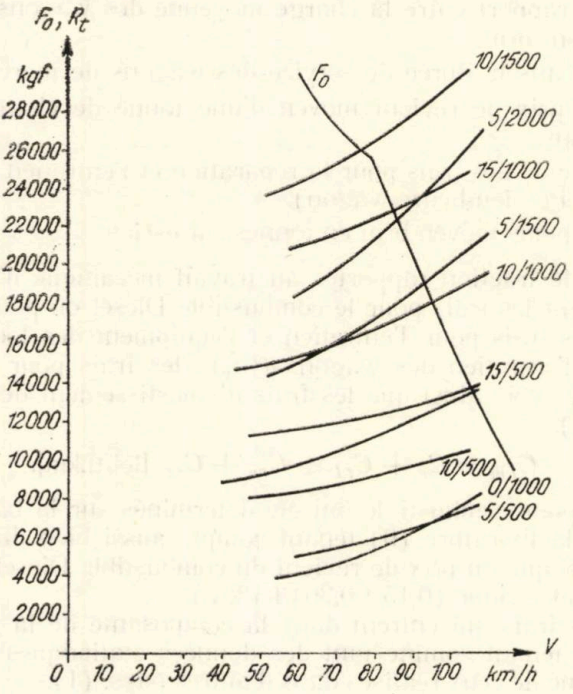


Fig. 2

ou :

I_L — les investissements destinés à procurer la locomotive.

t_{rn} — la ans, représente la terme de récupération établi.

t_l — la durée de service des locomotives électriques 40 ans et pour les locomotives Diesel 30 ans.

c — la cote de frais pour l'entretien des locomotives en exploitation par cheval -vapeur-heure (C—Ph) donné en litterature [3] [7].

P — la puissance de la locomotive en chevalue-vapeur.

Les frais par wagon-heure sont calcués par la relation :

$$C_{vh} = \frac{1}{8760}\left[a\lambda t\left(\frac{1}{t_{rn}} + \frac{1}{t_{iv}}\right) + \frac{c_v \lambda 1}{t_{rn}}\right] + \left(\frac{b}{q_{ob}}\right)\text{[lei/t.br.wag.heure]}. \qquad (16)$$

où :

a — l'investissement spécifique pour wagons et installations déstinés a la reparation et a l'entretien des wagons qui viennent d'être construits.

λt — le rapport entre la tare moyenne des wagons et le poids total de ceux-ci.

$\lambda 1$ — le rapport entre la charge moyenne des wagons et leur chargement brut.

t_{iv} — 40 ans la durée de service des wagons de marchandises.

c_v — le prix de revient moyen d'une tonne de chargement des wagons.

b — la cote des frais pour la réparation et l'entretien des wagons. (lei/essieu-heure wagon).

q_{ob} — le poids moyen brut en tonnes sur essieu.

Les frais de traction rapportés au travail mécanique d'une tonne force km. comprennent les frais pour le combustible Diesel ou pour l'énergie électrique (C_c) les frais pour l'entretien et l'equipment des locomotives (C_{rL}) les frais pour l'entretien des wagons (C_{rv}) les frais pour l'entretien et la réparation de la voie ainsi que les frais d'amortissement des lignes de chemin de fer (C_{rc}).

$$C_{Lm} = C_c + C_{rL} + C_{rv} + C_{rc} \text{ [lei/tf.km].} \tag{17}$$

Les frais pour combustible ont été déterminés sur la base des relations données dans la litérature (9) tenant compte aussi bien du rendement des transformations que du prix de revient du combustible Diesel (800 lei/tonne) et de l'énergie électrique (0,15÷0,30) lei/kwh.

Les autres frais qui entrent dans la composante de la grandeur (C_{Lm}) ont été établis tenant compte tant des données statistiques des chemins de fer roumains que de ceux realisés dans d'autres pays. (1).

Le travail mécanique des forces de résistance (L_r) et de freignage (L_f) peut être calculé ainsi :

$$L = L_r + L_f = s\left(\frac{G_L(r_L + i_e) + G_v(r_v + i_e)}{10^3}\right) + \frac{3{,}8\, V_f^2 (G_v + G_L)}{10^6} \tag{18}$$

où :

V_f — représente la vitesse moyenne au début du freinage.

Lés investissements pour les installations fixes (I_f) de la relation (9) ont été établis tenant compte du projet d'électrification de la ligne Bucarest — Braşov ainsi que des réalisations des autres pays. (1) (7) (10).

4. *L'efficience des systémes de traction en fonction de l'intensité du trafic des marchandises.*

En utilisant la relation (9) on a déterminé les frais annuels de calcul pour des intensités du trafic des marchandises comprises entre (5—25) 10^6 tonnes km. et déclivités equivalentes de (0—15‰). Pour les huit solutions on

a consideré les tonnages par train comprises entre (500—2000) tonnes br. ce qui a necessité le calcul de frais pour 32 varientes. La calcul des vitesses comerciales à l'aide de la relation (12) tenant compte du nombre des trains du tableau nr. 1 nous a conduit aux valeur du tableau nr. 2.

Tableau 1

G_v \ q	5	10	15	20	25
500	33	65	—	—	—
1000	17	33	49	65	82
1500	11	22	33	44	55
2000	8	16	24	33	41

Le tableau nr. 2.

Le calcul des frais de traction avec la relatin (14) nous conduit aux valeurs numériques du tableau nr. 3.

Le tableau nr. 3.

Les frais spécifiques qui ont permis le calcul des valeurs du tableau nr. 3 sont donnés dans la littérature (9).

En déterminant les valeurs des grandeurs de la relation (17) on obtient les données du tableau nr. 4.

Tableau 4

	060 DA	060 EA	060 EA
	800 lei/t.	0,30 lei/kwh.	0,15 lei/kwh.
C_c	0,640	1,084	0,525
C_{rL}	0,324	0,184	0,184
C_{rk}	0,091	0,091	0,091
C_{rc}	0,447	0,447	0,447
C_{Lm}	$1{,}502 \frac{\text{lei}}{\text{t.f.km.}}$	$1{,}806 \frac{\text{lei}}{\text{t.f.km.}}$	$1{,}247 \frac{\text{lei}}{\text{t.f.km.}}$

Tableau 2

Locomot.. \ i_e		0	5	10	15	Observation
060 DA	500	94,2	72,3	39,6	21,0	Le numérateur représente la vitesse commerciale, de la locominateur représente le numére de la locomotive pour le remorquage du train.
	1000	78,5	47,3	39,6/2	21,0/2	
	1500	65,0	36,0	39,6/3	21,0/3	
	2000	56,1	28,2	39,6/4	21,0/4	
060 EA	500	100,0	100,0	100,0	100,0	
	1000	100,0	100,0	96,0	85,0	
	1500	100,0	93,5	77,0	100/2	
	2000	100,0	86,1	96,0/2	85,0/2	

Tableau 3

Gv / Cth	500		1000		1500		2000		Observations
	060 DA	060 EA	060 DA	060 EA	060 DA	060 EA	060 DA	060 EA	
$\beta_1 C_L h$	168	179	168	179	168	179	168	179	Traction multiple
			336		504	358	652	358	Traction multiple
$C_{vh} G_v$	53,5	53,5	107	107	154,5	154,5	214	214	Traction simple
$\beta_1 C_{eLh}$	26	24	26	24	26	24	26	24	Traction multiple
	—	—	52	—	72	48	104	48	
$Ceth$	21,6		21,6		21,6		21,6		
Cth	269,1	278,1	32,26	371,6	370,1	377,1	523,6	438,6	Traction simple
	—	—	511,6	—	752,1	582,1	991,6	641,6	Traction multiple

Les caleurs calculées du travail mécanique pour divers tonnages par train et la déclivité de la voie ferrée sont données dans le tableau nr. 5.

Tableau 5

Le type de la locomotive	G_v / i_e	500	1000	1500	2000
060 EA	0	425	570	670	760
	5	610	820	1245	1570
	10	1110	2220	3330	4440
	15	1240	2480	3720	4960
060 DA	0	407	750	1107	1457
	5	717	1300	1910	2240
	10	1030	1810	2610	3620
	15	1340	1920	3700	3840

Pour déterminer les frais annuels de calcul on a pris en considération les investissements pour réaliser l'électrification tenant compte de l'expérince de notre pays completée avec quelques aspects des résultats obtenus

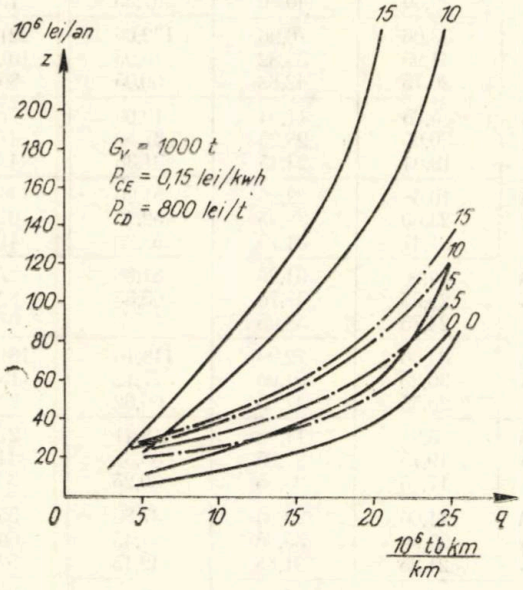


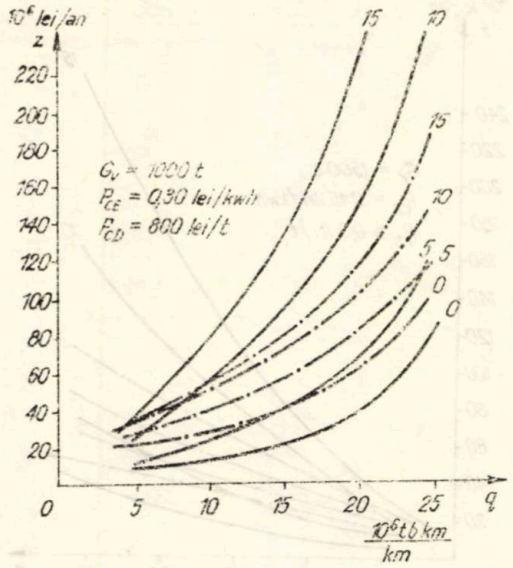
Fig. 3

a l'étranger [1] [5] on a equivalé les solutions au point de vue des possibilités de remorquages. On a obtenu ainsi les résultats du tableau nr. 6.

Les valeurs du tableau ont constitué la base pour les courbes de régression de la fig. (3—8). Les diagrammes fig. (3—8) nous montrent quels sont

Tableau 6

G_v (t)	i_e ‰	Lacom.	5	10	15	20	25
500	0	060 DA	11,20	30,88	—	—	—
		060 EA	23,40	41,75	—	—	—
			21,07	37,05	—	—	—
	5	060 DA	15,02	40,20	—	—	—
		060 EA	28,87	51,89	—	—	—
			24,95	44,91	—	—	—
	10	060 DA	28,26	61,80	—	—	—
		060 EA	34,25	63,65	—	—	—
			28,82	52,65	—	—	—
	15	060 DA	40,16	113,56	—	—	—
		060 EA	40,22	75,45	—	—	—
			32,72	60,65	—	—	—
1000	0	060 DA	6,91	14,68	25,06	28,16	78,66
	5	060 EA	21,05	31,13	43,45	60,25	103,05
			19,00	27,03	37,15	52,25	87,05
	5	060 DA	10,76	23,46	32,16	67,56	122,16
		60 EA	26,00	40,95	58,05	80,45	119,85
			22,45	33,93	47,35	65,85	104,05
	10	060 DA	21,31	54,76	145,76	145,76	267,16
		060 EA	30,70	50,60	72,36	99,65	147,55
			26,30	40,50	57,55	79,65	123,05
	15	060 DA	33,06	76,96	132,06	221,06	—
		060 EA	31,95	53,32	76,95	107,05	160,55
			26,75	42,83	60,05	86,25	133,05
1500	0	060 DA	5,75	11,94	19,06	27,76	39,06
		060 EA	20,05	28,25	37,50	47,15	59,05
			18,04	24,45	31,36	43,25	49,65
	5	060 DA	10,56	22,26	51,26	36,26	72,26
		060 EA	23,00	38,45	52,43	67,25	83,95
			21,47	31,75	53,25	41,75	66,35
	10	060 DA	24,66	51,26	81,56	117,16	162,16
		060 EA	29,55	47,75	65,55	82,85	98,35
			24,75	38,05		67,35	84,96
	15	060 DA	34,06	72,96	118,16	181,16	248,16
		060 EA	36,25	51,05	77,12	113,85	144,55
			29,55	47,65	66,62	84,95	109,95
2000	0	060 DA	5,81	11,96	18,41	27,26	36,26
		060 EA	19,75	27,85	35,35	44,60	63,65
			17,75	23,85	30,25	36,55	42,80
	5	060 DA	11,66	23,96	37,86	55,16	74,16
		060 EA	23,50	35,35	47,45	60,03	74,05
			21,85	31,85	42,15	52,23	65,55
	10	060 DA	24,36	45,96	77,60	108,26	142,16
		060 EA	29,95	48,45	67,36	86,86	107,55
			25,25	38,45	51,95	66,95	82,55
	15	060 DA	33,36	70,36	106,16	158,06	205,16
		060 EA	31,45	51,25	71,55	95,55	113,05
			26,15	40,55	55,95	71,35	88,05



rig. 4

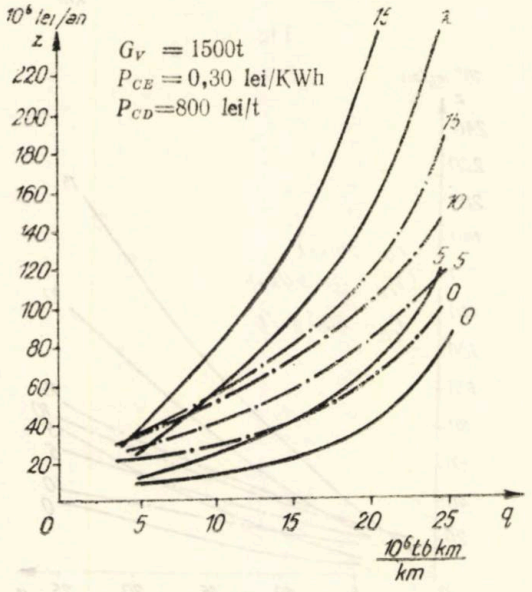


Fig. 5

les points d'intersection des courbes des frais de calcul pour la traction Diesel avec celles pour la traction électrique.

Ainsi on détermine les conditions qui nous démontrent quelle intensité de trafic, de l'un ou l'autre des systèmes de traction est plus économique,

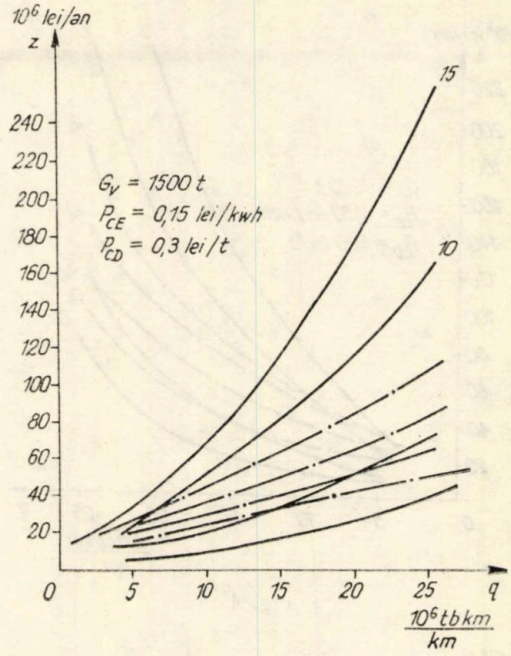


Fig. 6

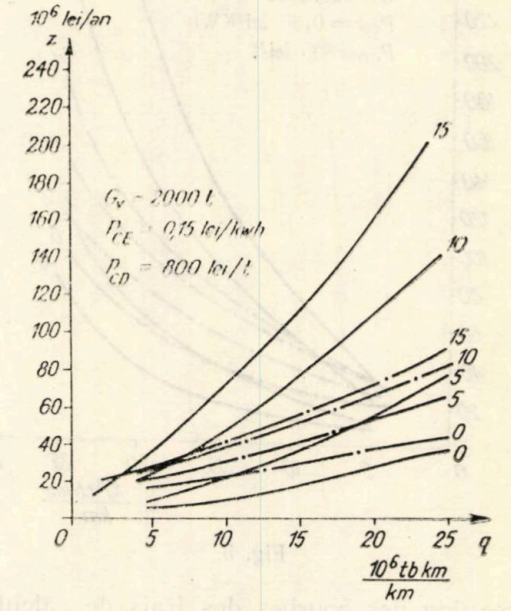


Fig. 7

en fonction de la déclivité de la voie à des prix courants et de la perspective de l'énergie consommée aussi pour tonnages-train compris entre 500—2000 tonnes.

Les calcule démontrent que les trains ayant des tonnages égaux ou inferieurs à 500 t. ne peuvent pas satisfaire au point de vue technique et économique aux conditions imposées par l'exploitation normale des lignes dans les conditions de trafic de (5—25) 10^6 t.br.km.

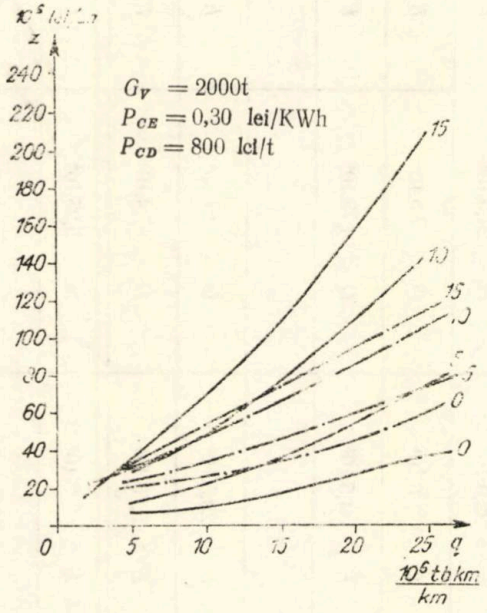


Fig. 8

C'est pourqui on a cesse de tracer les courbes de régression des trains aux tonnages de 500 t.

Les domaines de rentabilité pour la traction Diesel (D) et celle électrique (E) peuvent être suivis dans la tableau nr. 7.

Les données du tableau (7) démontrent qu'au moment de la hausse du prix de revient de l'énergie électrique de (0,15 lei kwh. à 0,3 lei/kwh.) les conditions de rendement de la traction sont plus séverès, c'est-à dire le domaine de la réntabilité se déplace vers la zone d'un trafic plus intense. On peut observer que la variante optimale pour les conditions étudiées apparait aux déclivités moyennes de 10‰ quand les tonnages train sont d'environ 1500 t. et 2000 t. Pour des valeurs d'intensité du trafic inférieures à celles du tableau nr. 7, la traction diesel est plus économique mais pour des valeurs supérieures, la traction électrique devient plus avantageuse du point de vue technique et économique.

Par la détermination des courbes de régression adéquates de certaines déclivités equivalentes usuelles on met à la disposition de la pratique de projection un auxiliaire d'orientation afin d'etablir la rentabilité des solutions. En présentant les critères pour le choix des variantes, nous facilitons le travail des spécialistes pour l'extension du domaine d'investigation afin de trouver les solutions optimales du point de vue technique et économique.

Tableau 7

Le tonnage par train	La déclivité ‰	La limite de l'économicité des types de traction Diesel (D) *et électrique* (E)			
		p_C^D = 800 lei/t.	p_C^E = 0,15 lei/kwh.	p_C^D = 800 lei/t.	p_C^E = 0,30 lei/kWh
1000	5	$D < 22{,}5.10^6$	$E > 22{,}5.10^6$	$D < 24{,}6.10^6$	$E > 24{,}6.10^6$
	10	$D < 6.10^6$	$E > 6.10^6$	$D < 7{,}5.10^6$	$E > 7{,}5.10^6$
	15	$D < 4{,}5.10^6$	$E > 4{,}5.10^6$	$D < 4{,}75.10^6$	$E > 4{,}75.10^6$
1500	0	—	—	—	—
	5	$D < 20{,}5.10^6$	$E > 20{,}5.10^6$	$D < 27.10^6$	$E > 27.10^6$
	10	$D < 5{,}7.10^6$	$E > 5{,}75.10^6$	$D < 7{,}4.10^6$	$E > 7{,}5.10^6$
	15	$D < 3.10^6$	$E > 3.10^6$	$D < 5{,}25.10^6$	$E > 5{,}25.10^6$
2000	0	—	—	—	—
	5	$D < 18{,}5.10^6$	$E > 18{,}5.10^6$	$D < 24{,}25.10^6$	$E > 24{,}25.10^6$
	10	$D < 6{,}5.10^6$	$E > 6{,}5.10^6$	$D < 10.10^6$	$E > 10.10^6$
	15	$D < 3.10^6$	$E > 3.10^6$	$D < 4.10^6$	$E > 4.10^6$

5. *Conclusions*

La presentation systématique aussi bien des critères techniques et économiques pour l'étude des solutions de projet que des relations formant la structure des frais annuels de calcul a été faite afin de préciser la maniere d'appliquer et de prendre en considération certains aspect qui, negligés, pourraient mener à des erreurs. En analysant les diagrammes de la fig. (3—8) et en faisant une comparaison des résultats avec la variation des frais du prit de revient $c_1 = f(q)$ function de trafic nous considérons que lors du tracage des courbes de regression on doit utiliser la relation $Z = f(q)$ parceque les conditions de la rentabilité de l'électrification, sont plus faciles que celles rencoutrèes dan la pratique.

Annexe

On compare deux solutions de l'électrification d'une voie ferrée de 100 km. à une solution concernant l'emploi du système Diesel à la même ligne au cas òu le trafic des marchandises est de 10^7 tonnes brutes par an. Les frais d'exploitation et les investissements dans les solutions comparées sont donné, comme suit :

$$C_A^E = 11{,}88.10^6 \text{ lei/année} \; ; \quad I_A^E = I_A + I_{Ae} = 3.10^8 \text{ lei}$$

$$C_B^E = 11{,}88.10^6 \text{ lei/année} \; ; \quad I_B^E = I_B + I_{Be} = 3.10^8 \text{ lei} \qquad (1\text{—A})$$

$$C_C^E = 13{,}9.10^6 \text{ lei/année} \; ; \quad I_C^E = I_C + I_{Ce} = 2{,}8.10^6 \text{ lei}$$

Les investissements dans l'objectif proprement dit (I_{Ae} ; I_{Be} ; I_{Ce}) et ceux d'équivalence (I_{Ae} ; I_{Be} ; I_{Ce}) sont échelonnés dans le temps comme suit :

$$I_{1A} = 60.10^6 \text{ lei} \; ; \quad I_{2A} = 60.10^6 \; ; \quad I_{3A} = 120.10^6 \; ; \quad I_{4A} = 60.10^6 \text{ lei}$$

$$I_{1B} = I_{2B} = 10^8 \text{ lei} \; ; \quad I_{3B} = 10^8 \text{ lei} \; ; \quad I_{4B} = I_{5B} = 20.10^6 \text{ lei.} \qquad (2\text{—A})$$

$$I_{1C} = 10^8 \text{ lei} \; ; \quad I_{2C} = 70.10^6 \; ; \quad I_{3C} = 76.10^6 \text{ lei.}$$

$$I_3 = I_5 = 12.10^6 \text{ lei.}$$

L'électrification s'effectue avec vingt locomotives électriques 060 EA de 7350 chevaux-vapeur et le passage au système Diesel sur la même ligne et au même trafic nécessite soixante locomotives Diesel 060 DA de 2100 chevaux-vapeur.

Dans la solution A et C l'échelonnement des investissaments se fait pour une période de sinq ans et dans la solution B pour quatre ans. Les coefficients de calcul de la formule (5) ont les valeurs numériques suivantes.

$$q_A = n_A = 5 \text{ ans} \; ; \quad l_A = 2 \; ; \quad r_A = 0 \; ; \quad V'_A = 3.10^6 \text{ lei} \; ; \quad C'_A = 10^6 \text{ lei année.}$$

$$q_B = 5 \text{ ans} \; ; \quad n_B = 4 \text{ ans} \; ; \quad l_B = 0 \; ; \quad r_B = 1 \; ; \quad V'_B = 0 \; ; \quad C'_B = 0$$

$$q_C = 5 \text{ ans} \; ; \quad n_C = 5 \text{ ans} \; ; \quad l_C = 0 \; ; \quad r_C = 0 \; ; \quad V'_C = 0 \; ; \quad C'_C = 0.$$

En appliquant la relation (5) on obtient des frais de calcul pour les trois solutions sous la forme :

$$Z_A = 39{,}41.10^6 \text{ lei année.}$$

$$Z_B = 46{,}08.10^6 \text{ lei/année.}$$

$$Z_C = 50{,}82.10^6 \text{ lei/année.}$$

Dans le calculs effectués on a tenu compte de la possibilité d'équivaler les solutions du point de vue technique et économique.

On peut observer que dans la solution *A* les frais annuels de calcul sont minimaux donc l'électrification des chemins de fer dans les conditions de trafic donné et avec un échelonnement rationnel des investissements est avantageuse. Les mises en service partielles de la voie ferrée électrifiée et les termes plus longs pour la réalisation dans le temps des investissements mènent à l'adoption de la solution *A* par rapport à la solution *B*. La solution qui consiste d'utiliser le système Diessel ayant les frais de calcul les plus élevés n'est pas indiqué dans les conditions de trafic donnéaue déclivités moyennes de 10‰. Si l'on applique les autres critères donnés par les relations (6) (7) et (8) on obtient les frais totaux minimaux respectivement la rentabilité et le bénéfice maximal dans le cas de la solution *A*, par rapport aux deux autres solutions *B* et *C*.

La chaire de materiel roulant
Institute polytechnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAFIE

1. *Molland Nell H.* Untersuchungen zrr Electrifizierung der deutschen Eisenbahnen. Deutsche Eisenbahntecnik Nr. 11 (November) 1964. S. 488—493 und Nr. 12 (Dezember) S. 538—544.
1. *Nouvion F.* Utilisation de l'énergie en traction à la S.N.C.F. Revue Generale de l'Électricité. Tom. 75 Nr. 2 (febr.) 1966, p. 143—148 ; 13 fig.
3. *Cernomordin G. I. i Tuhonov K. K.* Osnovî tehniko-okonomiceskoi otzenki eksploataționnoi rabotî i tehniceskogo otnocheniia jeleznîh dorog. Transjeldorizdat, Moscou, 1955.
4. *Knifeler A.* Die electrische Zugförderung der Eisenbahnen aus R.F.G. im Jahre 1964. Elektrische Bahnen 36 Nr. 1 (Ianuar) 1965 S. 4—15.
5. *Plewako, S.* Nekotorîe voprosî elektrifikațzii uceastkov polskin jelesnîh dorog gornîh raionov. V Przeglad Kolejowy Elektrotechniczny 12 și 16 (iuni) 1965. s. 161—164.
6. *Isaev I. P., Dimitriev V. A.* Tehniko-ekoniceskoe obosnovanie tempov elektrifikațzii jelesnîk dorog. V Elektricestvo nr. 2 (febr.) 1966 p. 3 fig
7. *Popa Alexandru.* Le problème de l établissement du système de traction le plus économique pour les lignes de chemin de fer de la R. S. Roumanie. These de dissertation. Institut des Transports de Moscou.

8. *Carabulea A. et autres.* Le progrès technique et l'efficience économique de la production. Compte rendu à la session scientifique I.P.B. mai 1966.

9. *Popa Al., Chimu N., Neagu A.* La traction des trains. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1966.

10. *Carabulea A., Lelescu Gh.* Aspects concernant la rentabilité des voies ferrées électrifiées au courant alternatif. Compte rendu à la session scientifique du M.C.F., Mai 1966.

11. *Garreau M.* Elektriceskaia Teafa. Gosudtransjd Izdatelstvo, Moscou 1959.

OKUMENTÁCIÓS KÖZPONTI 1883

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10782

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

F 1130

BIBLIOTECA CENTRALĂ

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX NUMĂRUL 3 ANUL 1967
MAI — IUNIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONTI 1863

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXIX — NUMĂRUL 3

MAI — IUNIE
1967

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici ;* Prof. Dr. Docent *E. Bratu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli ;* Prof. Dr. *S. Călin ;* Acad. Prof. Dr. Docent *D. Dumitrescu ;* Prof. *S. Gâdea ;* Conf. Dr. *I. Grădișteanu,* Prof. *C. Ionescu-Bujor ;* Prof. Dr. Docent *Gh. Manea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu ;* Prof. *St. Mantea;* Prof. Dr. *N. Marinescu ;* Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu;* Prof. *C. Penescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu ;* Acad. Prof. Dr. Docent *R. Răduleț ;* Prof. *Al. Rău ;* Prof. *Al. Spătaru ;* Prof. *L. Stoicescu ;* Prof. Dr. Docent *R. Voinea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

Sumar

MATEMATICA

I. Gh. Sabac

Asupra mișcărilor plane ale fluidelor perfecte compresibile . . . 21

I. M. Miu

O generalizare a formulei mediei a lui Pompeiu 29

GEOMETRIE

H. Erfurt

Zur Anwendung ebener Transformationen in der konstruktiven Geometrie des vierdimensionalen Raumes 35

A. Tănăsescu

Uber einige Umwandlungen im affinen Riss 37

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C. Drăgulescu, O. Solomon, S. Zugrăvescu, E. Beral

Comportarea la scindarea termică în mediu neapos a unor complecși ai azoizobutironitrilului cu acizi Lewis 49

Th. Bădescu

Contribuții la stabilirea unui criteriu obiectiv de apreciere a corelației hîrtie-cerneală-mașină, în imprimarea policromă 57

L. Literat

Activitatea catalitică a unor alumine reductoare nestoechiometrice 65

I. Teoreanu

Cu privire la mecanismul procesului de întărire a silicatului tricalcic și a β silicatului bicalcic 76

ELECTROTEHNICA

I. S. Antoniu, A. Adămuț

Un nouveau critérium pour la détermination de la précision de la simulation sur une chaine de quadripoles de la propagation d'une onde sur une ligne électrique longue , ... 81

AUTOMATICA

P. Dimo

Proiectarea amplificatoarelor operaționale ale calculatorului analogic didactic CAD-1 93

REZISTENȚA MATERIALELOR

A. Petre

Fluttering of the "Electrical Line Galloping" Type for Wires of Continuous Mass 103

V. Drobotă

O metodă generală pentru calculul sarcinii critice de flambaj la grinzile continue pendulare sub sarcini transversale 109

T. Pană

Efectul maselor concentrate asupra vibrațiilor libere ale barelor cu pereți subțiri avînd profilul închis 129

I. N. Constantinescu, A. V. Darabont

Oscilații proprii și forțate în conductele de aer comprimat . . . 139

ELECTRONICA

D. Dascălu

Asupra comportării la înaltă frecvență a tranzistorului unipolar cu curent limitat de sarcină spațială 149

Резюме

И. Г. Шабак Д. К. 531/532:517

К плоским движениям совершенных сжимаемых жидкостей

При выражении u и v составляющих скоростей в плоском постоянном движении доказывается, что для того, чтобы иметь

$$\mu = \lambda \frac{\delta \varphi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\gamma \frac{\delta \psi}{\delta x}$$

необходимо и достаточно, чтобы θ, угол, образованный вектором скорости с осью Ox, был бы гармонической функцией.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

И. И. Миу Д. К. 517

Обобщение формулы средних Помпея

В одной из своих работ Д. Помпей установил формулу средней для двухразмерного интервала: для функции $f(y, x)$, постоянной в данном интервале. В работе ободщается формула средней Д. Помпея для n — размерной области, с применением более общих семейств функций.

Автор дает и применения обобщенной формулы.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Е. Ерфурт Д. К. 517

Применение плоских трансформаторов в строительной геометрии четырехмерного пространства

Исходя из некоторого соответствия между точками пространства R и точками двух рядов, содержащимися в плоскости изображения, когда совокупность этих пар точек составляет так называемую прямую аффинности, автор, пользуясь, некоторыми результатами Даллманна, Рота и других, показывает, как могут быть эффективно применены некоторые соотношения проективной геометрии в конструктивной геометрии пространства R.

Таким образом строится гипереон.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

А. Тэнэсеску Д. К. 515

К некоторым преобразованиям в аффинной эпюре

Известно, что вообще на аффинных эпюрах были решены вопросы падения, относящиеся к плоским или к прямым и плоским линиям. В этой работе тщательно изучены в аффинной эпюре главные методы преобразования элементов, определяющих данную эпюру.

На основе этих преобразований показано, как можно расширить область непосредственных практических применений решением определенных классов задач на данном типе эпюры.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Summary

I. Gh. Şabac D.C. 531/532 ; 517

About Plane Motions of Perfect Compressible Fluids

Noting by u and v the speed components in a permanent plane motion ,it is demonstrated that in order to have

$$\mu = \lambda \frac{\delta \varphi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} - = \lambda \frac{\delta \psi}{\delta x}$$

it is necessary and sufficient for θ, the angle formed by the speed vector with axis Ox, to be a harmonic function.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

I. M. Miu D.C. 517

A Generalisation of Pompei's Mean Formula

In one of his works D. Pompei established a mean formula for a bi-dimensional interval :

$$R : [a, b] \times [c, d]$$

for a fonction $f(x, y)$ continuous in this interval. In this paper D. Pompei's Mean Formula is generalized for a n-dimensional domain, more general function families being used.

The author also effects applications of the generalized formula.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

E. Erfurth D.C. 517

The Use of Plane Transformations in the Constructive Geometry of a Space with Four Dimensions.

Starting from a correspondence among the points of space R and the points of two series contained in the representation plane the assembly of these pairs of points constituing the so-called affinity straight line, the author, using some results of Dallmann's Roth's, etc... shows the manner in which some relations of projective geometry may be efficiently applied in the constructive geometry of the space R.

A hypercone is constructed in this manner.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

A. Tănăsescu D.C. 515

About Some Transformations in Affine Epure

It is a well-known fact that, in general, only problems of incidence relating to planes or to straight lines and planes were solved on affine epures. In this paper the main methods for transforming the elements definiting this epure are studied in detail in the affine epure.

On the basis of these transformations the manner is shown in which the domain of immediate practical applications can be widened by solving certain catergories of problems on this type of epure

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Д. К. 542.952.6 : 66.095.2 : 678.5 : 678.7 : 546 : 543

К. Дрэгулеску, О. Соломон, С. Зугравеску, Е. Берал

Поведение комплексов азоизобутиронитриля с кислотами Люиса в безводной среде при термическом разделении на части

Образование комплексов из кислот Люиса с органическими молекулами, отдающими электроны, составляет задачу теоретического и практического применения.

Учитывая, что азоизобутиронитриль используется в качестве инициатора при полимеризационных реакциях, наблюдалось его поведение при термическом разложении в безводной среде (диоксан, диметилформамида, диметилсульфоксид, углеродистый этилен), а также и некоторых комплексов синтетизированных из азоизобутиронитриля с некоторыми кислотами Люиса. Таким образом, изучалось термическое разделение комплекса, образованного из азоизобутиронитриля с $S'nCl_4$ в отношении 1 : 1.

Также с той же целью испробовался синтез комплексов с $SbCl_1$ и с $TiCl_4$ при различных молярных соотношениях и в различных средах.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Т. Бэдеску Д. К. 655.2/3 : 676.3 : 667.5

Об установлении объективного критерия оценки соотношения „бумага — чернила — машина" в полихромическом книгопечатании

Работа предлагает распространение нового способа объективной оценки — „относительное хроматическое заключение", выраженное в процентных единицах, для анализа факторов, взаимодействующих в процессе полихроматического книгопечатания.

Метод может принести реальные экономические выгоды, облегчая создание условий нормализации технологических процессов книгопечатания и приводя к возможности рекомендаций производству полиграфических материалов в целях улучшения их качества.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Л. Литерат Д. К. 621.35 : 66.097.4 : 669.712

Каталитическая активность некоторых восстановительных нестехиометрических глиноземов

Реакция каталитического разложения муравьиной кислоты была исследована в динамическом режиме на пульверизованных глиноземных образцах и нестехиометрическом глиноземе.

Кинетика каталитического процесса прослеживалась одновременно с измерениями электрического сопротивления каталитического слоя. Параллельно производились спектрофотометрические определения инфракрасных поглощений для одной и той же каталитической системы.

Была оценена избирательность двух катализаторов и были определены кинетические параметры для реакций обезвоживания и дегидрогенизации.

На основе экспериментальных данных обсуждается механизм каталитического распада HCOOH на глиноземе и нестехиометрическом глиноземе, уточняется природа активных каталитических центров.

Делается вывод, что дегидрогенизированная активность нестехиометрического глинозема обязана промежуточным атомам алюминия, вызывающим также отклонение от стехиометрии для черных восстановительных глиноземов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.C. 542.952.6 ; 66.095.2. ; 678.5 ; 678.7 : 546.543

C. Drăgulescu, O. Solomon, S. Zugrăvescu E. Beral

The Behaviour, by Thermal Decomposition, in Nonanqueous Media, of Some Complexes of Azo-bis-isobutyronitrile with Lewis acids.

Complex formation between Lewis acids and electron donating organic molecules is a problem of theoretical and applicative interest.

Taking into consideration that azo-bis-isobutyronitrile is used as initiator in sone polymerisation reactions, the behaviour by thermal decomposition, in nonaqueous media (dioxane, dimethylformamide, dimethylsulfoxide, ethilene carbonate) of azo-bis-isobutyronitrtile and its complexes formed with some Lewis acids were investigated Thus, the thermal decomposition of the 1 : 1 complex, formed by azo-bis. isobutyronitrile with SnCl has been examined. For the same purpose, the synthesis of azo-bis-isobutyronitrile with $SbCl_5$ and $TiCl_4$ in various ratio and different media was tried.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Th. Bădescu D.C. 655.2/.3 : 676.3 : 667.5

Contributions to the Establishment of an Objective Evaluating Criterion of the Papep-ink-machine Correlation in Polychromous Printing.

This paper suggests the extension of a new means of objective evaluating : ,,relative chromatic contents", expressed in percentage units, in view of analysing the inter-acting factors in the process of polychromous printing.

This method can bring in effective economical advantages making the standardizing conditions of technological printing processes easier to achieve and yeald the possibility of making recommendations to the industries supplying polygraphic material, in view of improving its quality.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

L. Literat D.C. 621.35;66.097.4:669.712

Catalytic Activity of Some Reducing Non-stoichiometrical Alumina

The decomposition reaction of formic acid was studied in dynamic regime on samples sprayed with alumina and non-stoichiometrical alumina. The kinetics of the catalytic process was studied concomitently with electrical resistance measurements of the catalytic layer. Simultaneously spectrophometric infra-red absorbtion determinations for the same catalytic system were made. The selectivity of the two catalysts was estimated and the kinetic parameters for the dehydratation and dehydrogenation reactions were determined. Based on experimental data, the catalytic decomposition mechanism of the HCOOH on alumina and on non-stoichiometrical alumina is discussed and specifications on the nature of the active catalysis centre are made. The author concludes that non-stoichiometrical alumina dehydrogenation activity is due to the interstitial Al atoms which also cause the deviation from stoichiometry for the reducing black alumina.

Bul. Inst. politehnic ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

И. Теоряну Д. К. 546.284 : 661.8...65 : 666.9 : 691.5

О механизме процесса затвердения трехкальциевого силиката и β двухкальциевого силиката

На основе экспериментальных данных, имеющихся в литературе, и результатов, полученных автором в связи с кинетикой процесса твердения минеральных связок, даются уточнения о механизме твердения трехкальциевого силиката и β двухкальциевого силиката.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Д. К. 621.3.015 : 621.372.5 : 621.315 : 621.3.09

И. С. Антониу, А. Адемуц

Новый критерий для определения точности моделирования распространения волны на длинной электрической линии при помощи цепи квадриполюсов

На основе исследований, проведенных аналогическим электронным калькулятором, авторы излогают новый критерий для определения точности моделирования длинной электрнческой линии при помощи цепи квадириполюсов : это — критерий переменного напряжения в условиях постоянного времени.

Авторы приводят аналитические отношения между отклонением напряжения и числом квадриполюсов цепи модели.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

П. Димо Д. К. 621.375 : 518.5 : 681.14

Проектирование операционных усилителей учебного аналогического гычислителя

В работе представлены критерии проектирования, статический и динамический методы проектироваиия, а также полученные результаты. Последние полностью соответствуют расчету.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

А. Петре Д. К. 539.4 : 533 : 531.1

Дрожание типа „галопирование электрических линий" для проводов сплошной массы

Устанавливается уравнение с частичными производными проводов с учетом собственного веса, аэродинамических сил как следствие покрытия льдом, а также внутреннего трения.

Уравнение интегрировано, и устанавливается собственная частота, а также критическая скорость, которая вызывает явление галопирования, в зависимости от аэродинамических характеристик, внутренних трений и размеров провода.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

В. Дробота Д. К. 539.4 : 620.173 : 624.04 : 624.023.9

Общий метод расчета критической нагрузки продольного изгиба в постоянных маятниковых балках под поперечными нагрузками

В статье дан общий метод расчета критической нагрузки продольного изгиба в постоянных маятниковых балках, симметрически нагруженных сосредоточенными или равномерно распределенными нагрузкамн.

Метод расчета легко применим, оперативен и сведен к простым расчетным соотношениям как для общих случаев так и для частных случаев практического характера, к которым он применяется.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

I. Teoreanu D.C. 546.284 : 661.8...65 : 666.9 : 697.5

About the Mechanism in the Process of Tri-calcic Silicate and of β —bi-calcic Silicate Hardening

On the basis of the experimental data in literature and of the results obtained by the author in connection with the kinetics of the hardening process of mineral binders, details relating to the mechanism of tri-calcic silicate and of β-bi-calcic silicate hardening are given.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.C. 621.3.015:621.372.5:621.315:621.3.09

I. S. Antoniu, A. Adămuț

A New Criterion for the Determination of the Precision of Modeling with a Chain of Four-poles of Propagation of a Wave on a Long Electric Line

Starting from the researches made with the help of an analogical electronic computer the authors give a new criterion for the appreciation of the precision with which there can be modeled a long electric line with a four-pole chain : it is a criterion of the variable tension at constant time.

The authors are giving further analytical relations between the deviation of the tension and the number of four-poles of the chain of the model.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

P. Dimo D.C. 621.375:518.5:681.14

Design of the Operational Amplifiers of the Analogous Didactic Computer

Design criteria, static and dynamic design method as well as the results obtained, are shown. These are in good agreement with the calculation.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

A. Petre D.C. 539.4 : 533 : 531.1

Fluttering of the „Electrical Line Galloping" Type for Wires of Continuous Mass.

The author establishes the partial derivative equation a wire whose cross-section is tapered due to the ice load. The wire is subject to the action of body and aerodynamic forces. The internal frictions are also considered.

This equations is integrated and the natural frequency of oscillation of such a wire and the stability conditions are established. This condition leads to the determination of the minimum velocity of the air stream at which begins the „galloping" phenomenon, function of the aerodynamic characteristics, internal friction and wire dimensions.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

V. Drobotă D.C. 539.4:620.173:624.04:624.023.9

A General Method for Computing the Buckling Critical Load on Continuous Pendulum Beams under Transverse Loads

The article presents a general computing method of the buckling load on continuous pendulum beams, with concentrated or uniformly distributed loads.

The computing method is easy to use, efficient and leads to simple computing relations both for general and special cases of practical interest, to which it is applied.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Т. Панэ

Д. К. 539.3/4 : 624.07 : 621.01

Эффект сосредоточенных масс на свободные вибрации тонкостенных стержней замкнутого профиля

В работе устанавливаются расчетные соотношения на кручение-изгиб амплитуд свободных вибраций для тонкостенных стержней, с учетом сосредоточенных масс, в частном случае двухосно симетрических сечений. Эти соотношения получены с помощью метода начальных параметров, где рассматриваются в качестве внешних пульсирующих безмассовых сил напряжения, возникающие в сечении в результате инерционных сил, действующих на сосредоточенные массы. Таким образом, соотношения учитывают как сосредоточенные массы, так и распределенную массу стержня.

Для некоторого положения сосредоточенных масс в сечении свободные изгибающие и крутящие вибрации возникают совместно даже в стержнях с двухосно симетрическим сечением. Они расходятся, когда центр тяжести масс совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Д. К. 621.51/.54

И. Н. Константинеску, А. В. Дарабонт

Собственные и вынужденные колебания в трубопроводах сжатого воздуха

В работе определяются соотношения, выражающие собственные и вынужденные колебания давления и скорости сжатого воздушного потока в трубопроводе, когда известны начальные и предельные условия.

Изучение касается горнопромышленных компрессорных поршневых установок, с простым буферным резервуаром трубчатой формы. Выведенные соотношения позволяют определить изменение давления и скорости в зависимости от времени в разных точках трудопровода и обнаружить такие зоны, где возникает опасность резонанса. Выведенные соотношения могут быть использованы в проектных расчетах сетей сжатого воздуха с целью преодоления колебаний.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Д. К. 621.314.7 : 621.3.023 : 621.385

Д. Даскэлу

О поведении однополярного транзистора при высокй чаетоте с током, ограниченным пространственным зарядом

Расчет относится к транзистору, в котором ток образован из одного лишь типа носителей. Этот ток ограничен пространственным зарядом между передатчиком и электродом управления (полупроводник или металл). В работе представлена эквивалентная схема слабых сигналов, учитывающая: *а)* эффект времени прохождения, *б)* изменение подвижности в электрическом поле, *в)* улавливание носителей в дефектах структуры.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.C. 539.3/4.624.07:621.01

T. Pană

Effect of Concentrated Masses on the Free Vibrations of Thin Wall Bars with a Closed Cross Section

This paper determines computing relations for free flexion-torsion vibrations of thin wall bars, loaded with concentrated masses, for the special case of biaxial symmetrical cross section. These relattions are obtained by the initial parameter method. Thus, the relations take into consideration both the concentrated masses and the distributed mass of the bar.

For any position of the concentrated masses in the cross section, the flexure and torsion free vibrations appear coupled, even for the bar with a symmetrical biaxial cross-section. They are decouled when the centre of gravity of the masses is identical with the centre of gravity of the cross section.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.C. 621.51/54

I. N. Constantinescu, A. V. Darabont

Proper and Forced Oscillations in Compressed Air Ducts

This paper determines the relations which show proper and forced oscillations of pressure and speed for a compressed air current in a duct,, when the initial and border conditions are known.

The study refers, to the piston-compressor installations, of the mining industry, provided with a simple buffertank, of tubular form. The relations deduced permit the determination of pressure and speed variations, according to time, in various points of the duct and the tracing of the zones where danger of resonance appears. The relations deduced can be used in design computations of compressed air networks, in vew of oscillation control.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.C. 621.314.7 : 621.3.023.621.385

D. Dascălu

About the High-Frequency Operation of Unipolar Space Charge Limited Transistor

The calculations refer to the unipolar space charge limited transistor. The current is limited by the spatial charge between the emittor and the controlling electrode (semi-conductor or metal). The paper presents the equivalent scheme for small signals, taking into account ; a) the transit-time effect b) the mobility variation in the electric field c) the capture of carriers in traps.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Résumé

I. Gh. Şabac C.D. 531/532 : 517

Sur les mouvements planes des fluides parfaits compressibles.

En notant par u et v les componentes de la vitesse dans un mouvement plan permanent, on démontre que pour avoir

$$\mu = \lambda \frac{\delta \varphi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \frac{\delta \psi}{\delta x}$$

it est nécessaire et suffisant que θ, l'angle formé par le vecteur vitesse avec l'axe Ox soit une fonction harmonique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

I. M. Miu C.D. 517

Une généralisation de la formule moyenne de Pompei

Dans un de ses travaux, D. Pompei a établi une formule moyenne pour un intervalle bi-dimensionnel :

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

pour une fonction $f(x, y)$ continue dans cet intervalle. Dans cet article l'auteur généralise la formule moyenne de D. Pompei pour un domaine n-dimensionnel, utilisant des familles de fonction plus générales.

L'auteur effectue également des applications de la formule généralisée.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

E. Erfurth C.D. 517

L'emploi des transformations planes dans la géométrie constructive de l'espace à quatre dimensions

Prenant comme point de départ une correspondance entre les points de l'espace R et les points de deux séries comprises dans le plan de représentation, l'ensemble de ce couple de points constituant la soit-disante droite d'affinité, l'auteur, utilisant certains résultats de Dallmann, Roth, etc... montre comment peuvent être appliquées avec efficience quelques relations de la géométrie projective dans la géométrie constructive de l'espace R.

On construit de cette manière un hypercône.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

A. Tănăsescu C.D. 515

Sur certaines transformations dans l'épure affine.

On sait, généralement, que sur les épures affines étaient solutionées seulement problèmes concernant les plans ou les droites et les plans. Dans cet ouvrage ont été étudiées minutieusement, dans l'épure affine, les principales méthodes de transformation des éléments qui définissent cette épure.

Basé sur ces transformations, on y montre comment on peut élargir le domaine des applications pratiques immédiates par la solution de certaines catégories de problèmes sur ce type d'épure.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

Zusammenfassung

I. Gh. Şabac D.K. 531/532 : 517

Über die planen Bewegungen der perfekt zusammendrückbaren Flüssigkeiten.

Wenn man die Geschwindigkeitskomponenten die sich in einer ununterbrochenen planen Bewegung mit u und v bezeichnet, so wird bewiesen, dass es genügt um

$$\mu = \lambda \frac{\delta \varphi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial y}, \upsilon = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \frac{\delta \psi}{\delta x}$$

zu erhalten, dass der durch den Geschwindigkeitsvektor mit der Achse Ox geformte Winkel θ, eine harmonische Kunktion ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

I. M. Miu D.K. 517

Eine Verallgemeinerung der Mittelformel Pompei

In einer seiner Arbeiten hat D. Pompei eine Mittelformel für ein bidimensionales Intervall :

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

für eine ständige Funktion $f(x, y)$ in diesem Intervall bestimmt. Durch das Anwenden von allgemeineren Funktionsreihen verallgemeinert D. Pompei in dieser Arbeit die Mittelformel für ein dimensionales Bereich n.

Der Verfasser führt auch Anwendungen der verallgemeinerten Formel durch.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

E. Erfurth D.K. 517

Zur Anwendung ebener Transformationen in der konstruktiven Geometrie des vierdimensionalen Raumes.

Von einer Zuordnung zwischen dem Punkten des Raumes R und den Punkten von zwei in dem Darstellungsraum enthaltenen Reihen ausgehend, bildet die Gesamtheit dieser Punktepaare die sogenannte Affinitätsgerade. Unter Benützung einiger durch Dallmann, Roth, u. a... erhaltenen Ergebnissen, zeigt der Verfasser wie einige der Relationen der projektiven Geometrie in der konstruktiven Geometrie des Raumes R mit Erfolg angewendet werden können.

Auf diese Art wird ein Hyperkegel gebaut.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

A. Tănăsescu D.K. 515

Über einige Umwandlungen im affinen Riss.

Es ist bekannt, dass auf den affinen Rissen im allgemeinen nur die Inzidenzfragen betreffend die Ebenen und Geraden und Ebenen gelöst wurden. In dieser Arbeit werden in dem affinen Riss die Hauptmethoden zur Umwandlung der diesen Riß bestimmenden. Elemente ausführlich studiert.

Auf Grund dieser Umwandlungen wird gezeigt, wie der Bereich der sofortigen praktischen Anwendung durch die Lösung bestimmter Aufgabenklassen auf diesem Risstyp erweitert werden kann.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

C.D 542.952.6 : 66.095.2 : 678.5 : 678.7 : 546.543

C. Drăgulescu, O. Solomon, S. Zugrăvescu E. Beral

Le comportement des certains complexes de l'azoisobutironytrile avec les acides Lewis, lors de la scission thermique dans un milieu non aqueux.

La formation des complexes entre les acides Lewis et les molécules donneurs d'électrons est un problème d'intéret théorique et applicatif. Tenant compte que l'azoisobutironytrile est utilisé comme initiateur de réactions de polymérisation, on a poursuivi son comportement lors de la scission thermique dans les milieux non aqueux (dioxane, diméthylformamide, dimethylesulfoxide, carbonate d'éthylène) ainsi que de certains complexes synthétisése de l'azoisobutironytrile avec quelques uns des acides Lewis. Ainsi on a étudié la scission thermique du complexe formé entre l'azoisobutironytrile et le $SnCl_4$ dans un rapport 1 ::1. Dans le même but, on a également essayé la synthèse des complexes avec le $SbCl_5$ et avec le $TiCl_4$, travaillant avec même différents rapports moléculaires et dans des milieux différents.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

Th. Bădescu

C.D. 655.2/3 : 676.3 : 667.5

Contributions à l'établissement d'un critère d'appréciation objectif pour la corrélation papier — encre — machine, dans l'imprimerie polychrome.

L'ouvrage propose l'extension d'un nouveau moyen d'appréciation objective : „le contenu chromatique relatif", exprimé en unités de pourcentage, pour analyser les facteurs qui interagissent dans le processus de l'imprimerie polychrome.

La méthode peut fournir de réels avantages économiques, en facilitant les conditions de normalisation des processus technologiques d'imprimerie et conduisant à la possibilité d'offrir des recommandations aux industtries fournissant des matériaux polygraphique, dans le but d'en améliorer la qualité.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

L. Literat

C.D. 621.35:66.097.4:669.712

L'activité catalytique de certaines alumines réductrices non-stoechiometriques

La réaction de décomposition catalytique de l'acide formique a été-étudiée en régime dynamique sur des échantillons pulverulents d'alumine et d'alumine non-stoechiométtrique. La cinétique du processus catalytique a été poursuivie en même temps que les mesurages de la résistance électrique de la couche catalytique. Parallèlement on a fait des déterminations d'absorption spectrophotométriques infra-rouges pour le même système catalytique. On a évalué la sélectivité des deux catalyseurs et on a déterminé les paramètres cinétiques; pour les réactions de déshydratation et deshydrogénation. A partir des données expérimentales on discute le mécanisme de décomposition catalytique de l'HCOOH sur l'alumine non-stoechiométrique et on fait des précisions en ce qui concerne la nature des centres actifs de catalyse. On arrive à la conclusion que l'activité deshydrogénante de l'alumine non-stoéchiométrique est due aux atomes de Al interstitiels qui provoquent aussi la déviation de la stoéchiométrie pour les alumines noires réductrices.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.K. 542.952.6 : 66.095.2 : 678.5 : 678.7 : 546.543

C. Drăgulescu, O. Solomon, S. Zugrăvescu E. Beral

Das Verhalten bei thermischer Spalltung in nichtwässrigen Lösungen, einiger komplexen Verbindungen des Azo-isobuttersäurenitrils mit Lewis-Säuren.

Die Bildung komplexer Verbindungen des zwischen Lewis—Säuren und organischen Elektronen abgebenden Molekülen, ist ein, von theoretischem und praktischem Standpunkt aus interessantes Problem.

Da Azo-isobuttersäurenitril als Initiator der Polymerisationsreaktionen dient, wurde sein Verhalten bei thermischer Zersetzung in nichtwässrigen Lösungen (Dioxan N. N—Dimethylformamid, Dimethylsulfoxid Glykolcarbonat) untersucht, wie auch das Verhalten einiger komplexen Verbindungen des Azo-isobuttirsäurenitrils mit verschiedenen Lewis—Säuren verfolgt. So studierte man die thermische Spaltung des Azo-isobuttersäurenitrilkomplexes mit $SnCl_4$. Zu demselben Zweck versuchte man auch die Synthesen der $SbCl_5$ — und $TiCl_4$—Komplexe, indem man mit verschiedenen Molproportionen und Lösungsmitteln arbeitete.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

Th. Bădescu D.K. 655.2/.3 ; 676.3 ; 667.5

Beiträge zur Bestimmung eines objektiven Schätzungs-Kriteriums der Wechselbeziehung Papier — Tinte — Maschine in der polychromen Druckerei

Die Arbei schlägt vor die Verbreitung eines neuartigen Mittels zur objektiven Schätzung: ‚der relative chromatische Inhalt" in Prozentsätzen ausgedrückt, für die Analyse der Faktoren die während des Vorganges des polychromen Aufdrucks gegenseitig wirken.

Die Methode kann bedeutende wirtschaftliche Vorteile schaffen und die Verwirklichung der Normalisierungsbedingungen der technologischen Aufdrucksvorgänge erleichtern, indem sie die Möglichkeit gibt den Industrien, die polygraphische Materialen liefern. Empfehlungen zur Verbesserung der Qualität derselben zu machen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

L. Literat D.K. 621.25 ; 66.097.4 ; 669.712

Die katalytische Tätigkeit einiger nicht stoekiometrischen Reduktionstonerden

Die katalytische Zersetzungsreaktion der Ameisensäure wurde im dynamischen Betrieb auf pulverisierten Mustern aus Tonerde und aus nichtstoekiometrischen Tonerde studiert. Die Kinetik des katalytischen Vorgangs wurde gleichzeitig mit den Messungen des elektrischen Widerstands der katalytischen Schicht verfolgt. Gleichlaufend wurden die spektophotometrischen Absorbtionsbestimmungen in Infrarot für das gleiche katalytische System durchgeführt. Es wurde die Selektivität der zwei Katalysatoren geschätzt und die kinetischen Parameter für die Entwässerungs- und Enthydrierungsreaktionen bestimmt. Auf Grund der Versuchsdaten wird der Mechanismus der katalytischen Zersetzung des HCOOH auf Tonerde und nichtstoekiometrische Tonerde besprochen und genaue Angaben betreffend die Natur der aktiven Katalysationszentren gemacht. Man gelangt zu der Schlussfolgerung, dass die enthydrierende Tätigkeit der nichtstoekiometrischen Tonerde den interstiziellen Al-Atomen, die auch die Abweichungen von der Stoekiometrie bei den schwarzen Reduziertonerden hervorruft, zu verdanken ist.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

I. Teoreanu C.D. 546.284 : 661.8...65 ; 666.9 ; 691.5

Sur le mécanisme du processus de durcissement du silicate tricalcique et du β silicate bicalcique

Sur la base des données expérimentales existant dans la littérature et sur celle des résultats obtenus par l'auteur en ce qui concerne la cinétique du processus de durcissement des liants minéraux on y donne des précisions concernant le mécanisme du durcissement du silicate tricalcique et du β-silicate bicalcique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

I. S. Antoniu, A. Adămuţ
C.D. 621.3.015 ; 621.372.5 : 621.315 : 621.3.09

Un nouveau critérium pour la détermination de la précision de la simulation sur une chaîne de quadripôles de la propagation d'une onde sur une ligne électrtique longue

En partant des recherches faites à l'aide d'un calculateur électronique analogique les auteurs donnent un nouveau critérium pour l'appréciation de la précision avec laquelle on peut simuler une ligne électrique longue avec une chaîne de quadripôles ; c'est le critérium de la tension variable au temps constant.

Les auteurs donnent ensuite des relations analytiques entre l'écart de la tension et le nombre de quadripôles de le chaîne du modèle.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

P. Dimo C.D. 621.375:518.5:681.14

Calcul des amplificateurs opérationnels du calculateur analogique didactique

On présente les critériums et la méthode pour le calcul statique et dynamique, ainsi que les résultats obtenus. Ceux-ci se revèlent être en bonne concordance avec les calculs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

A. Petre C.D. 539.4 : 533 : 531.1

La vibration du type „galopade des lignes électriques" pour des fils de masse continue

On détermine l'équation à dérivées ; partielles des fils, en considérant le propre poids, les forces aérodynamiques produites par un dépôt de glace, ainsi que les frottements internes.

L'équation est intégrée et on établit la propre fréquence, ainsi que la vitesse critique depuis laquelle commence à se produire le phénomène de la galopade, en fonction des caractéristiques aérodynamiques, des frottements internes et des dimensions du fil.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

V. Drobotă C.D. 539.4:620.173:624.04:624.023.9

Une méthode générale pour la calcul de la charge critique de flambages des poutres oscillantes continues sous charges transversales.

Dans l'article on décrit une méthode générale de calcul de la charge critique de flambage des poutres continues oscillants chargées avec des charges concentrées ou uniformément réparties.

La méthode de calcul est facile à utiliser, expéditive. et mène à des relations de calcul simples, tant pour les cas généraux que pour les cas particuliers d'intérêt pratique auxquels elle s'applique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

I. Teoreanu D.K. 546.284 : 661.8...65 : 666.9 : 691.5

Uber den Mechanismus des Erhärtungsprozesses von Trikalziumsilikat und β Bikalziumsilikat

Auf Grund der in Fachaufsätzen gefundenen Versuchsdaten und der vom Verfasser erhaltenen Ergebnisse in Bezug auf die Kinetik des Erhärtungsprozesses von Bindemitteln mineralogischen Ursprungs, werden Bestimmungen gemacht bezüglich der Erhärtungsmechanismen von Trikalziumsilikat und β Bikalziumsilikat.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

I. S. Antoniu, A. Adămuț D.K. 621.3.015 : 621.372.5 : 621.315 : 621.3.09

Ein neues Kriterium für die Bestimmung der Präzision der Modellierung mit einer vierpoligen Kette zur Leitung einer Welle auf eine lange elektrische Linie

Ausgehend von den mit Hilfe eines analogischen elektronischen Kalkulators getätigten Untersuchungen, wird von den Autoren ein neues Kriterium für die Bestimmung der Genauigkeit mit welcher eine lange elektrische Linie mit einer vierpoligen Kette modeliert werden kann gegeben: es ist das Kriterium der Wechselspannung bei konstantem Tempo.

Die Autoren geben ferner analytische Daten betreffend Ableitung der Spannung und Anzahl der Vierpole der Modellkette.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

P. Dimo D.K. 621.375:518.5:681.14

Projektion der eingreifenden Verstärker des didaktischen Analogrechners

Es werden die Projektionskriterien, die statischen und dynamischen Projektionsmethoden, sowie die erzielten Ergebnisse vorgelegt. Diese stehen in entsprechender Übereinstimmung mit den Berechnungen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

A. Petre D.K. 539.4 : 533.531.1

Flatterung vom Typ der „Galoppierungen der elektrischen Leitungen" für Drähte aus kontinuierlicher Masse

Es wird die Gleichung mit teilweiser Ableitung der Drähte unter Berücksichtigung des Eigengewichts, der aerodynamischen Kräfte als Folge einer Eisablagerung, sowie der Innenreibungen bestimmt.

Die Gleichung wird integriert und es wird die Eigenfrequenz, sowie die kritische Geschwindigkeit bei der das Galoppierungsphänomen in Anhängigkeit von der aerodynamischen Charakteristik den Innenreibungen und den Drahtmass, bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

V. Drobotă D.K. 539.4:620.173:624.04:624.023.9

Eine allgemeine Methode zur Berechnung der kritischen Knikkungsbelastung bei den kontinuierlichen Pendelbalken unter Querbelastungen

In dem Artikel wird eine allgemeine Berechnungsmethode der britischen Knickungsbelastung bei den kontinuierlichen Stäben, asymmetrisch, oder symmetrisch belastet und konzentriert, oder gleichmässig verteilt angegeben.

Die Berechnungsmethode kann leicht angewendet werden, ist rapid und ergibt einfache Berechnungsbeziehungen, sowohl für die allgemeinen Fälle, als auch für die besonderen Fälle von praktischem Interesse in denen sie angewendet wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

C.D. 539.3/4 624.07:621.01

T. Pană

Effet des masses concentrées sur les vibrations libres des barres à parois minces et à profil fermé

Dans cet article on établit les relations de calcul des amplitudes des vibrations libres de flexion-torsion pour les barres à parois minces pourvues des masses concentrées, dans le cas particulier des sections biaxialement symétriques. Ces relations sont obtenues par la méthode des paramètres initiaux, considérant comme forces extérieures pulsatoires non massiques, les efforts qui apparaissent en section comme résultat des forces d'inertie actionnant sur les masses concentrées. De cette manière les relations tiennent compte autant des masses concentrées que de la masse distribuée de la barre.

Pour une position quelconque des masses concentrées en section, les vibrations libres de flexion et de torsion apparaissent accouplées à la barre même à section transversale biaxiale symetrique. Elles se découplent lorsque le centre de gravité des masses se confond avec le centre de gravité de la section transversale.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

C.D. 621.51/54

I. N. Constantinescu, A. V. Darabont

Oscillations propres et forces dans les conduites d'air comprimé

Dans cet ouvrage on détermine les relations qui expriment les oscillations propres et forcées de la pression et de la vitesse du courant d'air comprimé dans une conduite, lorsqu'on connaît les conditons initiales et de limité.

L'étude se réfère aux installations de compresseurs à piston de l'industrie minière munis d'un réservoir tampon simple de forme tubulaire. Les relations déduites permettent la détermination de la variation de la pression et de la vitesse en fonction du temps, à différents points de la conduite et de dépister les zones où apparaît le péril de résonnance. Les relations déduites peuvent être utilisées dans les calculs de projection des réseaux d'air comprimé, en vue de combattre les oscillations.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

C.D. 621.314.7 ; 621.3.023 ; 621.385

D. Dascălu

Sur le comportement à haute fréquence du transistor unipolaire à courant limité par charge spatiale

Les calculs concernant le transistor dont le courant est formé d'un seul type de porteurs. Ce courant est limité par la charge spatiale entre l'émetteur et l'électrode le schéma équivalent pour de petits signaux, qui tient compte de; a) l'effet du temps de passage, b) la variation de la mobilité dans le champ électrique, c) la capture des porteurs dans de défauts de structure.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

D.K. 539.3/4:624.07:621.01

T. Pană

Der Effekt der konzentrierten Massen auf die freien Schwingungen der Stäbe mit dünnen Wänden und geschlossenem Profil

In der Arbeit werden die Berechnungsbeziehungen der Amplitude der freien Biegungs- und Verdrehungsschwingungen im besonderen Fall der biaxialsymmetrischen Schnitte für die dünnwandigen, mit konzentrierten Massen vorgesehenen Stangen bestimmt. Diese Beziehungen werden durch die Methode der Initialparameter erhalten, wobei die im Schnitt als Ergebnis der Trägheitskraft, welche auf die konzentrierten Massen wirkt, auftretenden Kräfte als schwingende Nichtmassenkräfte betrachtet werden. In dieser Weise berücksichtigen die Beziehungen sowohl die konzentrierten Massen, als auch die der Stange zugeteilte Masse.

In einer beliebigen Stellung der in dem Schnitt konzentrierten Massen, erscheinen die freien Biegungs- und Verdrehungsschwingungen sogar bei der Stange mit axial-symmetrischen Querschnitt gekoppelt. Sie entkuppeln sich nur wenn sich der Massenschwerpunkt mit dem Querschnittsschwerpunkt deckt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.K. 621.51/54

I. N. Constantinescu, A. V. Darabont

Eigene und erzwungene Schwingungen in den Druckluftleitungen

In der Arbeit werden die Verhältnisse bestimmt, die die eigenen und erzwungenen Schwingungen des Drucks und der Geschwindigkeit der Druckluft in den Leitungen ausdrücken, wenn die Ausgang- und Grenzbedingungen bekannt sind.

Das Studium bezieht sich auf die Kolbenkompressoranlagen aus der Bergbauindustrie, die mit rohrförmigen einfachen Pufferbehälter ausgestattet sind. Die gefolgerten Verhältnisse gestatten die Bestimmung des von der Zeit abhängenden Druck- und Geschwindigkeitswechsels an den verschiedenen Stellen der Leitungen und die Feststellung der Zonen in denen die Resonanzgefahr besteht. Die gefolgerten Verhältnisse können in den Projektionsberechnungen der Druckluftnetze zur Bekämpfung der Schwingungen angewendet werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 3/1967

D.K. 621.314.7 : 621.3.023 : 621.385

D. Dascălu

Über das Verhalten des einpoligen Transistors mit durch die Raumbelastung begrenzten Strom, bei Hochfrequenz

Die Berechnungen beziehen sich auf den Transistor, in dem der Strom durch einen einzigen Trägertyp geformt wird. Dieser Strom ist durch die Raumbelastung zwischen dem Sender und der Steuerungselektrode (Halbleiter oder Metall) begrenzt. In der Arbeit wird das gleichwertige Schema für die kleinen Signale vorgestellt, das: a) dem Effekt der Übergangszeit; b) dem Beweglichkeitswechsel im elektrischen Feld; c) Auffangen der Träger in Strukturfehler Rechnung trägt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX Nr. 3/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

MATEMATICĂ

C.Z. 531/532:517

ASUPRA MIȘCĂRILOR PLANE ALE FLUIDELOR PERFECTE COMPRESIBILE *

ION GH. ȘABAC

1°. Cîmpul vitezelor într-o mișcare plană depinde, în general, de două funcții arbitrare. Acestea pot fi : sau componentele $u(x, y)$, $v(x, y)$ ale vitezei $\overline{V}$, sau modulul vitezei și unghiul pe care aceasta îl formează cu axa Ox, sau două funcții λ și U astfel ca $\overline{V} = \lambda$ grad U.

Dacă se impune cîmpului de viteze una din condițiile

$$\text{rot } \overline{V} = \overline{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{div } \overline{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

atunci una din funcțiile u și v se exprimă cu ajutorul celeilalte și cu o funcție arbitrară numai de x sau numai de y iar cînd se dau amîndouă, cîmpul vitezelor se poate exprima numai cu ajutorul unei funcții scalare : potențialul φ al vitezelor sau funcția de curent ψ,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

Funcțiile φ și ψ pot fi luate drept componentele unei funcții olomorfe de variabila complexă $z = x + iy$,

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Derivata sa este viteza complexă a fluidului,

$$w = \frac{df}{dz} = u - iv,$$

iar $f(z)$ potențialul complex al mișcării. Astfel, în condițiile (1), o problemă de mecanica fluidelor se poate trata fie folosind teoria funcțiilor armonice, fie proprietățile funcțiilor olomorfe.

* Manuscris predat la redacție la 10 ianuarie 1967.

2°. Să considerăm o mişcare plană oarecare, permanentă. Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de curent şi ale traiectoriilor lor ortogonale sînt, respectiv,

$$udy - vdx = 0 \tag{3}$$

$$udx + vdy = 0. \tag{4}$$

În cazul cînd condiţiile (1) sînt îndeplinite, expresiile din membrul stîng sînt diferenţiale exacte

$$udx + vdy = d\varphi, \quad udy - vdx = d\psi;$$

ψ = const. reprezintă liniile de curent iar φ = const. traiectoriile lor ortogonale, respectiv liniile echipotenţiale.

Dacă nu sînt îndeplinite condiţiile (1), există doi factori integranţi $\frac{1}{\lambda}$ şi $\frac{1}{\mu}$ astfel ca

$$\begin{aligned} udx + vdy &= \lambda d\varphi \\ udy - vdx &= \mu d\psi \end{aligned} \tag{5}$$

Componentele vitezei vor avea expresiile

$$\begin{aligned} u &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru ca şi în acest caz funcţia $f = \varphi + i\psi$ să fie olomorfă în domeniul considerat, este necesar şi suficient ca cei doi factori integranţi să fie egali. Cu alte cuvinte, ecuaţiile cu derivate parţiale pe care le satisfac aceste două funcţii

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{\lambda}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{\mu}\right) = 0$$

vor trebui să admită o soluţie comună. Aceste ecuaţii se mai pot scrie

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\lambda}\left(v\frac{\partial \lambda}{\partial x} - u\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{\mu}\left(u\frac{\partial \mu}{\partial x} + v\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = 0$$

sau încă, notînd

$$L = ln\lambda, \quad M = ln\mu, \tag{7}$$

vom avea

$$v\frac{\partial L}{\partial x}-u\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\equiv\bar{k}\,\mathrm{rot}\,\bar{V}$$
$$u\frac{\partial M}{\partial x}+v\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\equiv\mathrm{div}\,\bar{V}. \tag{8}$$

Se observă ușor că, în condițiile (1), singura soluție comună a ecuațiilor (8) est $L=M=\text{const.}$ și se obțin expresiile (2). Reciproc, această soluție comună există numai în condițiile (1).

Vom cerceta dacă ecuațiile (8) mai admit și alte soluții comune. Vom arăta că, pentru aceasta, este necesar și suficient ca θ, unghiul format de viteză cu axa Ox, să fie o funcție armonică.

Într-adevăr, dacă $L\equiv M$, din (8) rezultă

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{u^2+v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}ln\,(u^2+v^2)+\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{v\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{u^2+v^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}ln\,(u^2+v^2)-\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}$$

sau, punînd $V=\sqrt{u^2+v^2}$ și $\theta=\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u}$,

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}ln\,V+\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}ln\,V-\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{9}$$

În ipoteza că $ln\,V$, θ și L admit derivate de ordinul al doilea continue în domeniul considerat, prin eliminarea lui L între aceste două ecuații se obține

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0, \tag{10}$$

adică θ este o funcție armonică.

Condiția (10) este și suficientă. Cu V și θ construim expresia diferențială

$$d\,(ln\,V)+\frac{\partial\theta}{\partial y}dx-\frac{\partial\theta}{\partial x}dy$$

care este diferențiala totală a unei funcții $L_1\,(x,y)$, dacă este îndeplinită condiția (10). Derivatele sale parțiale $\frac{\partial L_1}{\partial x}$, $\frac{\partial L_2}{\partial y}$ au chiar expresiile (9) și acestea satisfac ambele ecuații cu derivate parțiale (8).

Deci, dacă θ este o funcție armonică, funcțiile φ și ψ satisfac condițiile lui Cauchy-Riemann și funcția $f(z)=\varphi+\psi i$ este olomorfă în domeniul

considerat. Problema determinării cîmpului de viteze revine la a afla funcţiile φ, ψ şi λ. Primele două se determină folosind condiţiile la limită. Funcţia λ sau $L = ln\ \lambda$ împreună cu masa specifică ρ şi presiunea p, vor fi date de ecuaţia continuităţii în mişcare permanentă

$$\text{div}\ (\rho \overline{V}) = 0, \tag{11}$$

ecuaţia caracteristică

$$\rho = \rho\ (p) \tag{12}$$

şi ecuaţiile de mişcare în absenţa forţelor exterioare

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ecuaţia (11) se mai scrie

$$\rho\ \text{div}\ \overline{V} + \overline{V}\ \text{grad}\ \rho = 0$$

sau, notînd $R = ln\rho$, avem

$$\overline{V}\ \text{grad}\ R = -\text{div}\ \overline{V},$$

Din compararea acesteia cu a doua ecuaţie (8), în care s-a înlocuit M cu L, rezultă

$$\overline{V}\ \text{grad}\ (L + R) = 0$$

sau încă

$$\overline{V}\ \text{grad}\ ln\ (\lambda\rho) = 0$$

Gradientul funcţiei $ln(\lambda\rho)$ este normal în fiecare punct cîmpului de viteze. Liniile $\lambda\rho$ = const. coincid cu liniile de curent ψ = const, deci $\lambda\rho$ este funcţie numai de ψ.

Dacă se presupune, mai departe, că mişcarea este irotaţională, rezultă în mod analog că λ este funcţie numai de φ.

Din (12) şi (13), pentru mişcări irotaţionale, rezultă ecuaţia lui Bernoulli

$$dp = -\frac{1}{2}\rho d(V^2).$$

Ţinînd seama de aceste observaţii se poate continua studiul considerînd ca variabile independente funcţiile φ şi ψ.

Ecuaţiile (9) sugerează şi o altă cale. Vom pune aici

$$V = e^{\tau}, \quad \sigma = \tau - L = ln\frac{V}{\lambda} \tag{14}$$

şi acestea devin

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\partial\sigma}{\partial x}. \tag{15}$$

Rezultă că $H(y)=\theta+i\sigma$ este o funcție olomorfă de variabila $z=x+iy$. Problema s-a redus la determinarea funcției armonice θ cu condiții la limită date și apoi se determină V și λ.

3°. Să presupunem că mișcarea este irotațională. Din ecuația lui Bernoulli, ținînd seamă de (12), se obține

$$\varrho=\varrho_0 f(V^2)$$

care împreună cu ecuația continuității (11), în care am pus în prealabil

$$u=V\cos\theta, \quad v=V\sin\theta \tag{16}$$

ne conduce la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul I liniară, din care vom determina pe V.

Astfel, pentru o mișcare izotermă,

$$\varrho=\varrho_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V}{c_0}\right)^2} \tag{17}$$

ϱ_0 fiind masa specifică în punctul de viteză nulă, c_0 viteza sunetului în același punct, iar pentru o mișcare adiabatică,

$$\varrho=\varrho_0\left[1-\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{V}{c_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad \gamma\approx 1{,}4 \text{ pentru aer.} \tag{18}$$

Ecuația continuității

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}=0,$$

cu substituțiile (16) și notațiile (14) devine

$$\cos\theta\frac{\partial\tau}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial\tau}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}ln\,\varrho+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}ln\,\varrho=\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}. \tag{19}$$

Pentru mișcările adiabatice, din (18) rezultă

$$ln\,\varrho=ln\,\varrho_0+\frac{1}{\gamma-1}ln\left(1-\frac{\gamma-1}{2c_0^2}c^{2\tau}\right).$$

Derivînd și înlocuind în (19), aceasta devine

$$\cos\theta\frac{\partial\tau}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial\tau}{\partial y}=\left(\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}-\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)\frac{(\gamma-1)e^{2\tau}-2c_0^2}{(\gamma+1)e^{2\tau}\quad 2c_0^2} \tag{20}$$

Dacă θ este cunoscut, determinarea lui τ, deci și a lui V, se face integrînd această ecuație cu derivate parțiale de ordinul I liniară.

4°. Ca aplicație, să determinăm cîmpul vitezelor pentru o sursă punctuală situată în origină, mișcare considerată de mai mulți autori, [1]—[5]. Liniile de curent sînt semidrepte ce pornesc din origină astfel că

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Se verifică uşor că $\Delta\theta = 0$. Pentru a determina funcţia τ, înlocuim

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Ecuaţia (20) devine

$$x\frac{\partial\tau}{\partial x} + y\frac{\partial\tau}{\partial y} + \frac{(\gamma-1)e^{2\tau} - 2c_0^2}{(\gamma+1)e^{2\tau} - 2c_0^2} = 0. \tag{21}$$

Sistemul caracteristicilor

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{(\gamma+1)e^{2\tau} - 2c_0^2}{(\gamma-1)e^{2\tau} - 2c_0^2}d\tau$$

se integrează imediat

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \ln\frac{y}{C_2} = -\int\frac{(\gamma+1)e^{2\tau} - 2c_0^2}{(\gamma-1)e^{2\tau} - 2c_0^2}d\tau.$$

Efectuînd calculele se obţine

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad ye^{\tau}\left(1 - \frac{\gamma-1}{2c_0^2}e^{2\tau}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = C_2$$

sau, ţinînd seama de (18),

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad yV\varrho = C_2\varrho_0 \tag{22}$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante arbitrare.

Integrala generală a ecuaţiei (21) va fi

$$yV\varrho = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

unde F este o funcţie arbitrară. Determinarea acestei funcţii se face uşor, punînd condiţia, evidentă din motive de simetrie, ca V să ia aceeaşi valoare V_1 pe un cerc de rază r_1 cu centrul în origine. Din (18), rezultă că şi ϱ va lua o valoare constantă ϱ_1 pe acest cerc. Avem deci, pentru $x^2+y^2 = r_1^2$,

$$y = C_2\frac{\varrho_0}{V_1\varrho_1}, \quad x = \frac{C_2}{C_1}\frac{\varrho_0}{V_1\varrho_1}$$

Rezultă

$$C_2^2 + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^2 = \left(\frac{V_1\varrho_1 r_1}{\varrho_0}\right)^2 \tag{23}$$

Eliminarea constantelor C_1 și C_2 între (22) și (23) va da

$$(x^2+y^2)V^2\varrho^2 = V_1^2\varrho_1^2 r_1^2 \tag{24}$$

Pe cercul $x^2 + y^2 = r^2$, avem

$$V\varrho r = V_1\varrho_1 r_1 = \frac{Q}{2\pi},$$

debitul prin orice cerc cu centrul în origine este același. Cu acestea

$$V\varrho = \frac{Q}{2\pi r} \tag{25}$$

Evident că acest rezultat se putea obține și direct din ecuația continuității.

Expresia vitezei se obține din (25) ținînd seama de (18)

$$\varrho_0 V\left[1-\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{V}{c_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{Q}{2\pi r}.$$

Catedra de matematici
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Taylor, G. I.*, Zeitschrift für angew. Math. und Mech., t. 10, 1930, p. 334.
2. *Cisotti, U.*, Atti del 1° Congresso dell'Unione Mat. Italiana, 1937, p. 537—545.
3. *Demtchenko, B.*, Publications scient. et techn. du Min. de l'Air, Paris, nr. 144, 1939, p. 12.
4. *Iacob, C.*, Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sciences, t. 42, fasc. 1, 1940, p. 19—31.
5. *Ringleb, F.*, Zeitschrift für angew. Math. und Mech., t. 20, 1940, p. 185—198.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z.: 517

O GENERALIZARE A FORMULEI MEDIEI A LUI POMPEIU *

I. M. MIU

În [1] D. Pompeiu a stabilit pentru integrala dublă într-un interval bidemensional următoarea:

Teoremă de medie. Fie $f(x, y)$ o funcție continuă pe intervalul R: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ și fie $F_{\lambda\mu}(\varphi)$ familia constantelor hiperbolice definite de relația:

$$\varphi(x, y) = f(x, \mu) + f(\lambda, y) - f(\lambda, \mu)$$

unde (λ, μ) este un punct în intervalul R.

Există cel puțin o funcție $\varphi_0(x, y) = f(x, \mu_0) - f(\lambda_0, y) - f(\lambda_0, \mu_0)$ a familiei precedente, astfel încît să avem:

$$\iint_R f(P)\, dP = \iint_R \varphi_0(x, y)\, dx\, dy.$$

În cele ce urmează ne propunem să generalizăm această formulă pentru o integrală multiplă într-un interval n dimensional, apoi să facem diferite aplicații ale formulei găsite.

§ 1. Generalizarea formulei mediei a lui Pompeiu.

Fie $f(x_1, x_2 \dots x_n)$ o funcție continuă pe intervalul

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Considerăm funcția:

$$\varphi(x_1, x_2 \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) =$$

$$= \sum f(x_1, x_2, \dots x_{i-1}, \lambda_i, x_{i+1} \dots x_n)\, g_i(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots \lambda_n) +$$

$$+ \sum f(x_i \dots x_{i-1}, \lambda_i, x_{i+1} \dots x_{j-1}, \lambda_j, x_{j+1} \dots x_n)\, g_{ij}(\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \dots$$

$$\dots \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1} \dots \lambda_n) + \dots + \sum f(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{j-1}, x_j, \lambda_{j+1} \dots \lambda_n)\, g_{1, 2 \dots j-1, j+1, \dots n}(\lambda_j) +$$

$$+ \alpha_0 f(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n) \qquad (1)$$

* Manuscris predat la redacție la 10 ianuarie 1966.

unde sumele Σ se referă la toate combinările care se pot face în funcția f astfel: întîi se înlocuiește în f fiecare variabilă x_i cu λ_i apoi se înlocuiește în f cîte două variabile x_i, x_j respectiv cu λ_i, λ_j și se fac astfel toate combinările, apoi se înlocuiesc în f cîte trei variabile x_i, x_j, x_l respectiv cu $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_l$ și se fac astfel toate combinările etc.

Fiecare funcție astfel obținută se multiplică cu o funcție $g(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ și pentru fiecare variabilă x_i din f înlocuită cu λ_i se suprimă λ_i în funcțiile g.

Toate funcțiile g sînt continue pe același interval D în raport cu variabilele $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, iar α_0 este o constantă.

Rezultă că funcția

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \int\int \dots \int_D \varphi(x_1, x_2 \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n \qquad (2)$$

este continuă în raport cu variabilele $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ pe intervalul D. Punem:

$$A = \int\int \dots \int_D f(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \qquad (3)$$

Să calculăm integrala:

$$I = \int\int \dots \int_D [\psi(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n) - A]\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n. \qquad (4)$$

Se vede că în 4) pentru un termen oarecare al funcției φ avem de ex:

$$\int\int \dots \int_D d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \int\int \dots \int_D f(x_1 \dots x_{i-1}, \lambda_i, x_{i+1} \dots x_n)\, g_i(\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \dots \lambda_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \int\int \dots \int_D f(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n \int\int \dots \int_D g_i(\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \dots \lambda_n)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n = A\alpha_i$$

Se obține:

$$I = (\Sigma\alpha_i + \Sigma\alpha_{ij} + \Sigma\alpha_{ijl} + \dots + \Sigma\alpha_{1,2\dots j-1, j+1\dots n} + \alpha_{1,2\dots n} - v)A, \qquad (5)$$

unde am notat:

$$\alpha_i = \int\int \dots \int_D g_i(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \dots \lambda_n)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n$$

$$\alpha_{ij} = \int\int \dots \int_D g_{ij}(\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \dots \lambda_{j-1} \lambda_{j+1} \dots \lambda_n)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n$$

. . . . . .

$$\alpha_{1,2,\dots j-1,\, j+1\dots n} = \int\int \dots \int_D g_{1,2\dots j-1,\, j+1\dots n}(\lambda_j)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n$$

$$\alpha_{1,2\dots n} = \alpha_0 v \;,\quad \alpha_0 = \text{const.} \;,\quad v = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Condiționăm funcțiile g, astfel încît suma din paranteza membrului II din (5) să fie nulă:

$$\Sigma\alpha_i + \Sigma\alpha_{ij} + \Sigma\alpha_{ijl} + \dots + \Sigma\alpha_{1,2\dots j-1, j+1\dots n} + \alpha_{1,2\dots n} - v = 0. \qquad (6)$$

În acest caz valoarea integralei I din (4) este nulă și cum funcția $\psi(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) - A$, de sub semnul integrală din (4) este continuă pe intervalul D, rezultă că ea se va anula cel puțin într-un punct $P_0(\lambda_1^0, \lambda_2^0 \dots \lambda_n^0)$ al intervalului D.

Deci :

$$A = \psi(\lambda_1^0, \lambda_2^0 \dots \lambda_n^0) = \int\int \dots \int_D \varphi(x_1, x_2 \dots x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0 \dots \lambda_n^0)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \quad (7)$$

Ținînd cont de valoarea lui ψ din (2) și de valoarea lui φ din (1) rezultă următoarea :

Teoremă de medie : Fiind date funcțiile $f(x_1, x_2 \dots x_n)$, g_i, $g_{ij} \dots g_{1,2\dots j-1, j+1\dots n}$ continue pe intervalul $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, astfel încît relația de condiție (6) să fie satisfăcută, rezultă că există cel puțin un punct $P_0(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots \lambda_n^0)$ astfel încît avem formula de medie :

$$\int\int \dots \int_D f(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \int\int \dots \int_D [f(x_1 \dots x_{i-1}, \lambda_i^0, x_{i+1}, \dots x_n)\, g_i(\lambda_1^0 \dots \lambda_{i-1}^0, \lambda_{i+1}^0 \dots \lambda_n^0) +$$

$$\Sigma f(x_1 \dots x_{i-1} \lambda_i^0 x_{i+1} \dots x_{j-1}, \lambda_j^0, x_{j+1} \dots x_n)\, g_{ij}(\lambda_1^0 \dots \lambda_{i-1}^0, \lambda_{i+1}^0 \dots \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1} \dots \lambda_n) + \dots$$

$$\dots + \Sigma f(\lambda_1^0, \lambda_2^0 \dots \lambda_{j-1}^0, x_j, \lambda_{j+1}^0 \dots \lambda_n^0)\, g_{1,2\dots j-1,\, j+1\dots n}(\lambda_j^0) +$$

$$+ a_0 f(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots \lambda_n^0)]\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \quad (8)$$

Această formulă generalizează formula medie a lui Pompeiu.

§ 2. **Aplicațiile formulei medii generalizate**

a) Cazul cînd funcțiile g sînt constante.

$g_i = a_i$, $g_{ij} = a_{ij}$, $\dots g_{1,2\dots j-1, j+1\dots n} = a_{1,2\dots j-1, j+1\dots n}$, $\alpha_0 = a_0$.

În acest caz un termen oarecare în (4) devine :

$$a_i \int\int \dots \int_D d\lambda_1\, d\lambda_2 \dots d\lambda_n \int\int \dots \int_D f(x_1 \dots x_{i-1}, \lambda_i, x_{i+1} \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n = A v\, a_i$$

Relația de condiție (6) în acest caz devine :

$$\Sigma a_i + \Sigma a_{ij} + \Sigma a_{ijl} + \dots + \Sigma a_{1,2\dots j-1, j+1\dots n} + a_0 - 1 = 0 \quad (6')$$

Dacă între constantele a avem relația (6'), atunci în intervalul D există cel puțin un punct $P_0(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots \lambda_n^0)$ astfel încît avem formula mediei :

$$\int\int \dots \int_D f(P)\, dP = \int\int \dots \int_D [\Sigma \alpha_i f(x_1 \dots x_{i-1}, \lambda_i^0, x_{i+1}, \dots x_n) +$$

$$\Sigma a_{ij} f(x_1 \dots x_{i-1} \lambda_i^0, x_{i+1} \dots x_{j-1}, \lambda_j^0 x_{j+1} \dots x_n) + \dots$$

$$\dots + \Sigma a_{1,2\dots j-1, j+1\dots n} f(\lambda_1^0 \dots \lambda_{j-1}^0, x_j, \lambda_{j+1}^0 \dots \lambda_n^0 +$$

$$+ a_0]\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \quad (9)$$

Deși esențial formula (8) nu diferă de formula (9), am tratat întîi problema considerînd funcțiile g, spre a pune în evidență o funcție $\varphi_0(x_1, x_2 \dots x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0 \dots \lambda_n^0)$ a familiei de funcții (1).

b) Cazul integralei duble.

Considerăm o funcție $f(x, y)$ continuă pe intervalul $D = [a, b] \times [c, d]$. Punem:

$$\varphi(x, y, \lambda, \mu) = a_1 f(x, \mu) + a_2 f(\lambda, y) + a_3 f(\lambda, \mu) \tag{10}$$

Punem:

$$a_3 = 1 - a_1 - a_2$$

în acest caz condiția (6') este satisfăcută.

Rezultă că există cel puțin un punct $P_0(\lambda_0, \mu_0) \in D$, astfel încît să avem

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_D [a_1 f(x, \mu_0) + a_2 f(\lambda^0 y) + (1 - a_1 - a_2) f(\lambda_0, \mu_0)]\, dx\, dy$$

Pentru $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ se obține formula medie a lui Pompeiu.

Catedra de matematici
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Pompeiu D.* Généralisation du théorème de la moyenne. Bulletin de scriènces mathématiques. Tome 58, 1934, première partie, pag. 80—89.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

GEOMETRIE

C.Z. 517

ZUR ANWENDUNG EBENER TRANSFORMATIONEN IN DER KONSTRUKTIVEN GEOMETRIE DES VIERDIMENSIONALEN RAUMES *

Dr. HORST ERFURTH

Technische Hochschule für Chemie
Leuna Merseburg

1. Die Entwicklung der mehrdimensionalen Geometrie war eng verbunden mit dem Wunsch der konstruktiven Behandlung. Unter den verschiedenen Modellen fand das von Eckhart [1] ausführlich behandelte Modell besondere Beachtung. Dabei wird der R_n (aufgefaßt als Punktraum) auf geordnete Punktgruppen einer Bildebene π abgebildet. So lassen sich z.B. die Punkte des R_4 linear und im allgemeinen auch eindeutig auf die ∞^4 geordneten Punktepaare von π abbilden.

Ein solches Modlel wurde in den letzten 10 Jahren von Dallmann [2] und einigen Mitarbeitern eingehend weiter untersucht. Dabei stand jedoch nicht primär der Abbildungsvorgang, der den R_4 auf die geordneten Punktepaare von π abbildet, im Mittelpunkt des Interesses. Bezeichnet man, wie üblich, die Elemente eines geordneten Punktepaares mit Primär- bzw. Sekundärpunkt, so bestand das Grundprinzip dieser Untersuchungen darin, den Zusammenhang der Menge der Primärpunkte und der Menge der Sekundärpunkte des darzustellenden geometrischen Objektes zu studieren.

Die Gestaltuntersuchung, die Behandlung von Lage-, Maß- und Schnittaufgaben des R_4 erfolgte somit durch die Betrachtung von Eigenschaften der o.g. Mengen und ihrer Abbildungen aufeinander.

2. Durch Zuordnung zweier ähnlicher Punktreihen von π erhält man ∞^1 geordnete Punktepaare. Das Gesamtgebilde der so bestimmten geordneten Punktepaare nennt man auch Affinitätsgerade. Dabei können die Träger der Punktreihen auch parallel sein oder etwa zusammenfallen. Von einer singulären Affinitätsgeraden spricht man, wenn ein Träger zu einem Punkt ausartet und zwar von einer Affinitätssenkgeraden bzw. Affinitätsquellgeraden.

* Vorgelegt von Prof. Mihail Botez an der wissenschafttlichen Tagung des Lehrkörpers des Bukarester Polytechnischen Instituts „Gheorghe Gheorghiu-Dej" im 27—29 Mai 1966.

Bekanntlich besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Affinitätsgeraden mit ihren singulären Austartungen und der Geraden des R_4. Die Untersuchung von Lage- und Massbeziehungen von Geraden des R_4. wird damit zu einer Untersuchung von Affinitätsgeraden. Bildet man π durch eine Affinität auf sicht selbst ab, so ergeben sich ∞^2 geordnete Punktepaare. Schon Eckhart (1926) untersuchte Beziehungen zwischen diesen Punktepaaren und den Ebenen des R_4. Von Roth [3] wunden systematisch die sog. singulären und quasisingulären Affinitäten behandelt, wobei er als Quasiaffinität die vollständige Zuordnung zweier Geraden bezeichnet. Wir sprechen dann auch von einer Winkel-, Band- oder Nullbandebene.

In diesem Sinne besteht nun eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Ebenen des R_4 und Affinitäten, singulären Affinitäten und Quassiaffinitäten von π. Die Untersuchung konstruktiver Probleme wird so ebenfalls erfolgen können durch Untersuchungen bezüglich des Beziehungen zwischen diesen speziellen Transformationen. Die bisher erwähnten bekannten Beziehungen sind die Grundlage für eine konstruktive Behandlung solcher Flächen und Hyperflächen des R_4, die Träger von Geradenscharen bzw. Ebenenscharen sind.

So wurden z.B behandelt von Dallman [4] und Elster die Hyperzylinder und Hypergegel (1957/58), von Roth [5] Hyperebenen als Affinitätengefüge (1960/62), von Erfurth [6] Regelschraub- und Regelschraubhyperflächen (1959) und von Elster [7] Rotationsflüchen und Rotationshyperflächen (1962). Von mir [8] fanden 1963 Untersuchungen ihren Abschluss, die die konstruktive Behandlung aller Hyperflächen 2. Ordnung, die Träger von Ebenenscharen sind, unter diesem, o.g. Gesichtspunkt zum Inhalt hatten.

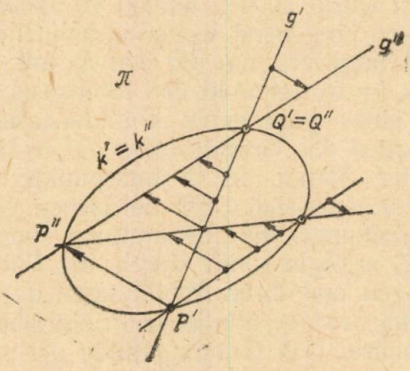


Fig. 1

In einer weiteren Arbeit [9] gelang es, unter Benutzung der ebenen Polaritäten gewisse Hyperflächen 2. Ordnung, die Träger von Geradenscharen sind, einfach darzustellen. Auch hier spiegelten sich wesentliche Eigenschaften dieser Hyperflächen in Eigenschaften der Polartitäten wieder.

3. Wie man darüber hinaus z.B. gewisse Beziehungen der projektiven ebenen Geometrie nutzbringend in der konstruktiven Geometrie des R_4 anwenden kann, soll das folgende Problem erläutern.

Problem: Gegeben sei eine (nichtsinguläre) Kurve 2. Ordnung (k) in der Koinzidenzebene $\varkappa$ $(x_1 = x_3,\ x_2 = x_4)$ des R_4. Mit Φ_1 bzw. Φ_2 werden diejenigen Hyperzylinder bezeichnet, deren erzeugenden Ebenen orthogonal uzr $x_1 x_2$- bzw. $x_3 x_4$- Ebene sind und für die gilt $\Phi_1 \cap \varkappa = \Phi_2 \cap \varkappa = k$. $\varphi = \Phi_1 \cap \Phi_2$ ist dann eine Fläche 4. Ordnung. Gegeben sei weiter ein Punkt $P \in \varphi$, wobei jedoch gelte $P \notin k$ und ein Punkt $Q \in k$.

Durch P und Q ist eine Gerade g bestimmt, die Gesamtheit der bei festem P und auf k variablen Q entstehenden Geraden bildet einen Kegel Ψ. Durch jede solche Gerade g legen wir eine zur $x_1 x_2$ Ebene halbparallele und halbsenkrechte Ebene ε, ε ist dann auch halbsenkreicht und halbparallel zur $x_1 x_2$- Ebene. Die Gesamtheit dieser Ebenen bildet dann einen (hyperbolischen) R_0-Hyperkegel Ψ.

Um diesen Hyperkegel konstruktiv erfassen zu können, übertragen wir das Problem in die Zeichenebene π (vgl. die Abbildung). k stellt sich dar als Paar zusammenfalllender, zu k ähnlicher Kurven 2. Ordnung k' und k'' mit $k' = k''$. φ_1 wird bestimmt durch alle geordneten Punktepaare von π, deren Primärpunkte P' auf k' liegen, entsprechend folgt für φ_2, dass die Sekundärpunkte P'' der geordneten Punktepaare auf k'' liegen.

Als Bild von φ ergibt sich folglich die Gesamtheit aller georgdneten Punktepaare (P', P'') mit $P' \in k', P'' \in k''$ (zu beachten ist dabei $k' = k''$). Damit die Forderung $P \notin k$ erfüllt wird, muss $P' \neq P''$ gelten. Bild der durch P und $Q \in k$ bestimmten Geraden g ist die durch g' und g'' unter Berücksichtigung der Zuordnung $P' \to P'',\ Q' \to Q''$, festgelegte Affinitätsgerade.

Die Mantellinien des Kegels ψ ergeben sich nun sehr einfach. Bemerkenswert ist jedoch folgende Eigenschaft: Die Primärgeraden g' und die Sekundärgeraden g'' bilden je ein Geradenbüschel mit den Trägern P' bzw. P''. Diese Büschel sind projektiv zugeordnet und erzeugen k'.

Bilder der Ebenen ε sind die Winkelebenen mit g' bzw. g'' als Träger. Er ergibt sich somit unmittelbar das Bild von Ψ. Wie mann nun gewisse Symmetrieebenen bzw. Achsebenen und Schnittflächen des Hyperzylinders konstruktiv kewinnen kann, soll hier nicht weiter erläuter werden.

Es ist jedoch zu erkennen, dass diese Problematik leicht verallgemeinerungsfähig ist. Eine Möglichkeit besteht z.B in der Dualisierung der in π übertragenen Problematik. Erste Ansatzpunkte in dieser Richtung finden sich z.B. bei Fritsche [10]).

LITERATUR

1. *Eckhart, L.*, Konstruktive Abbildungsverfahren, Wien 1926
2. *Dallmann, H.*, Einführung in eine darstellende Geometrie des vierdimensionalen Raumes, WZ Jena 6, 1956/57
3. *Roth, R.*, Der Gaußsche Diagonalensatz in vierdimensionaler Betrachtung und Veralgemeinerung, WZ Jena 2, 1952/53
4. *Dallmann, H,* und *Elster, K.H.*, Darstellung eines R^0 -Hyperkegels des R_4 in der Zeichenebene, Wissenschaftliche Zeitschrift Jena 7, 1957/58
   Bemerkungen zur Darstellung eines R.- Hyperkegels des R_4 Wissenschaftliche Zeitschrift Merseburg 1, 1958/59
5. *Roth, R.* Transformationsrechte Geometrie, IV—V, Wissenschaftiche Zeitschrift Meresburg 2, 3; 1959/61.

6. *Erfurth, H.*, Zur Darstellenden Geometrie der Regelschraubenaflächen des vierdimensionalen Raumes, Wissenschaftliche Zeitschrift Merseburg 4, 1961/62.
Zur Darstellenden Geometrie der Regelschraubenhyperflächen, Wissenschaftliche Zeitsehrift Merseburg 4, 1961/62.
7. *Elster, K.-H.*, Zur Darstellenden Geometrie von Rotationsflächen und Rotationshyperflächen des R_4, Habil-Schrift, Merseburg 1962.
8. *Erfurth, H.*, Beitrag zur Untersuchung und konstruktiven Behandlung von zweigliedrigen Moduln ebener reeller Affinitäten und ihre Deutung im R_4, Habil-Schrift, Merseburg 1964.
9. *Erfurth, H.*, Zur Deutung der Polaritäten des reellen projektiven Π_n im Π_{2n} Wissenschaftliche Zeitschrift Merseburg 7, 1965.
10. *Fritsche, G.*, Affingeometrische Eigenschaften der Parabel in der Darstellenden Geometrie des R_4 (I), Wissenschaftliche Zeitschrift Merseburg 7, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z.: 515

ÜBER EINIGE UMWANDLUNGEN IM AFFINEN RISS *)

AURELIAN TĂNĂSESCU

Wie bekannt, hat die Darstellung des affinen Risses E der Ebene ihren Ursprung im von Martin und Pernot definierten abgeänderten System Monge [1], ein zweifach orthogonales Projektionssystem, in welchem die Rissachse, d.h. der Schnitt beider Ebenen [2] nicht hervorgehoben wird, obwohl die Ebenen sich übereinander umlegen.

Tatsächlich stellt dieser affine Riss E der Ebene selbs ein besonderes Projektionssystem dar, betreffend alle die Ebene angehenden Probleme.

Auf Grund seines oben angezeigten Ursprungs bleibt der affine Riss dennoch dem Projektionssystem Monge untergeordnet. Die verborgene Anweisenheit des Systems Monge macht sich unter allen Umständen auf jedem affinen Riss E bemerkbar.

Dennoch konnten diese Schwierigkeiten beseitigt werden [3]. Mit anderen Worten: die zweifache Ebene und ihre Umlegung auf eine der Projektionsebenen wurden durch Einfährung eines Transportraumes T und einer einfachen Ebene ersetzt, in welchem ein Modularris mit dem Modul $0 < \theta < 90°$ erhhalten wurde.

Auf diese Weise wurde ein Darstellungssystem mit denselben Charakteristiken verwirklicht, in welchem die Transportebene für den Riss zu einer einfachen Ebene führte, wobei auf diesem Riss das verborgene Vorhandensein des Monge'schen Systems vollständig beseitigt wurde. Es wurde somit ein affiner Riss mit dem Transportraum E_T dargestellt [3].

Wenn schon von diesem Standpunkt aus die Dinge für den affinen Riss E geklärt wurden, verblieben einige Probleme, betreffend diesen Riss, welche, unserer Meinung nach, unsere Aufmerksamkeit verdienen.

So waren die hauptsächlichen Probleme in Bezug auf die Ebene, die auf dem affinen Riss E gelöst wurden, solche des Einfalls und eine summarische Ausgabe für einige metrische Aufgaben [4].

---

*) Mitteilung dargebracht bei der Internationalen Mathematikerkongress, Moskau 16—26 August 1966.

Somit stellt sich die Frage: welchen Aspekt nehmen auf dem affinen Riss E die Umwanlungsmethoden der Projektionen oder die Methoden der Darstellenden Geometrie als Abänderung der Proyektions Rotations - und Umlegungsebenen an?

Haben diese einen Sinn? Können diese Umwandlungen im affinen Riss, d. h. in diesem Sonderprojektionssystem der Ebene angewendet werden?

In der vorliegenden Arbeit beabsichtigen wir, diese Fragen zu beantworten.

Gleich zu Beginn müssen wir darauf verweisen, dass die Antwort auf die oben angeführten Fragen bejahend ist. So können diese Umwandlungen oder Umwandlungsmethoden der Projektionen, oder genauer, der Elemente, welche die affinen Risse wie z.B. die Affinitätschse und die dazugehörigen Punktpaare definieren, mit Erfolg auch auf die affinen Risse angewendet werden.

Durch diese Operation erhält die Lösung verschiedener Probleme im Verhältnis zur klassischen Art der Auflösung im System Monge einen anderen Aspekt, Auf diese Weise erweitert sich der Bereich aller sofortigen practischen Anwendungen in Bezug auf das Kapitel „Ebene" beträchtlich.

Diese Bemerkungen sind für alle Probleme gültig, die sich in Bezug auf die Ebene stellen, auch wenn bei deren Lösung nicht die Umwandlungsmethoden, mit denen wir uns in dieser Arbeit im Besondern beschäftigen, angewendet werden. Wir halten es für angezeigt, darauf hinzuweisen, dass viele derjenigen Probleme, bei denen Profilgerade auftreten, sehr elegante und bequeme Lösungen auf den entsprechenden affinen Rissen finden.

Diese affinen Risse können sogar bei solchen Problemen Anwendung finden, in welchen die Bestimmungen der Ebenespuren gesucht werden, besonders in der Lage ihrer Unzugänglichkeit.

Wir halten es für beachtlich, dass diese neue Art der Auflösung der Auflösung der Probleme eine Belebung der klassischen Behandlung dieses Materials bieten kann. Die neuen Erwägungen, welche bei der Lösung der Probleme auf diesen Typen der afinen Risse angestellt werden müssen führen sicher und zweckendsprechend zur Anregung des wissenschaftlichen Denkens der Studenten und der Lehrkräfte.

Im Folgenden werden im Rahmen des ersten Teiles durch die Auf- affinen Rissen Beispiele geben: im zweiten Teil werden wir uns mit dem Studium der eigentlichen Umwandlungsmethoden und deren Anwendungen beschäftigen.

I. Konstruktionen auf affinen Rissen

1. *Es soll ein Horizontalsegment von gegebener Länge konstruiert werden, das sich auf zwei zusammenlaufende Gerade stützt.* Es seinen d, d' und δ, δ' die zwei in m, m' zusammenlaufenden Gerade (Fig. 1). Die Affinitätsachse der durch die Gerade definierten Ebene ist SC. Wir legen

das Segment l in ma_1 auf die horizontale Gerade Km, $K'm'$. Durch eine Parallelprojektion zu δ ergeben sich die betreffenden Punkte a, a', und b, b', auf den gegebenen zwei Geraden.

Bei Überprüfung muss $a'\ b' \parallel m'\ k'$ sein.

2. *Es ist die Gerade Δ zu bestimmen, welche durch den Punkt A geht, parallel ist mit der Halbierungsebene und mit einer anderen gegebenen*

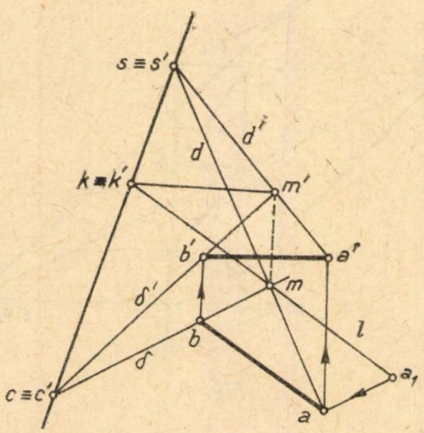


Fig. 1

Geraden D zusammenlaufend ist. Es sei der affine Riss, in welchem wir den Punkt a, a' und die Gerade d, d' eintragen (Fig. 2). Die Affinitätsachse der Ebene kann gleich durch die Punkte $k = k'$ und den vereinigten Punkt $c = c'$ der horizontalen Geraden $a'\ b'$, ab erhalten werden. Da die gesuchte Gerade mit der zweiten Halbierungsebene parallel ist, folgt, dass deren entsprechenden Projektionen parallel zur Affinitätsachse sein müssen. Diese Gerade ist $a\ m$, $a'\ m'$.

3. *Es ist eine Gerade zu bestimmen, die durch einen gegebenen Punkt geht und die Rissachse sowie eine gegebene Gerade schneidet. Es wird auch die Variante verlangt, wenn die gegebene Gerade profiliert ist.* Es

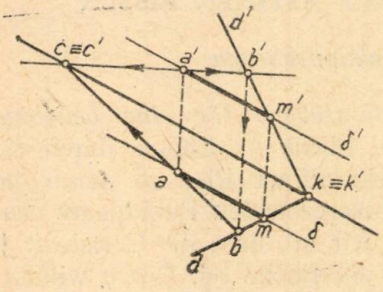


Fig. 2

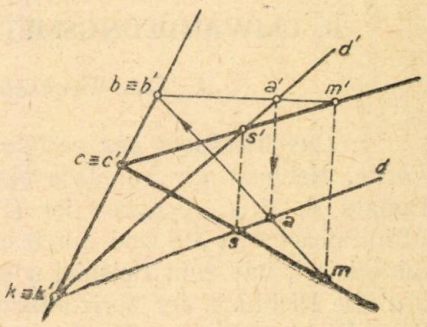


Fig. 3

seien m, m' der Punkt und d, d' die gegebene Gerade. (Fig. 3). Die Affinitätsachse der durch diese Elemente definierten Ebene ist $kb = k'\ b'$. Wenn $c = c'$ willkürlich auf der Affinitätsachse ist, bestimmt sie die gesuchte Gerade zusammen mit dem Punkt m, m'. Gleichzeitig zeigt $c = c'$ die Lage der Rissachse auf dem affinen Riss der Ebene, also P_x an.

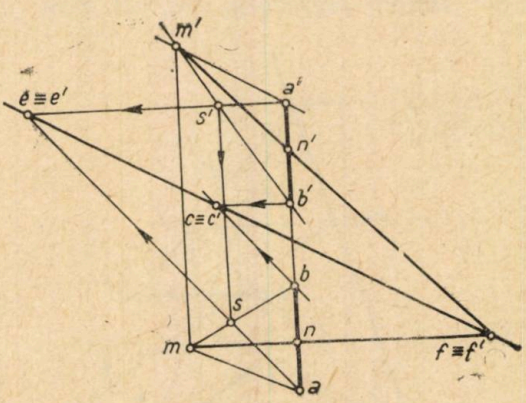


Fig. 4

Im Falle der Varainten mit der Profilgeraden ab, $a'b'$, werden wir die Affinitätsachse der durch die Punkte $e = e'$ und $c = c'$ bestimmten Ebene durch zweihorizontale Gerade der Ebene MAB betrachten (Fig. 4). Die erste horizontale Gerade ist AS. Die zweite horizontale Gerade ist die durch B geführte Parallele zur Geraden AS. Jeder beliebge Punkt $f = f'$ auf der Affinitätsachse ergibt mit dem Punkt m, m' die gesuchte Gerade, die mit der Profilgeraden in n, n' und mit der Rissachse gerade in $f = f'$ zusammenläuft.

Bemerkung. Aus dem zweiten Teil dieser Aufgabe ergibt sich klar, wie bereits oben bemerkt wurde, die Nützlichkeit der Anwendung der Eigenschaften des affinen Risses bei der Lösung von Problemen, in welchen Profilgerade vorkommen.

II. UMWANDLUNGSMETHODEN AUF AFFINEN RISSEN

A. *Das Wechseln der Projektionsebenen*

1. *Das Wechseln des vertikalen Projektionsebene für eine beliebige Ebene.* Nehmen wir an, dass eine beliebige Ebene im Raume durch die Punkte A, B ,C, gegeben ist (Fig. 5). Sein affiner Riss ist durch die Affinitätsachse $\alpha\ \beta\ \gamma$ und durch eines der entsprechenden Punktpaare charakterisiert, wie zum Beispiel $a\ a'$. Nehmen wir an, dass die Gerade $t \perp a\ a'$ die Richtung der horizontalen Geraden der Ebene sei. Durch willkürliche Wahl übrigens, der Richtung t durch a, zum Beispiel, legen wir

gleichzeitig im Raum die Verschiebung des orthogonalen Doppeldieders, der in dem affinen Riss verborgen ist, fest. Es sei o_1x_1 die Richtung, welche die neue vertikale Projektionsebene anzeigt. In der Annahme, dass die Punkte *a, b, c,* und die Koten der Punkte *A, B, C* in Bezug auf die urs-

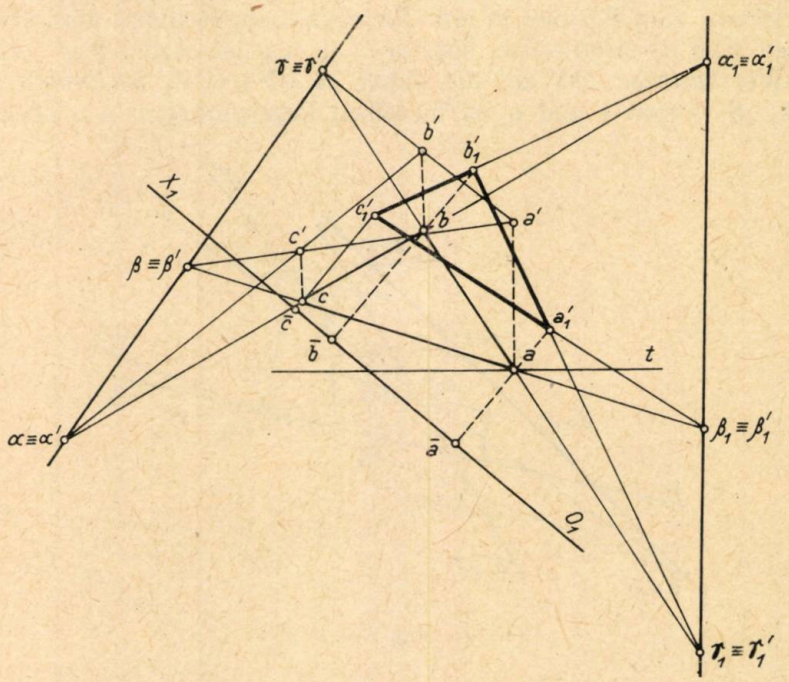


Fig. 5

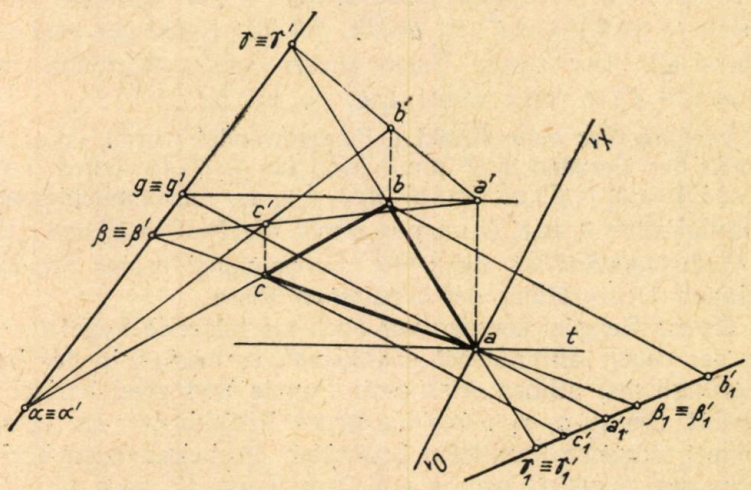


Fig. 6

prünglich durch die Gerade t festgelegte Verschiebung unveränderlich sind, ergeben sich die dazugehörigen Punkte a'_1 b'_1 c'_1 und dadurch die neue Affinitätsachse α_1 β_1 γ_1.

Das Problem ist viel vereinfacht, wenn die gegebene Ebene in eine Entwurfebene, zum Beispiel in eine Endebene umgewandelt wird (Fig. 6). In diesem Fall ist erforderlich, dass $o_1 x_1 \perp a\ g$ ist, wobei $a'\ g' \parallel t$.

2. *Wir beziehen uns auf die durch* $[\delta \equiv \delta'\ ;\ i,\ i']$ *bestimmte Ebene.* (Fig. 7). Es haben t und $o_1 x_1$ dieselben Bezeichnungen wie oben. Eine

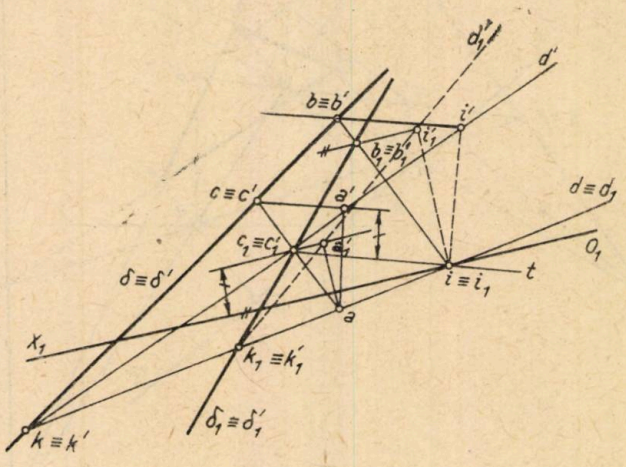


Fig. 7

beliebige Gerade der durch den affinen Riss definierten Ebene sei d, d'. Welches ist die neue Affinitätsachse? Wenn $A \in D$ dann ist $d'_1 \equiv i'_1\ a'_1$, woraus sich $(k \equiv k'_1) = d \cap d'_1$ ergibt, *d.h.* ein Punkt der neue Affinitätsachse $\delta_1 \equiv \delta'_1$. Der zweite Punkt dieser neuen Affinitätsachse kann $(b_1 \equiv b'_1) = i'_1\ b'_1 \cap ib$ sein, wobei $i'_1\ b'_1 \parallel o_1\ x_1$ ist.

Der Vorgang der beim Punkt i, i' angewendet wurde, eignet sich für jeden Punkt der Geraden d, d' somit auch für a, a'. In diesem Fall ergibt sich $(c_1 \equiv c'_1) = a'_1\ c'_1 \cap ac$ wobei $a'_1\ c'_1 \parallel o_1\ x'_1$. Zusammenfassend: die neue Affinitätsachse $\delta_1 \equiv \delta'_1$ kann nur durch die Punkte b'_1 und c'_1 bestimmt werden. Selbstverständlich dient die Verwendung beider Methoden zur gegenseitigen Überprüfung der erhaltenen Risse.

Aus diesem Beispiel könnten wir auch die folgende Regel für die Bestimmung der neuen Affinitätsachse ableiten; es werden in der Ebene auf dem ursprünglichen affinen Riss zwei Punkte und zwei horizontale Gerade gewählt. Die zu $o_1\ x_1$ durch die neuen Projektionen der entsprechenden Punkte gezogenen Parallelen Schneiden die betreffenden horizontalen Geraden in zwei Punkten, welche auf diese Weise die neue Affinitätsachse bestimmen.

Zwecks Umwandlung der Ebene in eine Entwurfebene, bleibt die Bedingung aufrecht, dass $o_1 x_1 \perp ib$, wobei $i' b' \parallel t$. Absolut analoge Betrachtungen führen auf dem affinen Riss zu Konstruktionen, welche zu einem Wechsel der horizontalen Projektionsebene für eine beliebige Ebene führen.

3. *Die Konstruktionen einer zu einer gegebenen Ebene in Entfernung l parallelen Ebene.* Es sei durch $[\delta = \delta'\ a, a']$ und $o_1 X_1 \perp ka$ definierte affine Riss (Fig. 8). Wir legen die Verschiebung des orthogonalen Doppel-

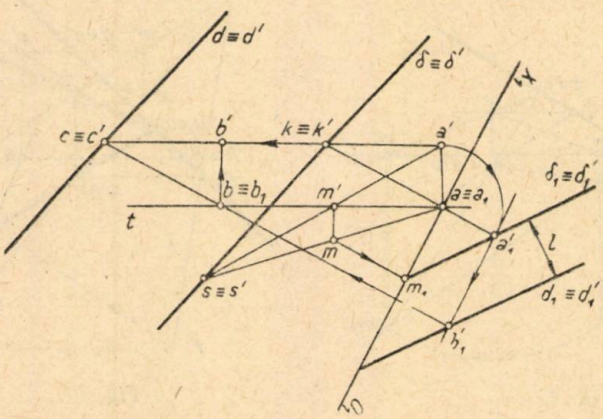


Fig. 8

dieders durch t fest und wählen auf einer Geraden SA der Ebene den Punkt M derart, dass $m' \in t$. Bei Erfüllung dieser Bedingungen erhalten wir die neue Affinitätsachse $\delta_1 \equiv \delta_1'$ und ergibt sich in diesem Verhältnis die Affinitätsachse $d_1 \equiv d_1'$ der gesuchten Ebene in neuen durch $o_1 x_1$ eingeführte orthogonalen Dieder.

Wie kommen wir zum affinen Riss der gesuchten paralleler Ebene zurück? Dazu bedienen wir uns der horizontalen Garaden ak, $a'k'$ und bc, $b'c'$ und der Geraden e. Der affine Riss der gesuchten Ebene ist durch $[d \equiv d';\ b, b']$ bestimmt.

B. *Die Umdrehung*

1. *Die Umdrehung des Punktes.* Es sei m, m' der Punkt ausserhalb der durch den affinen Riss $[\delta \equiv \delta';\ a, a']$ bestimmter Ebene (Fig. 9).

Dieser Punkt soll derart gedreht werden, dass er in der gegebenen Ebene enthalten sein soll. In der Voraussetzung, dass es die horizontale Umdrehung sei wählen wir die Achse $\omega \equiv a$ und führen m zu m_1 auf der horizontalen Geraden der Ebene bestimmt vom vereinigten Punkt $c \equiv c'$ und der Kote m'. Die gedrehte Lage des Punktes ist m_1, m_1'.

Zwecks Überprüfung bestimmen die Punkte A und M_1 eine Gerade, welche der gegebenen Ebene zugehören soll — es folgt daher $(e \equiv e') \in \in (\delta \equiv \delta')$.

2. *Umdrehung der Geraden.* Wir betrachten die Geraden ausserhalb der durch den affinen Riss $[\delta \equiv \delta' ; a, a']$ bestimmten Ebene (Fig. 10). Durch eine horizontale Umdrehung wird diese Gerade dahin gebracht, dass sie in der gegebenen Ebene enthalten sein soll. Die Umdrehungsachse $\omega \equiv n$ wird im Schnittpunkt n, n' zwischen Gerade und Ebene gewählt, welcher Punkt sofort durch eine parallele Projektion mit der Richtung ak,

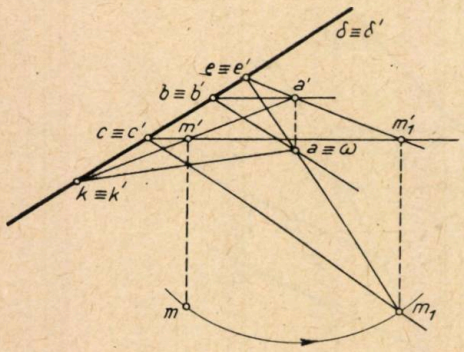


Fig. 9

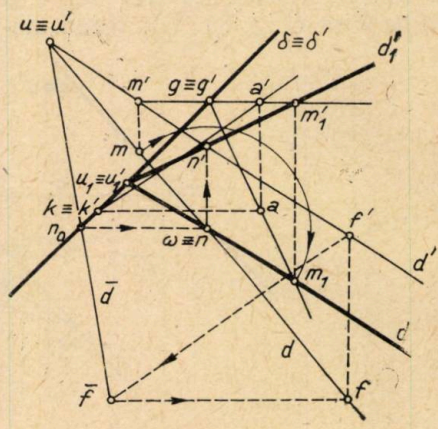


Fig. 10

$a'\,k'$ abgeleitet werden kann. Es genügt, dass sich noch ein einziger Punkt der gegebenen Geraden dreht, zum Beispiel m, m', an der Kote des Punktes A der Ebene gelegen. Die gedrehte Lage des Punktes M ist m_1, m'_1. Zwecks Überprüfung sollen die Punkte N und M_1 die gedrehte Lage d_1 d'_1 der gegebenen Geraden bestimmen ,es soll also $(u_1 \equiv u'_1) \in (\delta \equiv \delta')$ sein.

3. *Umdrehung der Ebene.* Es sei die Ebene $[\delta \equiv \delta' ; a, a']$ durch ihren affinen Riss bestimmt (Fig. 11). Wir wandeln diese Ebene durch Umdrehung derart um, dass sie Endebene wird. Dazu wahlen wir die vertikale

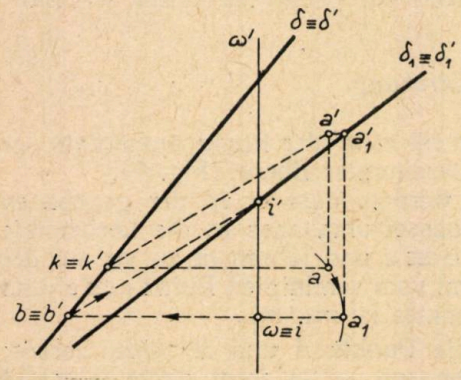


Fig. 11

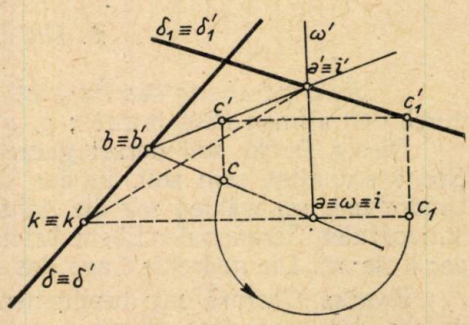


Fig. 12

Umdrehungsachse ω, ω', welche die gegebene Ebene in *i, i'* schneidet. Dieser Schnittpunkt wird der gesuchten neuen Affinitätsachse zugehören. Es ist erforderlich, dass sich eine Horizontale der Ebene umdreht, zum Beispiel die durch den Punkt *a, a'*. Die Umdrehung des Punktes *a, a'* in a_1, a'_1 antspricht der Umdrehung dieser Geraden in die Endlage. Somit ist die erhaltene neue Endebene $[\delta_1 \equiv \delta'_1 ;\ a_1 , a'_1]$.

Wen die Umdrehungsachse sogar im Punkte *a, a'* gewählt wird, dann ist die neue Affinitätsachse der in die Endlage gedrehten Ebene durch *a'* und c'_1 bestimmt, wobei *c, c'* eine beliebige Horizontale der Ebene anzeigt (Fig. 12 und Fig. 13).

C. *Die Umlegung*

Die Tatsche, dass, im Allgemeinen, gewöhnlich in Problemen der Umlegung auf eine Niveaueebene im Doppelorthogonalsystem nicht die Rolle der Grundlinie vorkommt, führt uns gleich zu Beginn zum Schluss, dass auf

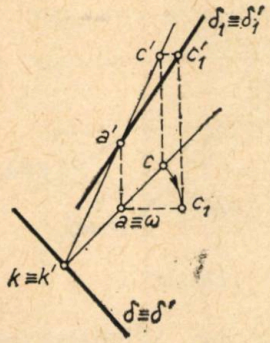


Fig. 13

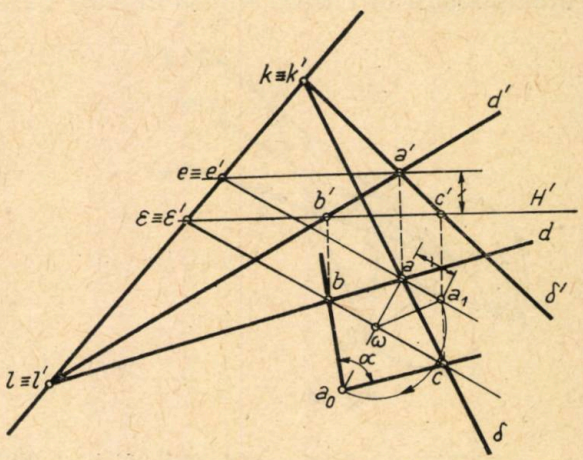


Fig. 14

dem affinen Riss diese Operation ohne Schwierigkeiten angewandt werden kann, da die Verschiebung des orthogonalen Doppeldieders, vom affinen Riss verborgen, gerade durch die Niveauebene, auf welche die Umlegung gemacht wird, bestimmt ist. Das Aussehen des affinen Risses der Fig. 14 ist hinreichend aufschlussreich. Der Winkel α, gebildet von den Geraden *d, d'* und δ, δ' wird in seiner wahren Grösse mit Hilfe des Umlegedreiecks ω *a* a_1 bestimmt, wobei die horizontale Gerade BC der Ebene als Umlegungsachse gewählt wird.

Wir sollen den Winkel zwischen zwei Geraden, deren entgegengesetzt bezeichnete Projektionen zusammenfallen, bestimmen. Es sei $d' \equiv \delta$, $d \equiv \delta'$ die beiden gegebenen Geraden (Fig. 15). Die Affinitätsachse der durch diese Geraden bestimmten Ebene ist $g \equiv g'$, welche erhalten wird durch die

horizontale Gerade a', b', ab, die gleichzeitig als Umlegungsachse dient. Der Treffpunkt $k \equiv k'$ der Geraden wird in k_0 umgelegt. Die eigentliche Grösse des zwischen diesen beiden Geraden entstandenen Winkels ist θ.

D. *Die Umwandlung der Affinitätsachse*

In dem oben Gesagten wurden diejenigen Probleme untersucht, aus welchen sich Lagenänderungen der Affinitätsachse ergeben.

Welche Bedeutung has jedoch eine gewisse anfängliche Umwandung der Affinitätsachse auf dem affinen Riss für die Ebene ?

Es sei auf diese Weise $[\delta \equiv \delta' ;\ a,\ a']$ der affine Riss einer Ebene, in welcher wir willkürlich durch t die Verschiebung des orthogonalen Doppeldieders festlegen, der durch den affinen Riss verborgen ist (Fig. 16) Wir betrachten ebenfalls willkürlich die Affinitätsachse $\delta_1 \equiv \delta_1'$ durch t. Wenn wir den Punkt der Ebene, für welchen wir $a \equiv a_1$ verfolgen, erhalten wir das entsprechende Punktpaar a_1, a_1', welches gemeinsam mit der neu gewählten Affinitätsachse den neuen affinen Riss der Ebene bestimmt.

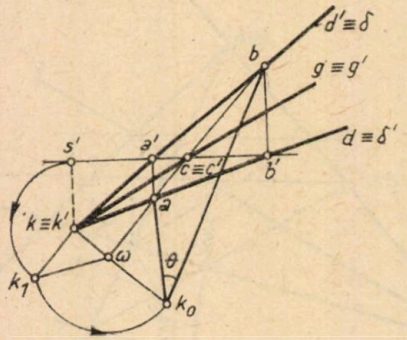


Fig. 15

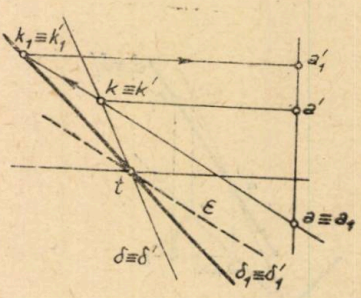


Fig. 16

Zusammenfassend : der gegebenen Umwandlung der Affinitätsachse unter den oben angegebenen Bedingungen entspricht eine Umdrehung der Ebene um die horizontale Gerade ε, welche durch t definiert ist.

Diskussion : Die gegebene Ebene wird :

— senkrecht auf die erste Halbierungsebene des entsprechenden orthogonalen Doppeldieders, für $\delta_1 \perp k'a'$;

— vertikal, für $\delta_1 \parallel ka$;

— horizontal, für $\delta_1 \parallel k'a'$;

— bestimmt, bei Betrachtung eines anderen entsprechenden Punktpaares auf der Geraden ak, $a'k'$ bei $a \notin \delta_1$.

Eine analoge Diskussion kann auch geführt werden in der Hypothese, dass von $a' \equiv a_1'$ ausgegangen wird.

Katheder der darstellenden Geometrie (II)
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bukarest

LITERATUR

1. *Halphen Gh.* Notes sur certains principes de la Géométre Ex. L'enseignm. Math. 1914.

2. *Tănăsescu A.*, Projektionssysteme und Risstypen in der Darstellenden Geometrie. Mitt. b. Wiss. Tag. der M.G. der D.D.R., Leipzig, 1966.

3. *Tănăsescu A.*, Affiner Riss mit Übertragungsraum, Mitt. b. IKM, Weimar, 1965.

4. *Tănăsescu A.*, Geometrie descriptivă, Bucureşti, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z. 542.952.6:66.095.2:678.5:678.7:546:543

COMPORTAREA LA SCINDAREA TERMICĂ ÎN MEDIU NEAPOS A UNOR COMPLECȘI AI AZOIZOBUTIRONITRILULUI CU ACIZI LEWIS

C. DRĂGULESCU, O. SOLOMON, SIMONA ZUGRĂVESCU, EDITH BERAL

Influența acizilor Lewis în procesul de polimerizare inițiată cu radicalii liberi generați de diverși inițiatori (azoizobutironitril, peroxid de benzoil etc.) ca și posibilitatea formării unor complecși între inițiatori și acizi Lewis reprezintă un domeniu de cercetare nou. Posibilitatea formării unor asemenea complecși a fost indicată de Imoto și colab. în cazul polimerizării metacrilatului de metil (1) și demonstrată de Haas (2) pe un număr redus de exemple.

În lucrarea de față se prezintă sinteza unor complecși formați din diferiți acizi Lewis ($SnCl_4$, $SbCl_5$ și $TiCl_4$) cu liganzi organici de tipul azoizobutironitril (AIBN) cum și procesul de scindare termică a acestor complecși în comparație cu aceea a ligandului organic (AIBN).

I. *Sinteza și studiul unor complecși între* AIBN *și acizi Lewis*

A. *Sinteza unui complex între* AIBN *și* $SnCl_4$

Sinteza complexului între AIBN și $SnCl_4$ s-a efectuat după modul de lucru indicat de Haas (2). Astfel s-a preparat complexul prin reacția între AIBN (recristalizat din etanol sau eter și uscat în exsicator de vid peste P_2O_5) și $SnCl_4$ (redistilat în curent de azot), luați în raport molar 1 : 7 și dizolvați fiecare în parte în $CH_3 \cdot NO_2$. (La 1 g AIBN dizolvat în 10 ml $CH_3 \cdot NO_2$ s-au adăugat încet circa 11 g $SnCl_4$, dizolvați în 10 ml $CH_3 \cdot NO_2$).

* Lucrare prezentată la cea de-a III-a Conferință Republicană de Chimie, Timișoara, 26—30 iunie 1966.

S-a lucrat în aparatură de sticlă perfect uscată, în mediu de gaz inert (azot sau argon) uscat și sub agitare. Precipitatul alb a fost filtrat în mediu de gaz inert uscat, spălat cu $CH_3 \cdot NO_2$ și uscat în etuvă de vid la 50—60°C. Păstrarea lui s-a făcut în exsicator cu P_2O_5 și parafină.

După cum se vede din tabela 1, rezultatele analizelor substanței sînt în concordanță cu valorile calculate pentru un complex 1 : 1 de AIBN cu $SnCl_4$.

Tabela 1

Analiza complexului AIBN . $SnCl_4$ *sintetizat în mediu de* $CH_3.NO_2$ *și în mediu de* CCl_4

		C, %	H, %	N, %	Cl, %	Sn, %
Calculat		22,6	2,8	13,2	33,4	28
Găsit	I	21,7	3,5	13,4	33,1	28,4
	II	22,1	3,2	13	33	28,6

I. — Complex sintetizat în $CH_3 \cdot NO_2$
II. — Complex sintetizat în CCl_4

Carbonul și hidrogenul au fost determinați prin analiza elementară, azotul prin metoda Dumas, clorul atît prin analiza elementară cît și prin o metodă Volhard modificată, iar staniul prin calcinare, ca SnO_2.

S-a cercetat de asemenea sinteza complexului și în alți dizolvanți organici. Cele mai bune rezultate au fost obținute cînd s-a lucrat în mediu de CCl_4. Uscarea complexului s-a făcut sub vid (5—10 mm Hg). Rezultatele analizei complexului sînt indicate în tabela 1.

Complexul este o substanță albă, care se descompune la 110°C. Este solubil în eter, etanol, dioxan, dimetilformamidă, dimetilsulfoxid. La aer umed hidrolizează.

Structura complexului a fost determinată prin spectre de absorbție în IR, comparîndu-se spectrul complexului AIBN·$SnCl_4$ cu cel al AIBN ca atare. În cazul complexului, banda caracteristică pentru grupa nitril este diminuată și puțin deplasată spre lungimi de undă mai mari.

Natura și poziția legăturilor în complex au fost stabilite prin sinteza cu etilendiamină.

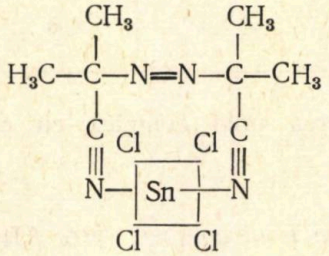
În acest scop, complexul dizolvat în dimetilformamidă anhidră a fost tratat cu etilendiamină. S-a obținut un precipitat alb, strălucitor, care a fost

spălat cu metanol anhidru şi uscat în curent de azot. Rezultatul obţinut la analiza de azot:

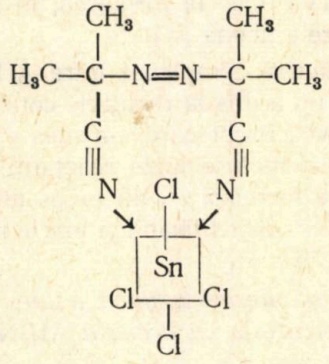
	N. %
Calculat	14,17
Găsit	13,72

dovedeşte formarea unui complex cu raport molar 1:2, adică $SnCl_4 \cdot 2C_2H_8N_2$.

Deoarece etilendiamina s-a legat în poziţiile în care era legat staniul în complexul iniţial, se poate afirma că acest complex are forma *trans*:



Dacă complexul ar avea forma *cis*:



el ar fi trebuit să reacţioneze cu etilendiamina formînd un complex 1 : 1, adică $SnCl_4 \cdot C_2H_8N_4$, pentru care conţinutul de azot calculat este 8,75% N.

B. *Sinteza unui complex între* AIBN *şi* $SbCl_5$

Folosind tehnica de lucru aplicată la sinteza complexului $AIBN \cdot SnCl_4$, s-a încercat obţinerea unui complex de $SbCl_5$ cu acelaşi ligand organic.

Datorită reactivităţii acidului Lewis, sinteza nu a putut fi realizată în mediu de $CH_3 \cdot NO_2$, eter sau benzen. De aceea s-a folosit ca mediu de

reacție CCl_4. S-a lucrat cu diferite raporturi molare între reactanți: de la 1 : 1 pînă la 1 : 4, adăugînd în soluția saturată de AIBN în CCl_4, cantitatea respectivă de $SbCl_5$ dizolvată în CCl_4, sub agitare și în mediu de gaz inert. În toate cazurile s-a obținut un precipitat alb, care a fost filtrat și uscat în vid (5—10 mm Hg).

Lucrînd cu un raport molar AIBN : $SbCl_5$ de 1 : 3, la o durată de reacție de circa două ore, s-a obținut un produs la care rezultatele analizei conținutului de azot și de clor :

	N. %	Cl, %
Calculat	5,28	50,01
Găsit	4,98	49,02

pledează pentru formarea unui complex cu raport molar 1 : 3, adică AIBN·3$SbCl_5$.

C. *Sinteza unui complex între* AIBN *și* $TiCl_4$

În literatură se menționează că reacția dintre azoderivați alifatici C_1—C_4 și o sare de Ti(IV) duce la formarea, în mediul de reacție, a unui produs cristalin de culoare galbenă (3).

Încercarea de a sintetiza complexul între AIBN și $TiCl_4$ în mediu de nitrometan, eter, benzen nu a dus la rezultate concludente, posibil din cauza reactivității acidului Lewis, drept care s-a ales ca dizolvant CCl_4. Lucrîndu-se cu diferite raporturi molare între reactanți, s-a constatat că reacția decurge mai bine cînd se lucrează cu un exces mic de AIBN. În acest caz rezultă un precipitat galben, ușor filtrabil și foarte instabil.

II. *Comportarea la scindarea termică a unor complecși ai* AIBN *cu acizi Lewis în comparație cu aceea a* AIBN, *în diverși dizolvanți*

Scindarea termică a AIBN este cunoscută ca o reacție de ordinul I, viteza de scindare în diferiți dizolvanți organici fiind independentă de natura mediului pentru valori ale constantei dielectrice a mediului de 2—26. Astfel, pentru determinări efectuate în: toluen, xilen, dimetilanilină, *n*-BuOH, viteza de descompunere a AIBN este lentă, avînd k = 1,55 pînă la $1{,}78 \cdot 10^{-4}$ s^{-1}, la temperatura de 80°C (4).

S-a studiat scindarea AIBN în dioxan, dimetilformamidă, dimetilsulfoxid și carbonat de etilenă. Determinările au fost efectuate în instalația redată

în fig. 1, la temperatura de 80°C ± 0,1°C, în mediu de azot și în sistem perfect închis. Injectarea soluției substanței s-a făcut direct în mediul de reacție, pentru a se evita pătrunderea aerului umed din exterior. Scindarea AIBN în dizolvanții menționați a fost urmărită timp de zece ore, după volumul de azot degajat.

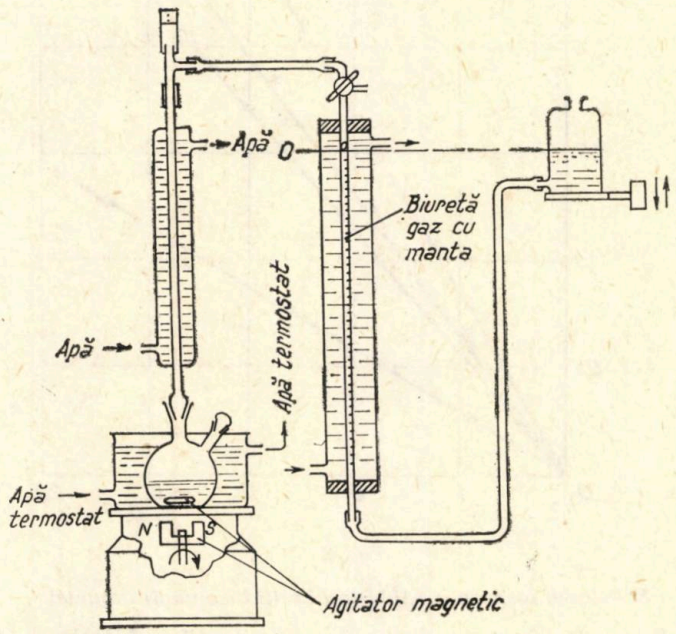


Fig. 1

Scindarea monomoleculară poate fi exprimată prin relația:

$$ln \frac{V\infty}{V\infty - V_t} = k(t)$$

Reprezentarea grafică a constantei de scindare a AIBN în diferiți dizolvanți organici este redată în fig. 2.

Din determinările efectuate (tabela 2) reiese că scindarea termică a AIBN în dimetilformamidă, dimetilsulfoxid și carbonat de etilenă are loc în proporție mai mare (93—95%) decît în dioxan (59—61%, însă scindarea în acești dizolvanți este mai rapidă decît în dioxan, atingînd un maximum după 5—6 ore. Cea mai mare valoare pentru constanta de scindare s-a realizat în dimetilsulfoxid ($k = 2{,}08 \cdot 10^{-4} s^{-1}$). De aici rezultă că scindarea AIBN este dependentă de polaritatea acestor dizolvanți.

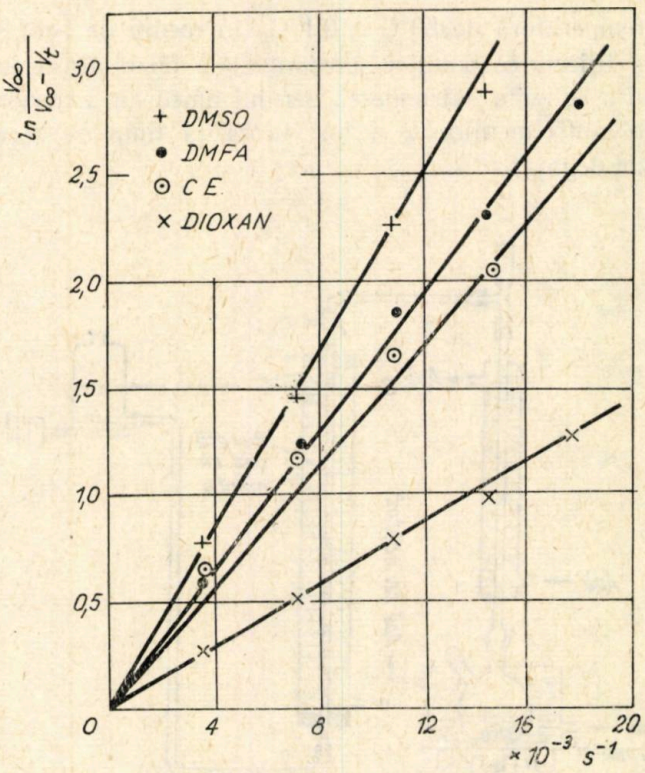


Fig. 2

Tabela 2

Scindarea termică a AIBN *în diferiți dizolvanți organici*

Sa cercetat apoi scindarea termică a complecșilor AIBN cu acizi Lewis, în aceiași dizolvanți și condiții de lucru, în comparație cu aceea a AIBN ca atare. Reprezentarea grafică a constantei vitezei de scindare a complexului AIBN cu $SnCl_4$ este arătată în fig. 3.

Din datele obținute (tabela 3) rezultă că în cazul dioxanului, scindarea complexului AIBN cu $SnCl_4$ este mai intensă decît în cazul AIBN singur (80% față de 60%); în mediu de diimetilformamidă și dimetilsulfoxid scin-

Dizolvant	Constantă dielectrică ε	Scindare %	Viteză de scindare a AIBN $k \cdot 10^4 s^{-1}$ (la 80°C)
Dioxan	2,209(25°C)	59—61	0,94
Carbonat de etilenă	—	89—91	1,43
Dimetilformamidă	37,65(20°C)	91—93	1,64
Dimetilsulfoxid	45	93—95	2,08

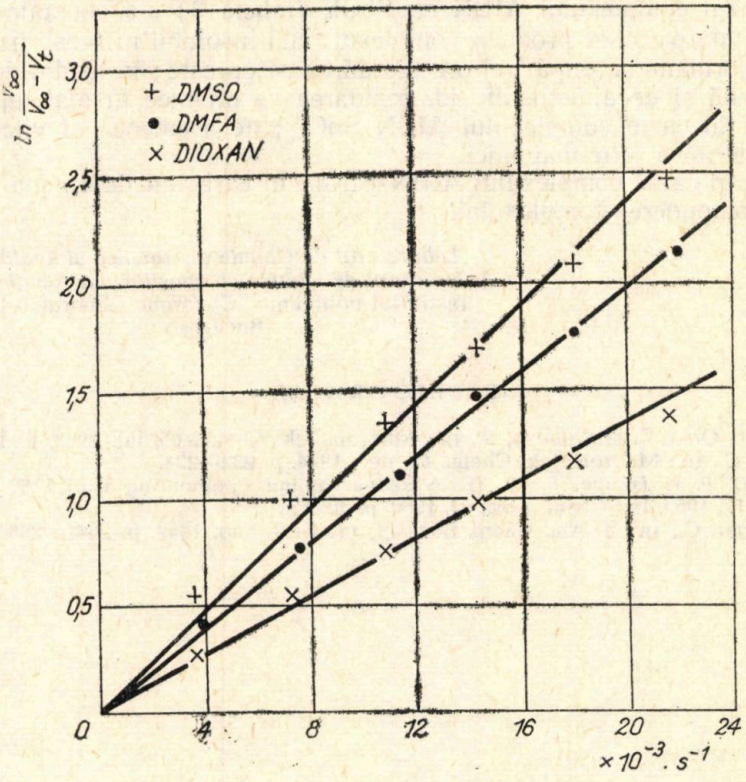


Fig. 3

darea este cu circa 10% mai mică decît în cazul AIBN cu atare. În schimb, constanta vitezei de scindare a acestui complex în mediu de dioxan, dimetilformamidă şi dimetilsulfoxid este mai mică faţă de cea în cazul AIBN singur cu : 28,8% pentru dioxan, cu 39,6% pentru dimetilformamidă şi cu 43,7% pentru dimetilsulfoxid. În carbonat de etilenă are loc descompunerea complexului.

Tabela 3

Scindarea termică a complecşilor AIBN *cu* $SnCl_4$ *şi cu* $SbCl_5$ *în diferiţi dizolvanţi organici*

	Constantă dielectrică ε	Complex AIBN cu $SnCl_4$		Complex AIBN cu $SbCl_5$	
		Scindare %	Viteză de scindare $k \cdot 10^4\ s^{-1}$ (la 80°C)	Scindare %	Viteză de scindare $k \cdot 10^4\ s^{-1}$ (la 80°C)
Dioxan	2,209(25°C)	79—81	0,67	—	—
Carbonat de etilenă . .	—	—	—	—	—
Dimetilformamidă . . .	37,65(20°C)	80—82	0,99	45—50	0,61
Dimetilsulfoxid	45	90—92	1,17	35—40	0,40

În cazul complexului AIBN cu $SbCl_5$ (tabela 3) s-a constatat că în dioxan scindarea nu se produce, complexul fiind insolubil în acest dizolvant; în dimetilformamidă, după trei ore scindarea se oprește; în mediu de dimetilformamidă și de dimetilsulfoxid, scindarea se produce în mai mică măsură decît în cazul complexului AIBN·$SnCl_4$; de asemenea și vitezele de scindare termică sînt mai mici.

Ca și în cazul complexului AIBN·$SnCl_4$, în carbonat de etilenă se produce descompunerea complexului.

Laboratorul de Chimie anorganică și analitică
Laboratorul de Chimia compușilor macromoleculari
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Imoto, M., Otsu, T.* și *Shimizu, S.*, În: Makromolek. Chem., 65, iul. 1963, p. 174—179.
2. *Haas, H. C.*, În: Makromolek. Chem., *80*, dec. 1964, p. 232—234.
3. *Brown, D. E.* și *Lampe, F. W.* (Esso Rosearch and Engineering Co.) U.S. 2913445, nov. 17, 1959. În: Chem. Abs., **54**, 1960, p. 4050 a.
4. *Overberger, C.*, În: J. Am. Chem. Soc., *71*, nr. 7—8, aug. 1949, p. 2661—2666.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z. : 655.2/3:676.3:667.5

CONTRIBUȚII LA STABILIREA UNUI CRITERIU OBIECTIV DE APRECIERE A CORELAȚIEI HÎRTIE-CERNEALĂ-MAȘINĂ, ÎN IMPRIMAREA POLICROMĂ *

THEODOR BĂDESCU

I. *Introducere*

Interacțiunea dintre cerneluri și hîrtiile de tipar în procesul imprimării se manifestă, în primul rînd,datorită fenomenelor de adsorbție și absorbție care au loc în cursul acestui proces. Asupra acestei interacțiuni influențează, de asemenea, parametrii funcționali ai mașinii de imprimare și condițiile de microclimat din secțiile de producție.

Realizarea unei corelații adecvate între factorii de mai sus este foarte pretențioasă în cazul imprimatelor în culori, unde astăzi se cere, în marea majoritate a cazurilor, o cît mai fidelă reproducere coloristică a originalului policrom (criteriul facsimilului). O fidelitate perfectă a reproducerii este însă numai rareori posibilă, deoarece ea poate fi asigurată numai dacă în toate punctele omologe ale originalului și reproducerii lui există culori identice din punct de vedere colorimetric, adică culori „necondiționat egale". Ceea ce se poate realiza practic, între anumite limite, este obținerea pe reproducere a unor culori „condiționat egale" cu cele ale originalului, adică culori care provoacă senzații de culoare egale, deși au la bază excitații de culoare diferite, provenite de la suporturile deosebite și de la pigmenții și coloranții diferiți. Aceasta impune ca, prin reproducere policromă cu triade de cerneluri transparente, să existe posibilitatea realizării unei game de culori mai mare sau cel puțin egală cu paleta de culori a originalului, care poate fi un diapozitiv color, o acuarelă, tempera, ulei etc. Gama de culori care se poate reproduce prin policromie va fi însă modificată de variația unuia sau mai multor factori ai corelației hîrtie-cerneală-mașină de imprimare.

Dată fiind complexitatea acestei corelații, se impune necesitatea stabilirii unor criterii științifice drept măsură a ei, criterii care să contribuie la fundamentarea tehnico-științifică a procesului tehnologic al imprimării policrome, înlăturîndu-se astfel atît rutina în dirijarea acestui proces, cît și aprecierile subiective asupra rezultatelor obținute.

În lucrarea de față, se propune extinderea unui mijloc nou de apreciere cifrică a corelației de mai sus, prin analiza comparativă a variațiilor cromatice care se datoresc factorilor ce interacționează în procesul de imprimare.

---

* Manuscris predat la redacție la 7 octombrie 1966.

II. *Metoda de lucru*

S-au făcut măsurători de culoare cu ajutorul spectrofotometrului prin reflexie „Beckman", asupra unor imprimate obținute prin procedeul offset cu o formă trimetalică etalon, care cuprindea o scară de culori cu șase sectoare, corespunzătoare culorilor de triadă (galben, magenta și cyan) și culorilor de combinație binară a acestora (roșu-portocaliu, albastru-violet și verde). Pentru o mai bună reproducere a culorilor acromatice s-a folosit și tiparul suplimentar cu negru.

Tiparele au fost executate folosindu-se hîrtii și cerneluri indigene și de import (v. tabela 1), adoptîndu-se mai multe variante în ordinea de imprimare a cernelurilor.

Pentru obținerea coeficienților tricromatici x_C și y_C ai celor 6 culori, în scopul reprezentării acestora în diagrama colorimetrică a sistemului C.I.E., s-au parcurs următoarele etape de lucru:

1) Spectrofotometrarea probelor

2) Calcularea factorului de remisie al probelor, cu relația:

$$\beta_\lambda = \frac{\text{remisie probă}}{\text{remisie etalon}} \cdot 91$$

3) Ridicarea curbelor de remisie $\beta_\lambda = f(\lambda)$

4) Citirea pe curbele de remisie respective, a factorilor de remisie corespunzători la 30 de lungimi de undă selecționate prin metoda ordonatelor alese [1], pentru λ_x, λ_y și λ_z.

5) Însumarea factorilor de remisie de mai sus:

$$\sum_x \beta_\lambda, \quad \sum_y \beta_\lambda, \quad \sum_z \beta_\lambda$$

6. Determinarea coordonatelor tricromatice (pentru iluminantul normal C):

$$X_C = X_{NC} \sum_x \beta_\lambda$$

$$Y_C = Y_{NC} \sum_y \beta_\lambda$$

$$Z_C = Z_{NC} \sum_z \beta_\lambda$$

7) Calcularea coeficienților tricromatici, din relațiile:

$$x_C = \frac{X_C}{X_C + Y_C + Z_C} \text{ și } y_C = \frac{Y_C}{X_C + Y_C + Z_C}$$

8) Reprezentarea culorii în diagrama C.I.E. a culorilor.

În continuare, prin unirea în interiorul acestei diagrame a punctelor reprezentative corespunzătoare sectoarelor scării de culori, se obține o suprafață hexagonală reprezentînd „cuprinsul cromatic" al reproducerii, care delimitează gama de culori ce poate fi reprodusă cu o anumită triadă de cerneluri pe sortul de hîrtie respectiv și în anumite condiții tehnologice de imprimare.

Noțiunea de cuprins cromatic este întîlnită în prezent în literatură în special pentru caracterizarea triadelor de cerneluri tipărite pe hîrtii standard. Ea nu are o semnificație numerică, ci se referă numai la poziția hexagonului de mai sus în interiorul diagramei colorimetrice C.I.E., în raport cu poziția cuprinsului cromatic al originalului.

Pentru obținerea unei exprimări cifrice a acoperirii culorilor și plecînd de la faptul că în diagrama culorilor se încadrează teoretic toate culorile de aceeași luminozitate întîlnite în natură, am propus [2] noțiunea de „cuprins cromatic relativ", exprimat în unități procentuale. Acesta se obține prin raportarea suprafeței (planimetrate) a hexagonului cuprinsului cromatic realizat prin imprimare, la suprafața cîmpului culorilor din diagrama C.I.E., adică suprafața delimitată de curba culorilor spectrale și dreapta culorilor purpurii extreme:

$$C_r = \frac{S_h}{S_d} \cdot 100$$

În continuarea cercetărilor, folosirea valorilor cuprinsurilor cromatice realtive la analiza corelației hîrtie-cerneală-mașină de imprimare prezintă un interes practic deosebit.

III. *Rezultate obținute (extrase) și interpretarea lor*

În tabela 1 sînt date valorile cuprinsurilor cromatice relative, în procente, pentru două ordini de imprimare a cernelurilor, mai des folosite în practică: cyan, galben, magenta, negru și galben, magenta, cyan, negru.

Tabela 1

Nr. crt.	Hîrtii utilizate	Cerneluri „Aurora" (offset policromie cu luciu)		Cerneluri „Lorilleux-Lefranc" Franța (G.E.U. Serie 1000 R)	
		Cy-G-M-N	G-M-Cy-N	Cy-G-M-N	G-M-Cy-N
1.	Hîrtie offset tip A. STAS 2662-60 (Combinatul Călărași)	18,6	16,1	15,5	14,6
2.	Hîrtie offset tip B. STAS 2662-60 (F-ca „Comuna din Paris" P.-Neamț)	12,9	14,3	7,6	8,9
3.	Hîrtie cretată STAS 5892-60 (F-ca Ghimbav)	28,4	33,8	35,4	30,5
4.	Hîrtie cretată germană (H.&.M. — R.F.G.)	27,6	24,1	25,0	23,4
5.	Hîrtie offset specială germană (H.&.M. — R.F.G.)	27,2	35,8	29,8	30,7

În figurile 1 și 2 ale diagramei sistemului C.I.E. sînt reprezentate, spre exemplificare și bază de discuții, cuprinsurile cromatice numai pentru primele trei sorturi (pentru a nu încărca figurile) de hîrtii imprimate, respectiv, cu triada de cerneluri indigene „Aurora" și triada franceză „Lorilleux-Lefranc", folosindu-se ordinea de imprimare cyan-galben-magenta-negru.

În tabela 2 se dau valorile unor caracteristici ale hîrtiei, care determină variații cromatice pe imprimate.

Tabela 2

Hîrtia	Caracteristica		
	Grad de alb %	Netezime (față) s	Capacitate de transfer a cernelii %
Hîrtie offset tip A	81,6	17	69,0
Hîrtie offset tip B	67,0	10	66,6
Hîrtie cretată	72,5	508	39,5
Hîrtie cretată R.F.G.	77,3	479	46,0
Hîrtie offset specială R.F.G.	82,2	190	51,7

Din analiza comparativă a cuprinsurilor cromatice relative date în tabela 1 se pot trage următoarele concluzii principale:

1. În ceea ce privește hîrtiile utilizate, indiferent de cerneluri sau de ordinea de imprimare, cele mai scăzute cuprinsuri cromatice relative au fost obținute pe hîrtiile offset indigene. Din tabela 2 rezultă că aceste hîrtii au o netezime foarte scăzută, în special tipul B, care prezintă și un grad de alb scăzut, ceea ce duce la existența valorilor celor mai mici ale cuprinsului cromatic relativ. Influența netezimii relativ scăzute a hîrtiei offset speciale germane asupra cuprinsului cromatic este compensată de valoarea mai ridicată a gradului de alb.

Sortimentele de hîrtii superioare prezintă valori mult mai ridicate și apropiate între ele, ceea ce denotă că hîrtia cretată fabricată în țara noastră egalează sortimentele străine, considerate de un nivel calitativ superior și că există posibilitatea renunțării la importul lor.

Capacitatea de transfer a cernelii este mai redusă la hîrtiile cretate, cu structură microporoasă (capacitate de absorbție mică) și netezime foarte mare.

Hîrtiile tipice pentru offset, mai absorbante și mai puțin netede, dau un aspect mat tiparelor sau un efect de „colorit pastel", ceea ce de altfel le recomandă pe scară largă la imprimarea cărților pentru copii cu ilustrații. De asemenea, un transfer prea ridicat al cernelii pe hîrtie, prin creșterea cantității de cerneală imobilizată în porii sau între asperitățile supra-

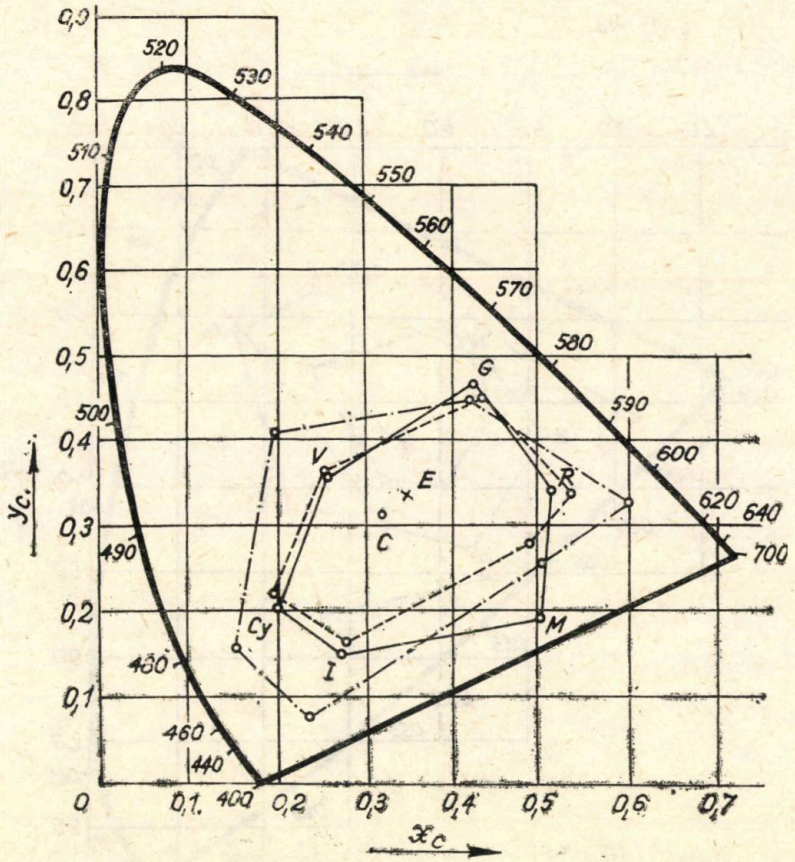


Fig. 1

1.———— Hîrtie offset tip A
2.— — — Hîrtie offset tip B
3.— . — . Hîrtie cretată

Coeficienți tricromatici :

Culoarea	H	x_c	y_c
Cyan C_y	1	0,2016	0,2033
	2	0,2043	0,2200
	3	0,1657	0,1740
Albastru-violet (I)	1	0,2715	0,1571
	2	0,2724	0,1749
	3	0,2310	0,0820
Magenta (M)	1	0,5003	0,1918
	2	0,4814	0,2830
	3	0,5075	0,2542
Roșu-portocaliu (R)	1	0,5138	0,3432
	2	0,5295	0,3386
	3	0,6121	0,3310
Galben (G)	1	0,4265	0,4775
	2	0,4302	0,4649
	3	0,4245	0,4671
Verde (V)	1	0,2665	0,3639
	2	0,2629	0,3651
	3	0,2014	0,4153

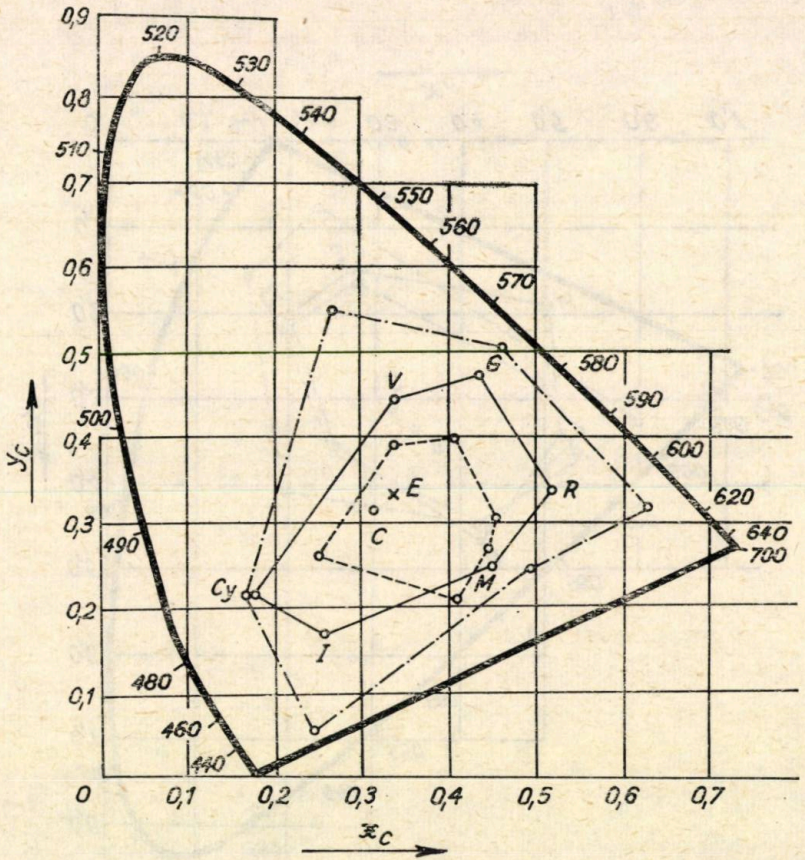


Fig. 2

1. ———— Hîrtie offset tip A
2. — — — Hîrtie offset tip B
3. — · — · Hîrtie cretată

Coeficienți tricromatici :

Culoarea	H	x_c	y_c
Cyan C_y	1	0,1743	0,2102
	2	0,2446	0,2754
	3	0,1757	0,2113
Albastru-violet (I)	1	0,2623	0,1852
	2	0,4183	0,2140
	3	0,2435	0,0645
Magenta (M)	1	0,4406	0,2569
	2	0,4401	0,2806
	3	0,4837	0,2431
Roșu-portocaliu (R)	1	0,5245	0,3374
	2	0,4510	0,3101
	3	0,6270	0,3283
Galben (G)	1	0,4379	0,4799
	2	0,4049	0,4099
	3	0,4642	0,5116
Verde (V)	1	0,3375	0,4520
	2	0,3326	0,3990
	3	0,2781	0,5727

feței hîrtiei offset împiedică probabil desfășurarea normală a efectului fizic al sintezei subtractive a culorilor, sinteză ce pornește de la albul hîrtiei, ceea ce duce la cuprinsuri cromatice relative reduse.

2. In ceea ce privește cele două triade de cerneluri de policromie utilizate, din analiza comparativă a cuprinsurilor cromatice relative se constată, în general, în afara unei excepții asupra căreia revenim mai jos, o asemănare în privința valorilor. Totuși, din figura 2, se observă că triada franceză „Lorilleux-Lefranc" are cuprinsul cromatic mai echilibrat, putînd reproduce o gamă mai largă de nuanțe albastre și verzi. Aceasta reprezintă o calitate a triadei de mai sus, deoarece astăzi, pe plan mondial, se pune problema stabilirii caracteristicilor unor triade coloristic optime, care să prezinte posibilitatea acoperirii cu precădere a unor zone care corespund răspîndirii culorilor în natură.

O constatare importantă (excepția semnalată) este faptul că pe hîrtiile de calitate inferioară, în cazul nostru hîrtia offset tip B (corespunzătoare hîrtiei semi-veline), se obțin cuprinsuri cromatice relative sensibil mai bune cu cernelurile „Aurora" decît cu cernelurile „Lorilleux-Lefranc". Aceasta denotă că cernelurile fabricate în țara noastră sînt mai bine adaptate acestor hîrtii și totodată sînt adecvate și sortimentelor superioare, pe cînd cernelurile franceze sînt adecvate mai ales hîrtiilor de calitate, cu structură microporoasă, apte de a recepționa cerneluri cu polidispersitate ridicată.

Practic, din aceasta rezultă recomandarea, că este inutilă consumarea cernelii respective din import atunci cînd se imprimă pe hîrtii inferioare, în speranța obținerii unui tipar de calitate prin compensarea cu ajutorul cernelii a deficiențelor hîrtiei.

3. Ordinea de imprimare dă naștere la variații cromatice mai importante în cazul hîrtiilor superioare, ceea ce recomandă ca stabilirea ordinii optime de imprimare să se facă numai pentru aceste hîrtii, în timp ce la imprimarea pe hîrtiile offset obișnuite variația condițiilor de imprimare nu are un efect determinant.

IV. *Concluzii*

Din compararea datelor obținute cu aprecierile subiective ale aspectului imprimatelor, rezultă că, studierea interacțiunii hîrtie-cerneală-mașină de imprimare cu ajutorul noțiunii de cuprins cromatic relativ este perfect justificată. Această noțiune constituie o mărime obiectivă, ce constituie un mijloc practic pe baza căruia se pot executa comenzi tehnologice pentru procesul de imprimare. Metoda poate aduce reale avantaje economice și ea aduce o contribuție la realizarea condițiilor de normalizare a proceselor tehnologice în poligrafie, normalizare ce reprezintă și pe plan mondial una din cele mai dezbătute teme.

De asemenea, continuarea studiului deschide orizonturi de cercetare atrăgătoare, pentru ca să se stabilească într-un mod mai complet, care dintre caracteristicile hîrtiei și cernelii de tipar au efecte determinante asu-

pra culorii şi care sînt valorile optime ale acestor caracteristici, astfel încît reproducerea originalului policrom să se facă cu cea mai mare fidelitate.

În acest mod, se vor putea face recomandări precise industriilor respective, în scopul îmbunătăţirii calităţii materialelor de mai sus.

Catedra de tehnologie organică, combustibili şi poligrafie

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. STAS 6880-30 Metoda spectrală pentru determinarea coordonatelor tricromatice ale culorilor cu ajutorul ordonatelor alese

2. *Bădescu Th., Râşcanu D.* şi *Bălan V.*, Studiul comarativ al variaţiilor cromatice ale unor cerneluri de triadă pentru procedeul de tipar offset. Comunicare la a III-a Conferinţă Republicană de Chimie, Timişoara, iunie 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z.: 621.35:66.097.4:669.712

ACTIVITATEA CATALITICĂ A UNOR ALUMINE REDUCĂTOARE NESTOECHIOMETRICE *

LIVIU LITERAT
Institutul politehnic Cluj

Într-o lucrare anterioară (1) am cercetat activitatea catalitică a unor alumine reducătoare nestoechiometrice preparate de noi prin calcinarea în vid a unor eșantioane de alumină hidratată amorfă (2, 3).

Am arătat cu acea ocazie că, spre deosebire de aluminele obișnuite, acestea dirijează reacția de descompunere catalitică a acidului formic, în sensul dehidrogenării. Din datele cinetice am căutat explicarea mecanismului de reacție și dovezi asupra naturii centrilor activi de cataliză pentru dehidrogenare și legat de aceștia asupra nestoechiometriei.

În prezenta lucrare venim cu noi date experimentale și analizăm mecanismul de reacție ca și natura centrilor activi de cataliză pe baza cercetărilor de variație a rezistenței electrice a stratului de catalizator în condițiile de reacție, completate cu determinări spectrofotometrice de absorbție în infraroșu. În interpretarea datelor experimentale am ținut seamă și de caracteristicile magneto-electrice ale acestora (4,5).

Partea experimentală

S-au executat măsurători simultane pentru viteza de reacție și rezistența electrică a stratului de catalizator, utilizînd aparatura redată în fig. 1. Parametrii cinetici au fost urmăriți separat pe alumină și alumină nestoechiometrică ($\overline{Al_2O_3}$) la descompunerea acidului formic în regim dinamic. S-a utilizat HCOOH 90% p.a. „Analar". S-a lucrat în mic exces de HCOOH la alimentare (viteza cuprinsă între 0,3—0,4 ml/min) spre a plasa reacția de descompunere catalitică cît mai aproape de ordinul cinetic zero (6).

Catalizatorii (alumină și alumină nestoechiometrică) au fost pe cît posibil identici în ceea ce privește cantitatea, granulația, gradul de tasare etc., spre a se îngădui compararea directă a rezultatelor.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 28—30 mai 1965.

Valorile obținute sînt prezentate în tabelele 1 și 2 pentru alumină și alumină nestoechiometrică, iar în tabelul 3 pentru descompunerea HCOOH în vasul gol, de sticlă razotherm.

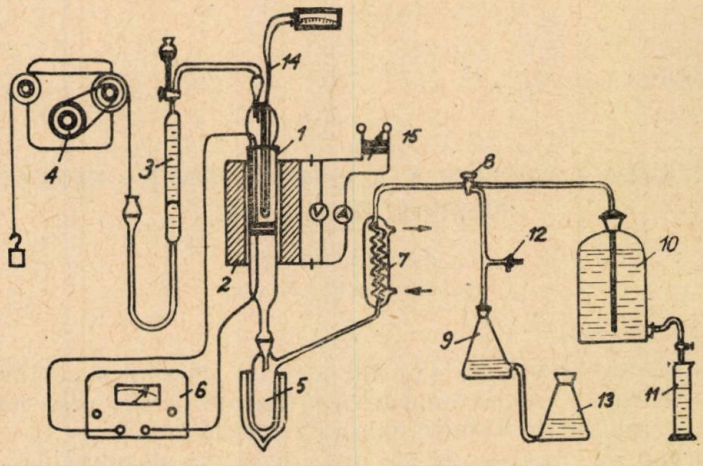


Fig. 1. Aparatura de studiu concomitent a cineticii și rezistenței electrice a stratului de catalizator în timpul procesului catalitic.
1 — vas de reacție (razotherm) ; *2* — cuptor electric ; *3* — biuretă pentru alimentare ; *4* — mecanism de ceasornic pentru alimentare constantă, automată ; *5* — vas de condensare ; *6* — megohmmetru ; *7* — refrigerent ; *8* — robibet cu trei căi ; *9* și *13* — dispozitiv de preluare a gazelor pentru analiză ; *10* — vas Mariotte ; *11* — cilindru gradat ; *12* — robinet ; *14* — ternocuplu Pt/PtRh ; *15* — autotransformator.

Tabelul 1

Descompunerea catalitică a HCOOH 90% pe alumină hidratată amorfă

t°C	V g ml N/ml acid, g. min.	Compoziție %		
		CO_2	H_2	CO
300	176	31,7	32,2	25,9
350	210	32,5	36,8	25,7
400	328	37,4	37,6	22,7
450	467	37,6	39,3	19,3

În fig. 2 și 3 sînt redate curbele cinetice pentru reacția de deshidratare, respectiv dehidrogenare a HCOOH pe alumină, $\overline{Al_2O_3}$ și în vasul gol. Ordonata redă logaritmul zecimal al volumului normal de CO respectiv CO_2 produs într-un minut prin descompunerea unui mililitru HCOOH 90% pe un gram de catalizator (1, 7, 14).

Tabelul 2

Descompunerea catalitică a HCOOH 90% pe Al_2O_3

t°C	V g ml N/ml acid g cataliz. minut	Compoziție %		
		CO_2	H_2	CO
290	163	42,0	48,0	10,0
300	194	44,6	45,7	6,8
320	183	40,2	37,1	15,9
330	203	36,3	40,3	16,7
350	252	38,5	41,8	19,2
370	295	33,5	38,4	23,6
400	365	32,5	41,1	24,6

Tabelul 3

Descompunerea catalitică a HCOOH 90% în vasul de reacție (sticlă razotherm)

t°C	V g ml N/min.	Compoziție %		
		CO_2	H_2	CO
300	254	46,9	48,1	1,9
340	326	48,5	48,4	1,8
360	530	48,1	48,0	1,7
400	800	48,1	47,5	1,7

Tabelul 4

Energia de activare aparentă pentru descompunerea HCOOH 90%

Pentru reacția de		în vas de reacție	pe alumină	pe alumină nestoechiometrică
deshidratare	E_{H_2O}	22000 cal/mol	5660 cal/mol	12.019 cal/mol
	$k_{0_{H_2O}}$	$4{,}37.10^8$	$5{,}20.10^3$	$8{,}16.10^5$
dehidro-genare	E_H	20.698 cal/mol	10.420 cal/mol	4.110 cal/mol
	k_{0_H}	$1{,}48.10^9$	$3{,}13.10^5$	$2{,}7.10^3$

În tabelul 4 sînt redate valorile energiilor de activare și a factorilor de frecvență calculate din reprezentarea log V-$^1/_T$, pentru cele două sensuri de descompunere catalitică.

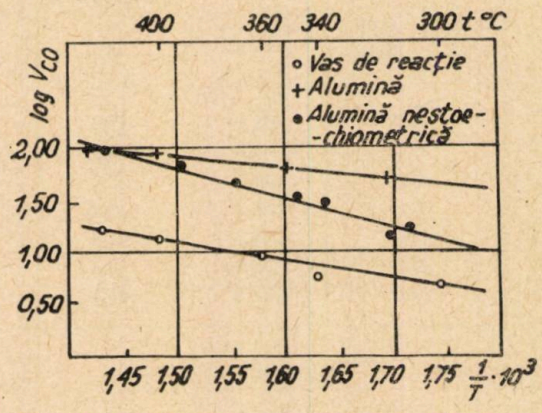


Fig. 2. Curbele cinetice pentru reacția de deshidratare a HCOOH.

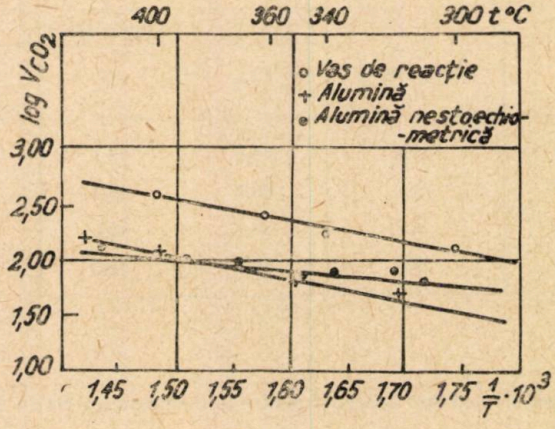


Fig. 3. Curbele cinetice pentru reacția de dehidrogenare a HCOOH.

Din raportul volumelor CO/CO_2 rezultate dintr-un mililitru HCOOH descompus pe un gram catalizator în timp de un minut s-a evaluat coeficientul de selectivitate (8). Rezultatele sînt trecute în tabelul 5 și fig. 4.

În fig. 5 și tabelul 6 sînt date valorile rezistenței electrice a stratului catalitic de $\overline{Al_2O_3}$ pentru cîteva temperaturi în vid, hidrogen și condițiile de reacție.

Am căutat completarea și verificarea datelor cinetice prin studii spectrofotometrice de absorbție în infraroșu. Condițiile de lucru au fost alese în

așa fel încît să se poată deduce din evidențierea produșilor de reacție și a formei sub care molecula de HCOOH este adsorbită, relații referitoare la mecanismul de reacție și natura centrilor activi de cataliză (9).

Înregistrările s-au făcut la un spectrofotometru Zeiss UR 10 la Institutul de Chimie al Academiei Republicii Socialiste România, Filiala Cluj, utilizînd tehnica pastei în nujol.

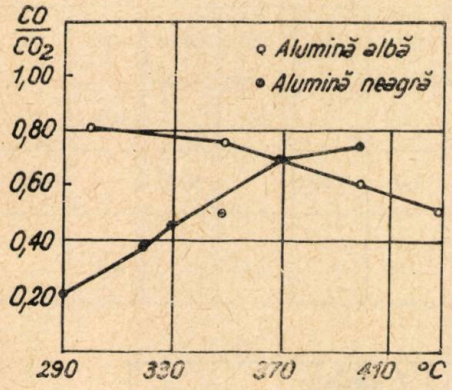


Fig. 4. Variația coeficientului de selectivitate CO/CO_2 cu temperatura.

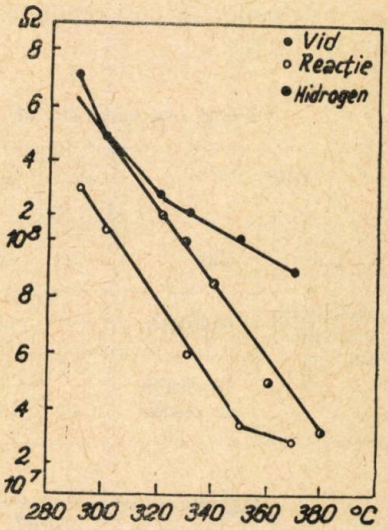


Fig. 5. Variația rezistenței electrice a $\overline{Al_2O_3}$ cu temperatura în vid, în atmosferă de hidrogen și în condițiile de reacție.

Tabelul 5

Temperatura °C	290	300	320	330	350	370	400	450	Obs.
Coef. de selectivitate CO/CO_2	—	0,822	—	—	0,770	—	0,610	0,514	alumină
	0,238	0,146	0,383	0,460	0,498	0,706	0,750	—	$\overline{Al_2O_3}$

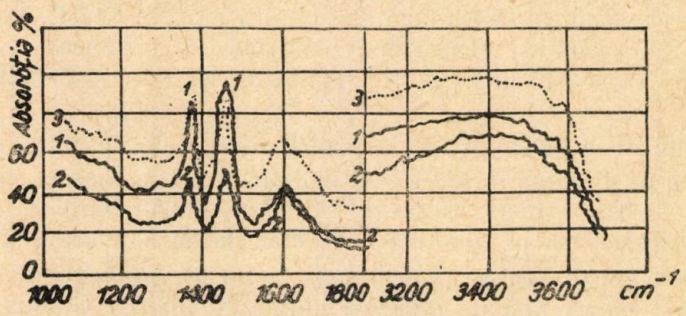


Fig. 6. Spectrul de absorbție IR pentru alumină (1), HCOOH adsorbit pe alumină (2) și al produșilor de descompunere a HCOOH pe alumină (3).

S-a urmărit succesiv spectrul de absorbție IR pentru suportul catalitic de alumină și alumină nestoechiometrică, apoi au fost înregistrate spectrele pentru HCOOH adsorbit pe cele două alumine ($p_{ech.}$ = 20 mm Hg la 20°C) și a produșilor de descompunere catalitică (220°C). Înregistrările sînt redate în fig. 6 și 7.

Tabelul 6

Variația rezistenței electrice cu temperatura pentru $\overline{Al_2O_3}$, ohm × 10^8

Temperatura °C		290	300	320	330	340	350	360	370	380
Rezistența electrică în	Vid	7,0	4,8	2,7	2,0	—	2,1	—	0,9	—
	Hidrogen	—	4,8	2,0	1,0	0,82	—	0,48	—	0,32
	Condițiile de reacție	3,0	1,4	2,0	0,60	—	0,36	—	0,3	—

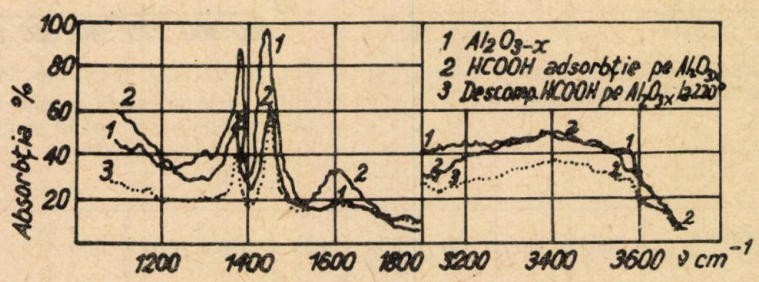


Fig. 7. Spectrul de absorbție IR pentru alumină nestoechiometrică (1), HCOOH adsorbit (2) și al produșilor de descompunere (3).

Discuția rezultatelor experimentale

Datele experimentale arată comportări complet diferite pentru cele două alumine în procesul de descompunere catalitică a HCOOH. Așa cum s-a mai arătat (1), alumina dirijează descompunerea în sensul deshidratării, iar alumina nestoechiometrică se manifestă ca un catalizator dehidrogenant.

Energiile de activare aparente pentru reacția de deshidratare sînt de 5660 cal/mol pe alumină și 12.019 cal/mol pe $\overline{Al_2O_3}$, în timp ce pentru dehidrogenare 10.420 cal/mol respectiv 4,110 cal/mol. Deshidratarea, prin urmare, se desfășoară pe alumină cu o energie de activare abia jumătate din cea observată pe $\overline{Al_2O_3}$, iar dehidrogenarea pe $\overline{Al_2O_3}$ păstrează aproximativ același raport față de alumina hidratată amorfă. Cu toate acestea, vitezele de reacție în cele două sensuri nu sînt mult deosebite din cauza factorilor de frecvență ce manifestă o acțiune nivelatoare.

Din tabelul 3 rezultă că și vasul de reacție prezintă o activitate catalitică apreciabilă, dirijînd descompunerea HCOOH în sensul dehidrogenării. Datele obținute pentru energia de activare și factorii de frecvență sînt în bună concordanță cu valorile date de alți autori pentru descompunerea HCOOH pe sticlă (11).

Valorile pronunțat diferite ale factorilor de frecvență sugerează specificitatea centrilor activi pentru cele două direcții de transformare catalitică pe aluminele studiate.

În ceea ce privește deshidratarea în acord cu G. Schwab (12), G. Dalmai (13), A. Freidlin (14) și alții, considerăm că centrii activi sînt grupările OH de suprafață și porii înguști sub 100 Å diametru.

Acest lucru îl atestă spectrele de absorbție IR ale aluminei în care se disting la 1620 cm^{-1} și în domeniul 3200—3500 cm^{-1}, maxime datorită vibrațiilor de valență (ν_{OH}) ale boehmitei și grupărilor OH de suprafață (15, 16). Benzile de absorbție late și intense din domeniul 3200—3600 cm^{-1} se datoresc asociațiilor create prin legături de hidrogen (16, 17) și eventual apei adsorbite. Pe alumina nestoechiometrică acestea lipsesc complet la 1620 cm^{-1}, iar în domeniul numerelor de undă mari apare o ușoară tendință de individualizare a unor maxime la 3150—3200, 3400 și 3580 cm^{-1}, ceea ce indică lipsa asociațiilor plane prin legături de hidrogen. Comparînd intensitatea de absorbție a acestora față de benzile nujolului (1380, 1470 cm^{-1}) se obține o indicație cantitativă asupra densității grupărilor -OH de suprafață și se observă că pe $\overline{Al_2O_3}$ concentrația acestora este considerabil mai mică decît pe alumina hidratată (9, 16).

În ceea ce privește porozitatea, am arătat într-o notă anterioară (18), că în alumină distribuția porilor este practic monodispersă în domeniul microporilor (cuprins între 10—30 Å), iar pentru $\overline{Al_2O_3}$ aceasta este deplasată între 50—70 Å.

Depedența vitezei de reacție de temperatură evaluată prin intermediul coeficientului de selectivitate, arată că o dată cu ridicarea temperaturii, pe alumină descompunerea HCOOH se dirijează spre dehidrogenare. Comportarea aceasta confirmă întru totul cele semnalate de Sabatier încă în 1911 (10) și verificate de Schwab și colab. (12). Regresarea procentului de CO în gazele de descompunere denotă că la ridicarea temperaturii are loc fie o modificare a suprafeței active, fie desfășurarea unor reacții secundare, cum ar fi reacția de gaz de apă sau de formare a aldehidei formice (10, 12). Trebuie precizat că în determinările efectuate nu a fost pusă în evidență formarea de aldehidă formică, ceea ce înseamnă că seria de reacții a fost continuată pînă la capăt (10).

$$2HCOOH \rightarrow CH_2O + CO_2 + H_2O \quad (1)$$

$$HCOOH + CH_2O \rightarrow CH_3OH + CO_2 \quad (2)$$

$$CH_3OH \rightarrow CO + 2H_2 \quad (3)$$

Pe alumina nestoechiometrică reacția catalitică a fost dirijată în sensul dehidrogenării. Centrii activi de cataliză pot fi atomii excedentari de Al, porii largi sau punțile Al-O-Al (12, 13, 14).

Studiul variației rezistenței electrice cu temperatura pentru stratul catalitic de $\overline{Al_2O_3}$ în condițiile de reacție, precum și cercetările de rezonanță electronică paramagnetică (5), ne fac să înclinăm a atribui caracterul dehidrogenant aluminiului excedentar și mai puțin porilor mari sau punților de oxigen. Afirmăm aceasta întrucît s-a arătat (18) că diametrul porilor cu distribuția preponderentă se află la limita inferioară a domeniului de eficacitate dehidrogenantă maximă (100—140 Å) precizat de Schwab. De asemenea la suprafața granulelor de alumină nestoechiometrică planele reticulare de oxigen au fost în mare măsură îndepărtate prin calcinarea în vid, de aceea posibilitatea acestora abia dacă poate fi luată în discuție.

Prin urmare, dacă centrii activi de cataliză sînt atomii de Al excedentar, atunci reacția de descompunere a HCOOH are loc ca pe metale (20, 21).

Dacă pentru alumină mersul descompunerii HCOOH evaluat prin coeficientul de selectivitate nu ridică probleme deosebite, nu același lucru se petrece pe $\overline{Al_2O_3}$. După cîte rezultă din fig. 3, o dată cu ridicarea temperaturii reacția se deplasează sensibil spre deshidratare. Datele cinetice arată că de la sub 10% CO în gazele de descopunere la 300°C, proporția acestuia crește vertiginos la peste 15% pentru 320°C și ajunge la 400°C de 24,6%. De asemenea conținutul ceva mai mare în H_2 decît CO_2 în produșii de reacție odată cu creșterea temperaturii indică desfășurarea unor procese ceva mai complexe la suprafața de contact a $\overline{Al_2O_3}$.

O explicație ar putea fi modificarea compoziției chimice a catalizatorului ca rezultat al reacției

$$Al + 3HCOOH \rightarrow Al(HCOO)_3 + {}^3/_2H_2 \qquad (4)$$

care ar restabili totodată și stoechiometria aluminei. Dar întrucît nici după foarte multă vreme de utilizare nu s-a observat nici o schimbare sensibilă de culoare pentru $\overline{Al_2O_3}$, se poate considera că atomii de metal excedentar sînt puternic disimulați, ceea ce conferă o stabilitate deosebită probelor în condițiile de reacție.

Variația rezistenței electrice cu temperatura în condițiile de reacție aduce o oarecare contribuție în interpretarea mecanismelor de reacție și explicarea schimbării de selectivitate peste 350°C.

Rezultă din tabelul 6 și fig. 4, că în atmosferă de hidrogen și în condițiile de reacție valoarea rezistenței electrice a $\overline{Al_2O_3}$ este pentru întregul interval cercetat mai mică decît în vid. Dacă în atmosferă de H_2 valorile sînt practic egale cu cele în vid pînă la 300°C, o dată cu ridicarea temperaturii diferența între ele devine din ce în ce mai mare.

Explicația este dată de Y. Kubocawa și A. Toyama (22), arătînd că pe semiconductorii *n* adsorbția hidrogenului la temperaturi joase se face fizic și că o dată cu ridicarea temperaturii o proporție din ce în ce mai mare este chemisorbită. Ca rezultat concentrația electronilor de conductibilitate în solidul studiat crește și are loc corespunzător o micșorare a rezistivității electrice.

Un alt fapt interesant subliniază paralelismul riguros al curbelor $R = f(t)$ pentru $\overline{Al_2O_3}$ în atmosferă de hidrogen și în condițiile de reacție.

Judecînd după panta acestora, considerăm că mersul foarte asemănător trebuie să se datorească aceluiaşi fenomen de bază şi anume îl atribuim variaţiei conductibilităţii electrice cu temperatura pentru semiconductori în atmosferă condiţionată (23).

Paralelismul dreptelor $R = f(t)$ arată că în condiţiile de reacţie, hidrogenul rezultat din descompunerea catalitică a HCOOH este adsorbit în stratul catalitic ($\overline{Al_2O_3}$) exact după aceleaşi legi ca şi în atmosferă de hidrogen. Pantele identic înclinate dovedesc aceeaşi energie de activare şi deci acelaşi fenomen.

Frîngerea de pantă la 350°C arată o strînsă legătură cu cele observate cinetic şi anume cu schimbarea de selectivitate în descompunerea HCOOH peste 350°C.

Se pare că peste 350°C concentraţia electronilor proveniţi prin adsorbţia ionizată a hidrogenului rezultat din reacţie, contribuie ea însăşi la schimbarea mecanismului de reacţie în descompunerea ulterioară a HCOOH pe $\overline{Al_2O_3}$.

În aceste condiţii are loc probabil o deplasare a echilibrului reacţiei de formare a gazului de apă

$$CO_2 + H_2 \rightleftharpoons CO + H_2O \qquad (5)$$

spre dreapta, cu consumarea unei cantităţi echivalente de hidrogen, ceea ce determină o deplasare corespunzătoare a seriei de echilibre

$$2H^+ + 2e^- \rightleftharpoons 2H \rightleftharpoons H_2^{(ads)} \rightleftharpoons H_2^{(g)} \qquad (6)$$

care se traduce prin scăderea gradientului de variaţie a conductibilităţii electrice cu temperatura.

Totodată se poate preciza că iniţial descompunerea HCOOH urmează sensul dehidrogenării, iar ca rezultat al reacţiei de formare a gazului de apă procentul de CO din gazele rezultate arată o dirijare a selectivităţii spre deshidratare.

Se precizează de asemenea că în procesul catalitic cercetat factorul electronic este hotărîtor. Aceasta este confirmată şi de faptul că energiile de activare ale procesului catalitic şi de conductibilitate electrică au valori de acelaşi ordin de mărime (24, 25).

Să revenim puţin asupra mecanismului de reacţie. Înregistrările spectrofotometrice (2) din fig. 6 şi 7 arată că HCOOH este adsorbit pe ambele alumine sub formă ionică. Maximele de absorbţie la 1344, 1402 şi 1620 cm^{-1} corespunzătoare vibraţiilor ν_2, ν_5 şi ν_4 ale ionului $HCOO^-$ (19) arată că pe alumină şi alumină nestoechiometrică acidul formic este adsorbit sub formă ionică. Aceasta înseamnează, aşa cum au arătat K. Hirotta şi colaboratorii (19), că acoperirea a fost inferioară completării stratului monomolecular. Ţinînd seama că valoarea suprafeţei specifice pentru $\overline{Al_2O_3}$ este de aproximativ 2—3 ori mai redusă faţă de a aluminei hidratate amorfe (18, 25) şi întrucît presiunea de echilibru de absorbţie a fost identică, s-ar putea ca pe $\overline{Al_2O_3}$ forma ionică de adsorbţie a acidului formic să fie o dovadă că centrii activi de adsorbţie şi cataliză sînt atomii de Al excedentar

și că în consecință procesul se desfășoară urmînd mecanismul descompunerii de metale (19,20).

Prin urmare, atît pe alumină, cît și pe $\overline{Al_2O_3}$, cel puțin la grade de acoperire mici, mecanismul de reacție ar trebui să fie identic, întrucît existența ionilor formiat în stratul adsorbit ar lăsa să se aștepte desfășurarea reacției după schema :

$$HCOOH \rightarrow HCOO^-_{(ads)} + H^+ \quad (7)$$

$$2HCOO^- \rightarrow H_2 + 2CO_2 \quad (8)$$

reacția primă fiind dehidrogenarea.

Datele cinetice arată însă că numai pentru $\overline{Al_2O_3}$ mecanismul de reacție este confirmat de proporția și compoziția produșilor de reacție. Spre a explica deshidratarea, este necesar să se presupună că pe alumină se desfășoară procesul ca o reacție succesivă, realizîndu-se un echilibru de gaz de apă mult deplasat spre formarea de CO și apă (19, 21).

Acest raționament este întărit și de determinările spectrofotometrice de absorbție IR.

Astfel, pe alumină (fig. 5, curba 2) alături de benzile caracteristice ale catenei, maximul bine conturat la 1344 cm^{-1} indică prezența acidului formic încă netransformat (ν_2), iar creșterea pronunțată a benzii 1620 cm^{-1} alături de intensificarea absorbției și lățimea benzii în domeniul 3200—3600 cm^{-1}, denotă că descompunerea a luat calea deshidratării. Intensitatea deosebit de pronunțată a absorbției în aceste domenii de numere de undă și care se datorește apei adsorbite fizic, nu se poate explica decît că în condițiile în care a fost condus procesul apa rezultată din descompunerea HCOOH a fost obligată să rămînă adsorbită pe alumină.

Întrucît la descompunerea HCOOH pe $\overline{Al_2O_3}$ toate aceste indicii lipsesc, este o dovadă că sensul reacției catalizate a fost dehidrogenarea.

Concluzii

Din cercetările efectuate se desprind cîteva concluzii referitoare la activitatea catalitică a aluminelor nestoechiometrice și anume :

— Aluminele nestoechiometrice sînt catalizatori dehidrogenanți. Ecuația de viteză de reacție pentru dehidrogenare este de forma $k_H = 2{,}7 \cdot 10^3 \exp\left(-\frac{2060}{T}\right)$, iar pentru deshidratare $k_{H_2O} = 8{,}15 \cdot 10^5 \exp\left(-\frac{6080}{T}\right)$.

— Energia de activare aparentă pentru cele două sensuri de descompunere catalitică a HCOOH este net deosebită.

— Factorii de frecvență au acțiune nivelatoare asupra vitezei de reacție.

— Variația rezistenței electrice a catalizatorului ($\overline{Al_2O_3}$) prezintă o frîngere de pantă la 350°C și corespunzător acesteia s-a constatat o schimbare în compoziția produșilor de reacție. Aceasta a fost atribuită schimbării mecanismului de reacție determinată de factorul electronic al catalizatorului.

Determinările spectrofotometrice de absorbție IR au arătat că pe ambele alumine HCOOH este adsorbit ionic.

Mecanismul descompunerii HCOOH pe alumină are loc prin reacții succesive și stabilirea unor echilibre de gaz de apă.

Centrii activi ai deshidratării sînt grupările OH de suprafață și porii înguști, iar ai dehidrogenării atomii de aluminiu excedentar care determină și abaterea de la compoziția stoechiometrică.

BIBLIOGRAFIE

1. *Literat L.* Buletinul Științific al Inst. Politehnic Cluj, *5*, 107 (1962).
2. *Literat, L.* Buletinul Științific al Inst. Politehnic Cluj, *5*, 81 (1962).
3. *Juillet Fr., Teichner S., Prettre M.*, C. R. *249*, 1895 (1962).
4. *Literat, L.* Buletinul Științific al Inst. Politehnic Cluj, *5*, 95 (1962).
5. *Literat L.* Buletinul Științific al Inst. Politehnic Cluj, *7*, 95 (1964).
6. *Block J., Kral H. Z.* Elektrochemie, *63*, Nr. 2, 182 (1959).
7. *Bolotov B. A., Komarov V. A., Nizovkina T. V.* Practiceskie rabotî po organicescomu catalizu, Izd-vo Leningradscovo Universiteta (1959).
8. *Krîlov O., Roghinski S. Z., Fokina E. A.* Izd. Akad. Nauk SSSR, *4*, 421 (1957).
9. *Literat L.* Buletinul Științific al Inst. Politehnic Cluj, *6*, 119 (1963).
10. *Sabatier P., Maihle A.*, C. R. *152*, 1212 (1911).
11. *Hinselwood C., Topley G.*, J. Chem. Soc. *71*, 1806 (1949).
12. *Schwab G. M., Schwab-Agallidis E.* J. Amer. Chem. Soc. *71*, 1806 (1949).
13. *Dalmai G.* Fr. de Pradel, B. Imelik, J. chim. phys. *59*, 1 (1959).
15. *Orsini L., Petitjean M.*, C. R. *237*, 326 (1953).
16. *Lecomte* J. Bull. Soc. Chim. France, *7*, 1049 (1959) ; *8*, 1081 (1959).
17. *Grimm R.* Clay Mineralogy, N. W. Toronto (1963).
18. *Literat L.* Buletinul Științific al Inst. Politehnic Cluj, *8*, (sub tipar).
19. *Hirotta K., Fueki K., Nakai V., Shindo K.* Bull. Soc. Chem. Japan, *31*, 783 (1958).
20. *Block J., Vogel J.* Z. Elektrochem. *63*, Nr. 1, 3 (1959).
21. *Fahrenfort J., Reyen L. L.* van, *Sachtler M. W.* Z. Elektrochem. *64*, 217 (1960).
22. *Kubocawa, Y., Toyama O.* Bull. Naniwa Univ. *A2*, 103 (1954).
23. *Heckelsberg L., Bayley G., Clark A.*, J. Amer. Chem. Soc. *77*, 1313 (1959).
24. *Garner B. W. E.* Advances in Catalysis, *IX*, 169 (1957).
25. *Literat L.* Teză de disertație, Cluj (1964).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z.: 546.284:661.8...65:666.9:691.5

NOTĂ

CU PRIVIRE LA MECANISMUL PROCESULUI DE ÎNTĂRIRE A SILICATULUI TRICALCIC ȘI A β-SILICATULUI BICALCIC *

ION TEOREANU

Într-o lucrare precedentă [1] am tratat cinetica întăririi lianților pornind de la imaginea dată de Rebinder [2] pentru mecanismul acestui proces. În studiul menționat [1], un caz particular îl reprezintă lianții a căror viteză de dizolvare în apă este relativ mică; în această categorie pot fi cuprinși, de pildă, silicații de calciu. În procesul de întărire a acestor lianți dizolvarea în apă va fi determinantă de viteza ($v_d < v_h$; $v_d < v_c$). Ca urmare, s-a obținut pentru viteza procesului:

$$N = -\frac{Dc_s}{l}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 De^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D + k\right]t}}{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D + k}\right] \qquad (1)$$

Viteza de întărire este deci variabilă în timp, expresia sa fiind o funcție neliniară de timp.

Pornind de la relația (1) se poate scrie pentru gradul de transformare (de hidratare) a liantului;

$$G = \frac{1}{v_0}\int_0^t \frac{4\pi r^2 MDc_s}{l\gamma_s}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k + \left(\frac{\pi r}{l}\right) De^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D + k\right]t}}{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 D + k}\right] dt. \qquad (2)$$

Pe de altă parte, examinîndu-se cazul cînd viteza de dizolvare a liantului este mai mare decît viteza sa de hidratare în soluție ($v_h < v_d$; $v_h < v_c$), s-a stabilit pentru gradul de transformare a liantului (lianți monominerali):

$$G = k^* t$$

* Manuscris predat la redacție la 10 martie 1967.

Rezultă din cele arătate că, reprezentînd grafic gradul de transformare în funcție de timp, abaterea de la o linie dreaptă va fi cu atît mai mare cu cît viteza de dizolvare în apă a liantului va fi mai mică ; atunci cînd aceasta va fi egală sau mai mare decît viteza de hidratare, se va obține o variație lineară a mărimii G în raport cu timpul.

Prelucrînd unele date experimentale existente în literatură [3, 4] pentru întărirea C_3S și β-C_2S, se constată o variație neliniară cu timpul a gradului de hidratare a acestor silicați, abaterea de la o linie dreaptă a curbelor obținute fiind mult mai accentuată — așa cum era și de așteptat — pentru βC_2S (fig. 1). Ținînd seama de cele arătate, este probabil ca mecanismul propus în lucrarea [2], precum și relația (1) să descrie în mod satisfăcător procesul de întărire a silicaților de calciu la care ne-am referit, în acest caz determinant de viteză pentru întregul proces fiind dizolvarea în apă a lianților.

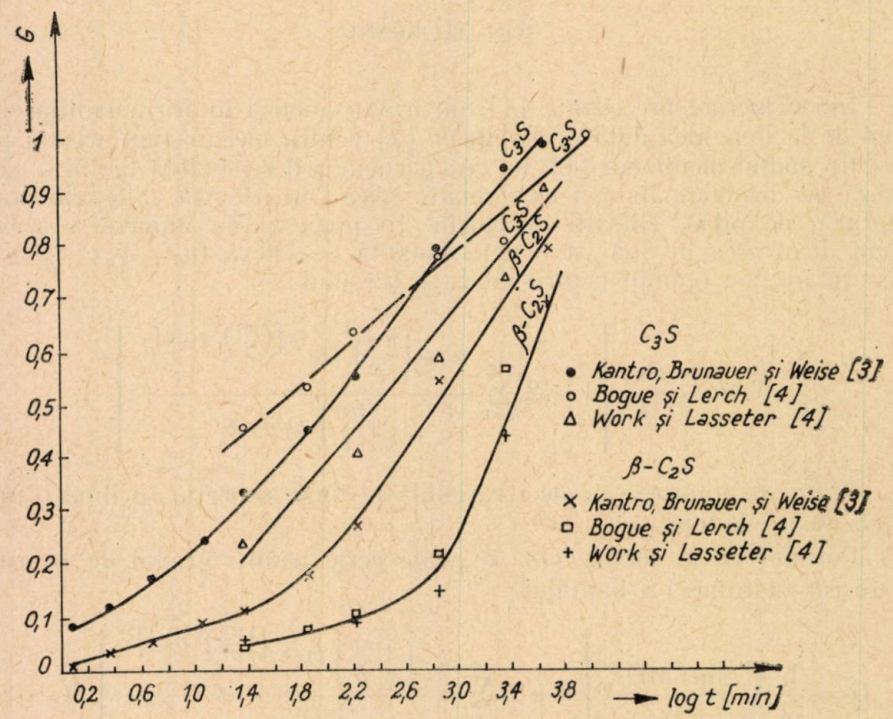


Fig. 1

Notații

N este numărul de moli de liant consumat în unitatea de timp și unitatea de suprafață ;

D — coeficientul de difuzie ;

c_s — concentrația de saturație a liantului ;

l — raza porilor dintre partriculele de liant din sistemul supus întăririi ;
k — constanta vitezei de hidratare ;
t — timp ;
G — gradul de transformare a liantului ;
v_0 — volumul inițial a unei particule de liant ;
r — raza partriculei de liant ;
M — greutatea moleculară a liantului ;
γ_s — greutatea specifică a liantului ;
k^* — constantă de proporționalitate ;
v_d — viteza de dizolvare a liantului ;
v_h — viteza de hidratare a liantului ;
v_c — viteza de cristalizare a noilor formațiuni de hidratare.

Laboratorul de materiale de construcție
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București.

BIBLIOGRAFIE

1. *Teoreanu, I.*, Zum mechanismus der Bindemittelerhärtung. Rev. Roumaine Chim. nr. 4, **10**, 239, 1965.
2. *Segalova, E. E.* și *Rebinder, P. A.*, Sovremennie fizico-himiceskie predstavlenia o protessah tverdenia mineralnîh viajușcih veșcestv. Stroit. mat. nr. 1, 21, 1960.
3. *Kantro, D. L., Brunauer, S.* și *Weise C. H.*, Developement of Surface in the Hydratyon of Calcum Silicats II. Extension of Investigations to Earlier and Later Stages of Hydration, J. Phys. Chem. nr. 10, 66, 1804, 1962.
4. *Tsumura, S.*, Der Hidratationsmechanismus der klinkerminerale in pastenform. Zement-Kalk-Gips, nr. 11, **19**, 511, 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

ELECTROTEHNICA

C.Z.: 621.3.015:621.372.5:621.315:621.3.09

UN NOUVEAU CRITÉRIUM POUR LA DÉTERMINATION DE LA PRÉCISION DE LA SIMULATION SUR UNE CHAÎNE DE QUADRIPÔLES DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE SUR UNE LIGNE ÉLECTRIQUE LONGUE *)

I. S. ANTONIU, I. ADĂMUȚ

1. Généralités

Dans un travail antérieur [1] **), [2], on a présenté les premiers résultats tirés de l'interprétation des diagrammes obtenus sur le calculateur électrique de type analogique, MECAN II [3] relatifs au problème de la précision du modelage du phénomène de propagation. Les expression analitiques déduites ont eu comme point de départ trois critériums adaptés d'après ceux déjà connus dans la technique des impulses électriques [4] et dans celle de la haute tension [5], [6], à savoir : le critérium des aires (des temps moyens), le critérium des temps instantanés maximums et le critérium de la pente ou de la tangente. On a prouvé que le critérium des temps instantanés variables à tension constante donne les plus petits écarts entre les valeurs mesurées et celles calculées ; ce critérium a une dépendance hyperbolique avec le nombre des cellules de la chaîne des quadripôles qui simule cette ligne électrique longue.

Dans ce travail on propose un nouveau critérium à l'aide du quel on a établi de nouvelles relations entre le nombre des quadripôles de la chaîne et la précision de modelage.

2. Le critérium de la tension instantanée variable au temps constant

Dans les conditions de fonctionnement correcte du calculateur électronique analogique ou du modèle physique qui simule une ligne électrique longue (fig. 1), la courbe de réponse à la tension ou à une autre grandeur applique à l'entrée de la chaîne de quadripôles doit avoir la même allure pour un même nombre de cellules en chaîne. Par conséquant de la connai-

*) Communiquée à la session scientifique des cadre didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest, 27—29 Mai 1966.

**) Les chiffres entre crochets se raportent à la bibliographie.

sance du mode de variation de la courbe de réponse dans le plan u, τ on peut déduire une relation $u=f(n)$, dans la quelle u est le signal (la tension ou une autre grandeur), à l'entrée de la chaîne de quadripôles, qui se propage sur la ligne, n este le nombre de cellules qui forment la chaîne de quadripôles. Il este évident que pour $n=\infty$, la chaîne de quadripôles devient la ligne étudiée même.

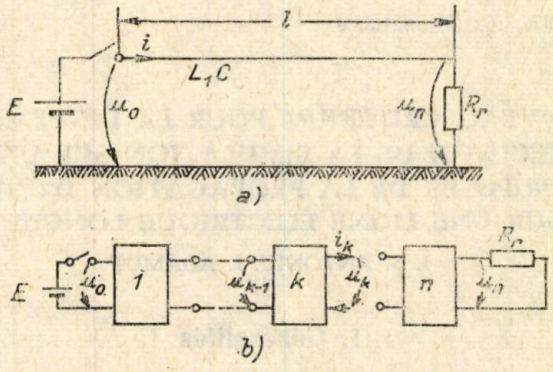


Fig. 1

Dans le critérium *Temps instantanés maximums de retard*, les points caracteristiques considérés sont les points d'intersection *C et C'*, entre les courbes de réponse et les droites d'ordonnée $u = ct$ égale avec la valeur théorique finale correspondante au schéma analysée, à savoir : $u = 1$ pour la ligne sans onde réflechie, $R_r = Z_c$, et $u = 2$ pour la ligne à vide, $R_r = \infty$

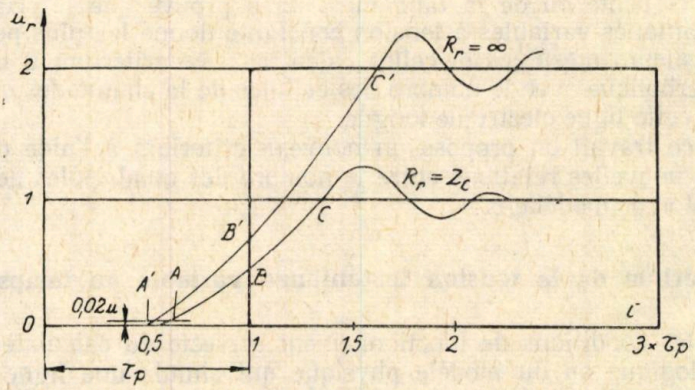


Fig. 2

Pour le critérium : *Temps instantanée maximums d'avance* le point caracteristique se trouve à l'intersection de la courbe de réponse avec la droite d'ordonnée 0,02 u, A et A'. La somme de ces deux temps donne le critérium des *temps instantané* maximum total.

Dans le nouveau critérium proposé dans ce travail les points caractéristiques sont les points B et B', qui se trouvent à l'intersection des courbes de réponses avec la droite d'abscisse constante, $\tau = \tau_p = t k_t = \sqrt{LC}\, l\, k_t$, dans la quelle

τ_p — le temps theorique propre de propagation de la tension sur le modèle de la ligne, en s ;

t — le temps réel de propagation de la tension sur la ligne, en s ;

τ — le temps de propagation de la tension sur le modèle de la ligne, en s ;

k_t — le facteur de multiplication du temps réel sur le modèle.

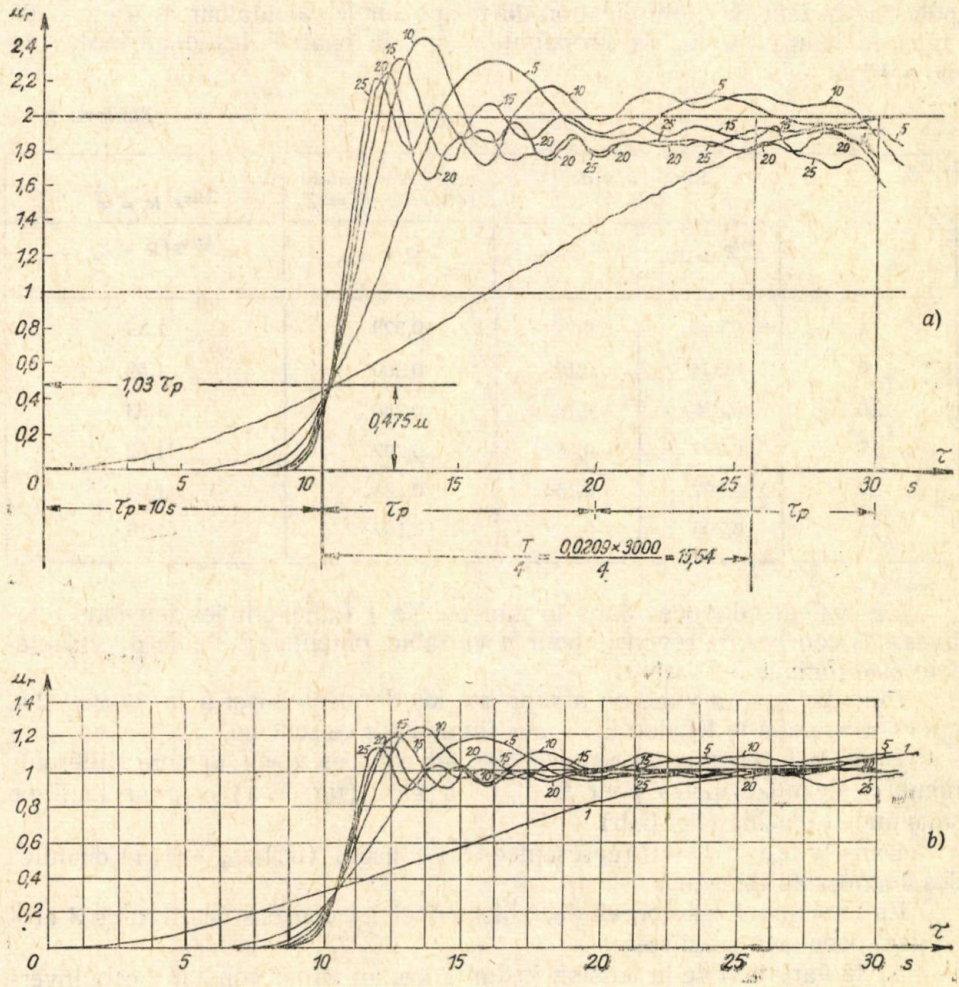


Fig. 3

Cette droite a été choisie du fait que son angle d'intersection avec les courbes de réponse este grand et, de plus ,parce que on a l'intéret de connaître les phénomènes au bout de la ligne à la première arrivée de l'onde incidante.

Le tableau No. 1 contient les données nécessaires à établir la rélation $(u)_{\tau=\tau_p} = f(n)$, dans le cas particulier du modelage d'une ligne de 1000 km, dont les paramètres choisis sont $L = 1{,}26\ H$ et $C = 8{,}8\ \mu F$, correspondant aux lignes de 220—400 kV ; l'impédance caracteristique de cette ligne est $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = 378\ \Omega$, la vitesse de propagation $v = \sqrt{LC} = c = 3.10^8 \text{m/s}$ et le temps propre de propagation $t_p = 3{,}33$ s.

La ligne a été modelée respectivement avec 1,5, 10, 15, 20, 25 quadripôles, le facteur de multiplication du temps sur le calculateur k_t a été 3000, ainsi le temps propre de propagation sur la chaîne des quadripôles est $\tau_p = 10$ s.

Tableau No 1

n	Ligne à vide $R_r = \infty$		Ligne sans onde réfléchie $R_r = Z_c$	$(u_{\tau_p})_{R_r = \infty}$
	$\frac{u_{\tau_p}}{u} = \Delta u_r$	$\frac{u_{\tau_p}}{2u} = \Delta u'_r$	$\frac{u_{\tau_p}}{u} = \Delta u_r$	$(u_{\tau_p})_{R_r = Z_c}$
1	0,4444	0,222	0,328	1,35
5	0,394	0,197	0,260	1,52
10	0,366	0,183	0,240	1,53
15	0,327	0,164	0,202	1,62
20	0,307	0,154	0,183	1,68
25	0,294	0,147	0,167	1,76

Les valeurs données dans le tableau No 1 indiquent les tensions relatives des courbes de réponse, pour n variable, obtenues à l'aide du calculateur électronique MECAN II.

Pour la ligne à vide, on a rapporté les données aussi à la tension $2\,u$, qui correspond à la tension théorique finale pour ce schéma.

Dans la fig. 3 ont été representées les courbes $u = f(\tau)$ pour différents nombres de quadripôles pour la ligne à vide (fig. 3, a) et pour la ligne sans onde réfléchie (fig. 3, b).

Dans la figure 4 sont representées les courbes $(U_r)_{\tau=\tau_p} = f(n)$ déduites des données du tableau 1.

En examinant les donées du tableau 1 et les courbes des figures 3 et 4 on peut conclure ce qui suit :

a) la variation de la tension instantanée, au temps constant, este inversement proportionnelle au nombre des quadripôles de la chaîne ;

b) la tension relative au schéma de la ligne à vide est plus grande que celle correspondante au schéma de la ligne sans onde réfléchie, leur rapport variant entre 1,35 et 1,76, augmentant avec le nombre des quadripôles. Ceci prouve que la vitesse de croissance de la tension est dépendante du schéma de conexion au bout de la ligne, étant plus grande pour la ligne

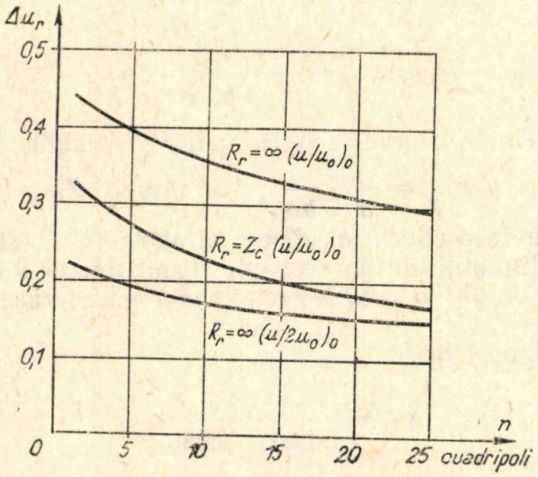


Fig. 4

à vide que pour la ligne sans onde réfléchie (fig. 3, 4) ;

c) les ordonnées des points d'intersection de la courbe de réponse avec l'ordonnée correspondante au temps propre de propagation sont plus petites que la moitié de la valeur théorique qui correspond au saut dans le point de discontinuité [7], [8], ayant, pour $n = 1$, la valeur 0,222, pour la ligne à vide et 0,328 pour la ligne sans onde réfléchie ;

d) dans les deux schémas on observe qu'il y a une zone d'accumulation des points d'intersection des différantes courbes : pour la ligne a vide la zone d'accumulation tend vers un point ayant les coordonnées 1,03 τ_p et 0,475 u ; pour la ligne sans onde réfléchie, le point d'intersection est moins bien defini.

3. Rélations analytiques pour définir la précision du modélage

De l'analyse du processus de propagation sur la ligne à vide et sur la ligne sans onde réfléchie (fig. 2), il résulte que, dans le cas de la ligne réele, $n \to \infty$ la tension à l'extremité de la ligne pour le temps $\tau_1 = \tau_p - \varepsilon$, quand $\varepsilon \to 0$, est nule et pour le temps $\tau_r = \tau_p + \varepsilon$. quand $\varepsilon \to 0$, cette tension sera 2, respectivement 1. Par conséquant la grandeur Δu_r considérée dans le critérium proposé tend vers zero quand le nombre de quadripôles n augmente indéfiniment ce qu'on peut observer sur les courbes de la figure 4.

Pour satisfaire les conditions à la limite, à savoir $\Delta u_r \to 0$ pour $n \to \infty$, il est nécessaire d'approximer les courbes de la figure 4 avec des hyperboles dont l'une des asimptotes soit l'axe des abscisses, l'équation correspondante étant de la forme [9]

$$(\Delta u_r)_{\tau=\tau_p} = \frac{1}{a + b\,n},$$

ou

$$(\Delta\, u_r)_{\tau-\tau_p} = \frac{1}{a' + b'\,n + c'\,n^2}.$$

L'équation de la courbe d'aproximation s'établit en effectuant la substitution $\Delta u_r = y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{a + bn}$; il en résulte $Z = a + bn = \frac{1}{\Delta u_r}$, l'équation d'une droite respectivement d'une parabole si Z est un trinôme de second degrée. En utilisant la methode d'aproximation des écarts minimums [9], [10], on déduit pour les relations à deux termes, les expressions suivantes :

— pour la ligne à vide :

$$\Delta u_r = \frac{1}{4{,}65 + 0{,}086\,n} \tag{1}$$

— pour la ligne sans onde réfléchie :

$$\Delta u_r = \frac{1}{2{,}93 + 0{,}127\,n} \tag{2}$$

Pour déduire les rélations avec trois termes, on utilise la méthode des moyennes [9] *) ; on obtient **) :

— pour la ligne à vide :

$$\Delta u_r = \frac{1}{4{,}46 + 1{,}185 \cdot 10^{-1}\,n - 8{,}94 \cdot 10^{-4}\,n^2} \tag{3}$$

— pour la ligne sans onde réflechie :

$$\Delta u_r = \frac{1}{3{,}09 + 1{,}176 \cdot 10^{-1}\,n - 4{,}1 \cdot 10^{-5}\,n^2}. \tag{4}$$

4. Aproximation des formules analytiques établies. Comparaison de ces formules avec celles du critérium des temps instantanes maximums

Les expression analytiques établis ci-dessus peuvent être utilisées aussi bien dans le domaine d'interpolation ($1 \leq n \leq 25$) que dans celui d'extrapolation ($n > 25$), Δu tendant vers zéro pour $n = \infty$ (la chaîne de

*) Voir pag. 356.
**) Voir l'annexe.

TABLEAU 2

Nr. crt.	Schéma / Grandeur	Ligne à vide $R_r = \infty$							Ligne sans onde réfléchie $R_r = Z_c$						
		Relation analytique	n	1	5	10	15	20	25	Relation analytique	n	1	5	10	15	20	25
1	Δu_m	$\Delta u_r = \frac{1}{4{,}65 + 0{,}086\, n}$		0,222	0,197	0,183	0,164	0,154	0,147	$\Delta u_r = \frac{1}{2{,}923 + 0{,}127\, n}$		0,328	0,260	0,240	0,202	0,183	0,167
	Δu_c			0,211	0,197	0,182	0,168	0,157	0,147			0,328	0,281	0,238	0,207	0,183	0,164
	$\Delta u_m - \Delta u_c$			0,011	0	0,001	—0,004	—0,003	0			0	— 0,021	0,002	—0,005	0	0,003
	$\varepsilon\%$			5,200	0	0,550	—2,380	—1,910	0			0	— 7,460	0,806	—2,420	0	1,830
	$\lvert\varepsilon\rvert_{moy\%}$				10,030 : 6 = 1,670								12,516 : 6 = 2,086				
	$a_{\varepsilon\%}$					7,580							9,29				
	n pour $\varepsilon \leqslant 10\%$					62							56				
	n „ $\varepsilon \leqslant 5\%$					178							135				
2	$1/\Delta u_c$	$= \frac{\Delta u_r = \frac{1}{4{,}46 + 0{,}1185\, n - 10^{-4} \cdot 8{,}94\, n}}{}$		4.5776	5,0310	5,556	6,0390	6,4720	6,8620	$= \frac{\Delta u_r = \frac{1}{3{,}09 + 0{,}1176\, n - 10^{-5} \cdot 4{,}1\, n^2}}{}$		3,208	3,676	4,261	4,846	5,4240	6,0040
	Δu_c			0,2180	0,1984	0,180	0,1655	0,1544	0,1457			0,312	0,272	0,235	0,206	0,1845	0,1665
	$\Delta u_m - \Delta u_c$			0,0040	—0,0014	0,003	—0,0015	—0,0004	0,0013			0,016	—0,012	0,005	—0,004	—0,0015	0,0005
	$\varepsilon\%$			1,8300	—0,7060	1,670	—0,9060	—0,2590	0,8920			5,120	—4,400	2,130	—1,940	0,8300	0,3000
	$\lvert\varepsilon\rvert_{moy\%}$				6,263 : 6 = 1,044								14,72 : 6 = 2,45				
	$a_{\varepsilon\%}$					2,736							9,52				
3	$\varepsilon_{\theta_r\%}$	$\theta_r = 2{,}95\, n^{-0{,}807}$		0	—2,37	—2,17	0	8	13,6	$\theta_r = 2{,}12\, n^{-0{,}872}$		0	2,4	—3,27	0	2,76	—7,04
	$\lvert\varepsilon\,\theta_r\rvert_{moy\%}$					4,36								2,64			
	$a_{\varepsilon\theta_r\%}$					15,97								10,16			
	n pour $\varepsilon \leqslant 10\%$					66								67			
	n „ $\varepsilon \leqslant 5\%$					152								172			
4	$\varepsilon_{\theta_r\%}$	$\theta_r = 0{,}075 + 2{,}875\, n^{-0{,}877}$		0	—0,9	—1,53	—3,22	0	1,63	$\theta_r = 0{,}092 + 2{,}028\, n^{-1{,}103}$		0	1,68	5,52	0	—4,78	—2,75
	$\lvert\varepsilon\,\theta_r\rvert_{med\%}$					1,21								2,46			
	$a_{\varepsilon\theta_r\%}$					4,85								10,30			

quadripôles devenant la ligne réele). La précision de ces expressions analytiques a été calculée avec la rélation

$$\varepsilon^0/_0 = \frac{\Delta u_m - \Delta u_c}{\Delta u_c} \cdot 100;$$

les résultats sont donnés dans le tableau 2, dans lequel :

Δu_m — la tension relative mesurée ;

Δu_c — la tension relative calculée ;

ε — l'erreur en pour-cent ;

$|\varepsilon|_{moy}$ — l'erreur moyenne en pour-cent ;

a_r — l'amplitude des déviations en pour-cent.

Des résultats du tableau 2 on peut conclure :

a) les relations analytiques établies approchent avec une précision satisfaisante la variation de la tension au temps constant, à savoir, avec une erreur moyenne de 1,67%, dans le cas des relations à deux termes, et de 1,04%, dans le cas des relations à trois termes, pour la ligne à vide, et de 2,09%, respectivement 2,45%, pour la ligne sans onde réfléchie ;

b) les relations sont plus exacts pour la ligne à vide que pour la ligne sans onde réfléchie ;

c) les relations analytiques à trois termes au dénominateur sont plus indiquées donnant pour la ligne à vide une précision moyenne plus grande et un degré d'uniformité plus élevé ; paur la ligne sans onde réflechie elle donnent seulement une plus grande uniformité ;

d) les relations analytiques obtenus pour le critérium de la tension variable au temps constant, sont plus précises que les relations déduites pour le critérium du temps variable à tension constante, les erreurs moyennes étant dans un rapport de $\frac{1}{2,6}$ et de $\frac{1}{1,16}$ pour la ligne à vide et de $\frac{1}{1,27}$ et de $\frac{1}{1}$ pour la ligne sans onde réfléchie *)

Dans la figure 5 sont données les courbes $\Delta u_r = f(n)$ et $\theta_{tr} = f(n)$ pour la zone d'interpolation, déduites des données du tableau 1 et de celles du travail antérieur [1].

On remarque que pour un petit nombre de quadripôles dans la chaîne, la variation des courbes θ_{tr} est plus rapide que celle des courbes Δu_r, tandis que pour un grand nombre de quadripôles ($n \geq 20$) elles sont à peu prés parallèles et au-dessus de celles-ci.

En calculant le nombre nécessaire de quadripôles pour obtenir une meilleure précision que celle obtenue sur le MECAN II pour $n = 25$, on trouve que pour une ligne à vide il faut 62 quadripôles pour $\varepsilon \leq 10\%$ et 83 quadripôles pour $\varepsilon \leq 5^0/_0$; pour la ligne sans onde réfléchie sont nécessaires 56 respectivement 135 quadripôles. L'ordre de grandeur de ces valeurs

*) Les deux premiers de ces rapports correspondent aux expressions du tableau positions 1 et 3, le second groupe aux expressions des positions 2 et 4.

est comparables avec celles obtenues pour le critérium du temps variable, à saivoir 66 respectivement 152 pour la ligne à vide et 67 respectivement 172 pour la ligne sans onde réfléchie [1].

On remarque encore que les expressions à trois termes à cause du signe negatif du terme de second degré ne peuvent pas être utilisées dans

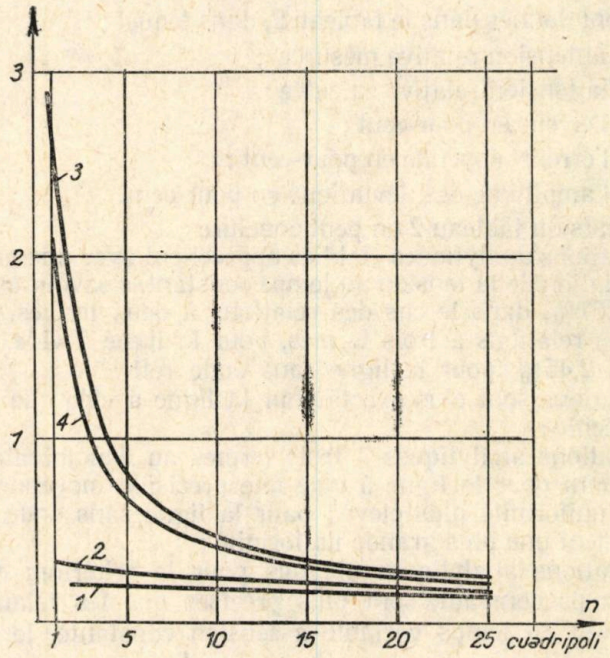


Fig. 5

la zone d'extrapolation ayant des racines imaginaires pour $\Delta u_r \leq 0{,}1195$ pour la ligne à vide et pour $\Delta u_r \leq 1{,}142.10^{-2}$ pour la ligne sans onde réfléchie.

Il en résulte que ces relations sont comparables avec les relations à termes libres établies pour le critérium des temps instantanés maximum [1].

5. Conclusions

— Le critérium de la tension variable au temps constant peut ê utilisé pour l'appréciation de la précision avec laquelle se propage une c de tension sur une chaîne de quadripôles, modèle d'une ligne élect longue.

— Les relations analytiques entre l'écart de la valeur de la tension et le nombre des quadripôles sont du type hyperbolique. Les relations à trois termes donnent une plus grande précision que celles à deux termes, mais elles ne peuvent être utilisées que seulement dans la zone d'nterpolation ($n \leq 25$), celles à deux termes pouvent être utilisées dans n'importe quelle zone ($1 \leq n \leq 25$ et $n > 25$).

Les relations obtenues pour la ligne à vide donnent une meilleure précision que celles obtenues pour la ligne sans onde réflechie (fermée sur l'impédance caractéristique).

La chaire d'électrotechnique III
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

ANNEXE

Déduction des relations $\Delta u_r = \dfrac{1}{a + bn + cn^2}$

A. *Ligne à vide*

Des données du tableau 1 on déduit la dépendance numérique entre les grandeurs Δu_r et n

Tableau A 1

n	1	5	10	15	20	25
Δu_r	0,222	0,197	0,183	0.164	0,154	0,147
$1/\Delta u_r$	4,5	5,08	5,46	5,10	6,5	6,8

En remplaçant les valeurs de n et $1/\Delta u_r$ dans le trinôme

$$Z = a + bn + cn^2$$

on obtient le groupe d'équations :

$$\begin{aligned}
&a + b + c - 4{,}5 = \varepsilon_1,\\
&a + 5b + 25c - 5{,}08 = \varepsilon_2,\\
&a + 10b + 100c - 5{,}46 = \varepsilon_3,\\
&a + 15b + 225c - 6{,}10 = \varepsilon_4,\\
&a + 20b + 400c - 6{,}5 = \varepsilon_5,\\
&a + 25b + 625c - 6{,}8 = \varepsilon_9,
\end{aligned} \qquad \text{(A 1)}$$

dans lesquelles $\varepsilon_1 \div \varepsilon_6$ sont les écarts entre les valeurs mesurées (tableau A 1) et les valeurs déduites des courbes.

$$\Delta u = a + bn + cn^2.$$

La condition caracteristique de cette méthode este que $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i = 0$, k étant le nombre des points obtenus expérimentalement.

Du fait qu'il y a six équations et seulement trois inconnues on groupe ces équations deux à deux en ordre croissant, en considérant que les déviations sont toujours deux à deux égales et de signe contraires.

On obtient ainsi le système :

$$\begin{aligned} 2a + 6b + 26c &= 9{,}58, \\ 2a + 25b + 325c &= 11{,}56, \\ 2a + 45b + 1025c &= 13{,}30, \end{aligned} \qquad \text{(A 2)}$$

dont les racines sont :

$$a = 4{,}46;\ b = 1{,}185 \cdot 10^{-1};\ c = 8{,}94 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Ainsi } \Delta u_r = \frac{1}{4{,}46 + 1185 \cdot 10^{-1} n - 8{,}94 \cdot 10^{-4} n} \qquad \text{(A 3)}$$

B. *Ligne sans onde réfléchie*

Du tableau 1 on déduit la dépendance entre Δu_r et n.

Tableau A 2

n	1	5	10	15	20	25
Δu_r	0,328	0,260	0,240	0,202	0,183	0,167
$1/\Delta u_r$	3,05	3,85	4,17	4,95	5,46	5,98

En procédant comme précédemment on obtient :

$$\begin{aligned} a + b + c - 3{,}05 &= \varepsilon_1, \\ a + 5b + 25c - 3{,}85 &= \varepsilon_2, \\ a + 10b + 100c - 4{,}17 &= \varepsilon_3, \\ a + 15b + 225c - 4{,}95 &= \varepsilon_4, \\ a + 20b + 400c - 5{,}46 &= \varepsilon_5, \\ a + 25b + 625c - 5{,}98 &= \varepsilon_6, \end{aligned} \qquad \text{(A 4)}$$

puis

$$\begin{aligned} 2a + 6b + 26c &= 6{,}90, \\ 2a + 25b + 325c &= 9{,}12, \\ 2a + 45 + 1020c &= 11{,}44, \end{aligned} \qquad \text{(A 5)}$$

Il résulte

$$a = 3{,}09;\ b = 1{,}176 \cdot 10^{-1};\ c = -4{,}1 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{donc } \Delta u_r = \frac{1}{3{,}09 + 1{,}176 \cdot 10^{-1} n - 4{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot n^2}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. *Antoniu, I. S., Adămuț, I.:* Contribuții la studiul vitezei de propagare a undelor de tensiune pe liniile lungi fără pierderi, cu ajutorul modelelor. St. cerc. energ. electr. (1966), Nr. 3, p.
2. *Antoniu, I. S. Adămuț, I.:* Contributions à la définition de la vitesse de propagation d'un signal sur les chaînes de quadripôles. Rev. roum. sci. techn. Série électrotehnique et énergetique. Tome 11 (1966) Nr. 3, p. 341—369.
3. *Popov, V. M., Tătaru, N. N., Băjenescu, T. N.:* Calculatorul analogic neliniar MECAN II St. cerc. energ. (1963) 2 p. 291.
4. *Gille, J., Decaulne, P., Pelegrin, M.:* Teoria și calculul sistemelor de reglare automată. Trad. Ed. Tehn. București (1962).
5. * * * Essais à haute tension. CEI Publication 60 Deuxième édition (1962).
6. *Hortopan, Gh.:* Tehnica impulsului în laboratorul de înaltă tensiune. București Ed. Tehn. (1965).
7. *Weber, E.:* Linear Transient Analysis. Vol. I New York, John Wiley & Sons. Inc. (1956), p. 209.
8. *Wagner, K. W.:* Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation (1950) Leipzig p. 435.
9. *Eacovlev, K. P.:* Matematiciskaea obrabotko rezultatov izmerenii. GITTL Moskva-Leningrad (1950).
10. *Fréchet, M., Romann, R.:* Représentation des lois empiriques par des formules approchées. Paris (1930).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

AUTOMATICA

C.Z.: 621.375:518.5:681.14

PROIECTAREA AMPLIFICATOARELOR OPERAȚIONALE ALE CALCULATORULUI ANALOGIC DIDACTIC CAD-1 *

PETRE DIMO

1. *Introducere*

În scopul realizării în Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" a unui prototip de calculator analogic didactic, s-a proiectat o schemă de amplificator operațional care să răspundă următoarelor cerințe:

a) economicitate;
b) simplitate constructivă;
c) bandă de frecvențe ridicată;
d) derivă de zero redusă, fără a se utiliza „chopper";
e) stabilitate în timp și la schimbarea tuburilor;
f) reglaje minime;
g) posibilitate de cuplare cu un amplificator de c. a. pentru corectarea automată a derivei.

Rezultate obținute (vezi și § 3) justifică soluția adoptată pentru schema electronică.

Din punct de vedere mecanic, amplificatorul a fost realizat pe cablaj imprimat, pe o placă de dimensiuni standardizate la sistemul de reglare UNIDIN.

Placa este fixată cu ajutorul cuplelor UNIDIN într-un sertar UNIDIN, care cuprinde opt asemenea amplificatoare. În felul acesta, calculatorul analogic didactic capătă un caracter modular (modulul de bază având opt amplificatoare operaționale) și posibilitate de extindere prin cuplarea acestor module. În continuare se expun principiile de proiectare ale amplificatoarelor operaționale cu corecție parametrică a derivei.

1. *Proiectarea statică*

S-a stabilit ca amplificatoarele operaționale AMA—1 să poată alimenta în mod normal o sarcină de 33 kΩ, dar printr-o adaptare specială a ultimului etaj să se poată cupla și sarcini de 18 kΩ. Pentru aceasta, ultimul etaj este realizat cu tubul EL 84 legat ca triodă cu rezistență anodică 50 kΩ

* Manuscris predat la redacție la 7 aprilie 1966.

(Fig. 1.). Există posibilitatea de a se lega în paralel pe *Ra*, o rezistență egală cu ea, atunci cînd acest lucru este necesar.

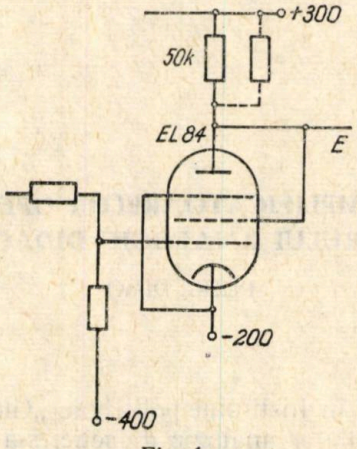


Fig. 1

Acest etaj are următoarele proprietăți importante :

a) Rezistență de ieșire foarte mică, datorită conectării ca triodă.

b) Bandă de frecvențe ridicată (din același motiv) (Fig. 2, curba 3).

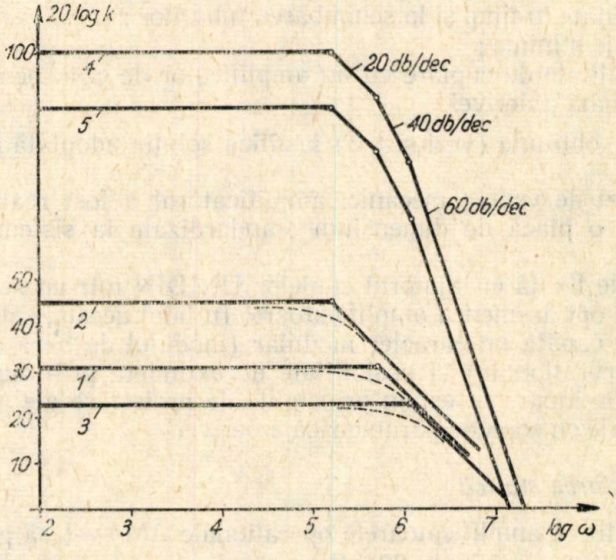


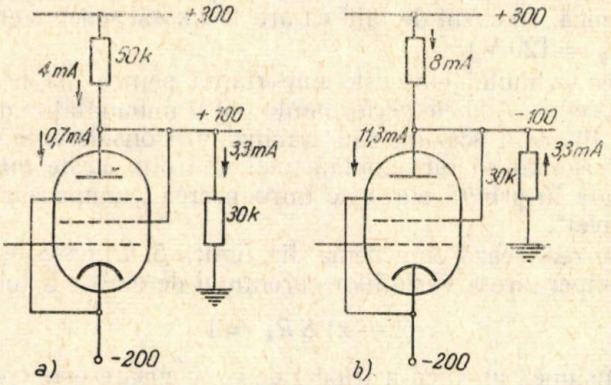
Fig. 2

c) Amplificare redusă.

d) Posibilitatea de a alimenta o sarcină de 33 kΩ cu ± 100 V, în bune condițiuni.

Intr'adevăr, regimurile limită ale etajului (Fig. 3, a, b) demonstrează acest lucru.

S-au utilizat caracteristicile statice și de frecvență ale acestui etaj ridicate experimental.



$P = i_a U_a = 1{,}13\,W < P_{da} = 5{,}3\,W$

Fig. 3

Etajul anterior s-a realizat cu tubul EF 86. Deoarece acest tub este cel care lucrează în cele mai grele condiții de amplificare, alegerea corectă a punctelor sale de funcționare este critică. Este necesar ca punctul mediu de funcționare să se găsească pe mijlocul caracteristicii liniare de funcționare [1]. Totodată, nu este recomandabil ca tensiunea anodică a acestui

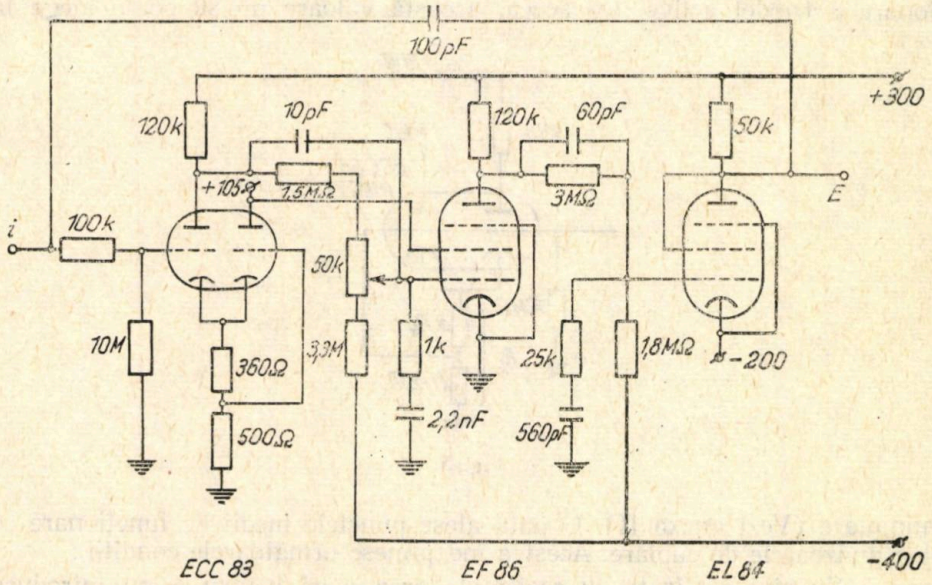


Fig. 4

etaj să aibă o valoare prea ridicată, deoarece în acest caz divizorul de cuplare cu etajul următor este dezechilibrat și introduce o atenuare mare a semnalului [4].

Pentru a nu se pierde prea mult din amplificare, rezistența anodică nu poate fi prea mică. În cazul de față ea are 120 kΩ și schema etajului se vede în figura 4 ($U_a = 120$ V).

Proiectarea primului etaj este importantă pentru asigurarea unei derive și zgomot redus. Ambele performanțe pot fi îmbunătățite dacă se adoptă o tensiune de filament scăzută sau stabilizată. Considerente de economicitate ne-au determinat să nu adoptăm nici una din aceste măsuri. Singura măsură adoptată în primul etaj este introducerea „compensării parametrice (Miller) a derivei".

Aceasta se realizează cu schema din figura 5. După cum se știe [2,3], condiția de compensare a variațiilor curentului de emisie a tubului este

$$(1 - x)\, S R_k = 1 \qquad (1)$$

atunci cînd tensiunea anodică a triodei de compensare este constantă. Dacă aceasta este legată la sursa comună (de + 300) printr-o rezistență anodică R_a, atunci se poate demonstra (vezi anexa I) că condiția care trebuie îndeplinită este

$$(1 - x)\, S R_k = 1 + \frac{R_{a2}}{R_i}, \qquad (2)$$

unde R_i este rezistența internă a acestei triode.

Alegerea rezistenței R_k determină valoarea lui x și a regimului de funcționare a triodei active. De aceea, această valoare nu se poate alege la

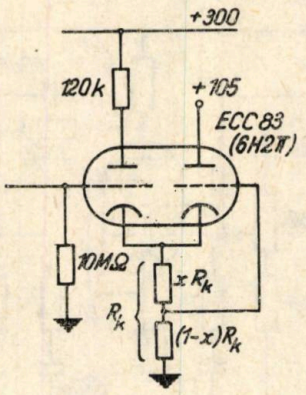


Fig. 5

întîmplare (Vezi anexa II). O dată alese punctele medii de funcționare se aleg divizoarele de cuplare. Acestea îndeplinesc următoarele condiții:

— Nu sînt realizate cu rezistențe prea mari pentru a nu introduce constante de timp periculoase, cu capacitățile parazite.

— Nu sînt realizate cu rezistențe prea mici pentru a nu încărca etajul precedent.

— Asigură negativarea necesară etajului următor :

— Primul divizor conține și elementul de reglare a nulului.

— Sînt realizate cu rezistențe ușor procurabile (valori uzuale).

— Rezistențele utilizate trebuie să fie stabile în timp și la variații de temperatură.

— Cel de-al doilea divizor să fie realizat cu rezistențe cu toleranțe foarte strînse ($\pm$ 2%) legat de asigurarea punctului mediu de funcționare pentru etajul II.

Valorile obținute se văd în figura 4.

2. *Proiectarea dinamică*

Proiectarea dinamică a fost realizată pe baza metodei prezentate în [1], ținînd în plus cont de faptul că acest amplificator urma să lucreze într-o mașină de calcul. Cuplarea lui cu celelalte amplificatoare necesită de obicei legarea unor conductoare ecranate în punctul de sumare. De asemenea, este posibil ca sarcina amplificatorului să fie în anumite condiții puternic capacitivă, iar la intrare pot exista numeroase tipuri de elemente (nu numai pur rezistive).

De aceste efecte se poate ține cont dacă la calculul corecțiilor se introduce în lanțul de amplificare înainte de primul etaj rețeaua din figura 6.

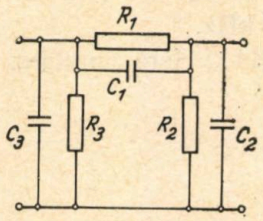


Fig. 6

Se poate considera aici că această rețea este compusă din :

R_1 — rezistența de reacție ;
R_2 — rezistența de punere la masă a punctului de sumare ;
R_3 — rezistența echivalentă a rezistențelor de intrare ;
C_1 — o capacitate de compensare ;
C_2 — capacitatea parazită în punctul de însumare ;
C_3 — capacitatea echivalentă a impedanțelor de intrare.

Dacă se intraduce această rețea în calcul, atunci amplificatorul trebuie considerat cu reacție totală.

În amplificatoarele calculatorului CAD—1, capacitatea C_1 care șuntează rezistența de reacție de 1 MΩ joacă un rol foarte important. Amplificatoarele au fost proiectate astfel încît fără această capacitate frecvența

limită să fie de 20 kHz. În schimb, în aceste condiții marginea de stabilitate nu este prea mare, astfel că la conectarea unor sarcini capacitive puternice (> 5 nF), sau la introducerea în punctul de sumare a unei capacități parazite mari (> 5 nF), amplificatorul intră în oscilație.

Capacitatea $C_1 = 100$ pF reduce frecvența limită. Într-adevăr, funcția de transfer a amplificatorului cu reacție capătă un pol la pulsația $\omega = \frac{1}{R_1 C_1}$ dacă $R_1 = 1$ MΩ, $C_1 = 100$ pF, rezultă $\omega = 10^4$, adică la $f = \frac{10\,000}{6{,}28} \cong$ 1,5 kHz, semnalul $100 \sin 2\pi f t$ este atenuat cu 3 db. Acest lucru se verifică întocmai ; în plus, stabilitatea amplificatorului la conectarea capacităților menționate mai sus crește foarte mult. (Conectarea la ieșire sau în punctul de însumare, a unei capacități de 1μF, nu are nici o influență asupra stabilității).

Frecvența limită obținută se consideră suficientă pentru majoritatea aplicațiilor calculatorului.

3. *Performanțele amplificatorului AMA—1*

— Amplificarea în lanț deschis (c.c.) — 88 db.
— Amplificarea în lanț deschis ($f = 100$ Hz) — 83 db.
— Deriva în regim de integrator (1μF în reacție) $<$ 80 mv/min.
— Frecvența limită 1,5 kHz.
— Sarcina admisibilă 33 kΩ fără shuntare.
— Zgomot 2 mV.

Anexa I

Din relația

$$I_a = f(U_a, U_g, U_f) \tag{1}$$

unde U_f este tensiunea de filament, se deduce :

$$\delta I_a = S \delta U_g = \frac{1}{R_i} \delta U_a + \frac{\partial f}{\partial U_f} \delta U_f \tag{2}$$

Presupunînd aceleași valori pentru S și R_i în ambele jumătăți ale tubului, vom avea succesiv :

$$U_{g_1} = -R_k(\delta I_{a1} + \delta I_{a2}) \tag{3}$$

$$U_{g_2} = -xR_k(\delta I_{a1} + \delta I_{a2}) \tag{4}$$

$$U_{a1} = -\delta I_{a1}(R_k + R_{a1}) - \delta I_{a2} R_k \tag{5}$$

$$U_{a2} = -\delta I_{a2}(R_k + R_{a2}) - \delta I_{a1} R_k$$

și deci :

$$\delta I_{a1} = -SR_k(\delta I_{a1} + \delta I_{a2}) - \frac{1}{R_i}\delta I_{a1}(R_k + R_{a1}) - \frac{R_k}{R_i}\delta I_{a2} + m\delta U_f \quad (7)$$

$$\delta I_{a2} = -xSR_k(\delta I_{a2} + \delta I_{a2}) - \frac{1}{R_i}\delta I_{a2}(R_k + R_{a2}) - \frac{R_k}{R_i}\delta I_{a1} + m\delta U_f \quad (8)$$

unde s-a notat $\frac{\partial f}{\partial U_f} = m.$

După transformări simple, rezultă :

$$\delta I_{a2} = \frac{m\delta U_f - \delta I_{a1}\left(xSR_k + \frac{R_k}{R_i}\right)}{1 + xSR_k + \frac{R_k + R_{a2}}{R_i}} \quad (9)$$

$$\delta I_{a1}\left(1 + SR_k + \frac{R_k + R_{a1}}{R_i}\right) = m\delta U_f - \delta I_{a2}\left(SR_k + \frac{R_k}{R_i}\right) =$$

$$= m\delta U_f - SR_k\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\frac{m\delta U_f - \delta I_{a1}\left(xSR_k + \frac{R_k}{R_i}\right)}{1 + xSR_k + \frac{R_k + R_{a2}}{R_i}} \quad (10)$$

Prin compensare trebuie să se realizeze $\delta I_{a1} = 0$, deci

$$1 - SR_k\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{1 + xSR_k + \frac{R_k + R_{a2}}{R_i}} = 0$$

sau :

$$SR_k(1 - x) = 1 + \frac{R_{a2}}{R_i}$$

Anexa II

Ecuațiile care descriu funcționarea etajului cu compensare Miller sînt (fig. 5, fig. 7).

$$I_c = I_{a1} + I_{a2} \quad (1)$$

$$R_k I_c = -U_{g1} \quad (2)$$

$$SR_k(1 - x) = 1 \quad (3)$$

$$U_{g2} = xU_{g1} \quad (4)$$

$$I_{a1} = f_1(U_{a1}, U_{g1}) \quad (5)$$

$$I_{a2} = f_2(U_{a2}, U_{g2}) \quad (6)$$

Ecuațiile (5) și (6) determină punctele medii de funcționare ale jumătăților stîngă și dreaptă ale primei triode.

În general, în ecuațiile de mai sus se dă numai U_{a2} și S. Să presupunem a fost ales și punctul mediu de funcționare al primei jumătăți ; cu alte cuvinte, s-a ales U_{g1}, U_{a1}, deci rezultă I_{a1}.

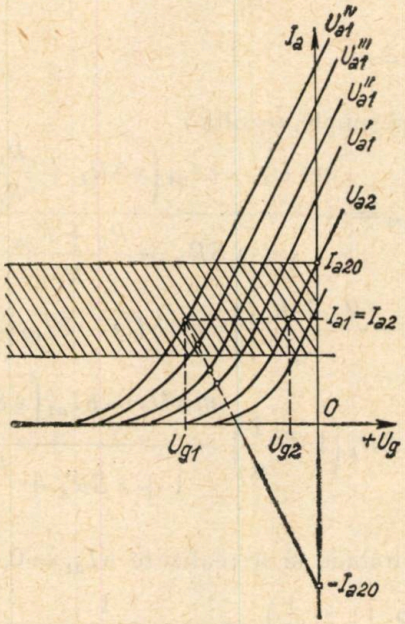


Fig. 7

Necunoscutele care rămîn sînt : I_c, I_{a2}, R_k, x, $-U_{g2}$, iar ecuațiile : (1), (2), (3), (4), (6). Din acestea, se obține pe rînd :

$$-U_{g1}=R_k(I_{a1}+I_{a2})=\frac{1}{S(1-x)}(I_{a1}+I_{a2})=\frac{1}{S\left(1-\frac{U_{g2}}{U_{g1}}\right)}(I_{a1}+I_{a2})$$

sau

$$-SU_{g1}+SU_{g2}=I_{a1}+I_{a2}$$

de unde se deduce sistemul de ecuații :

$$I_{a2}=f_2(U_{a2}, U_{g2}) \tag{6}$$

$$I_{a2}=SU_{g2}-(I_{a1}+SU_{g1}) \tag{7}$$

Pentru ca sistemul să conducă la soluții utilizabile, trebuie ca dreapta (7) și curba (6) să se intersecteze în cadranul II. Ori, curba (6), pe cea mai mare porțiune a ei, reprezintă o dreaptă de pantă S, deci singura alegere

convenabilă a punctului de funcționare a primei jumătăți a triodei este cea în care

$$-(I_{a1} + SU_{g1}) = I_{a20} \tag{8}$$

unde I_{a20} este valoarea curentului în punctul de intersecție al caracteristicii $I_{a2} = f_2 (U_{a2}, U_{g2})$ cu ordonata. În acest fel, dreapta (7) și curba (6) vor avea o porțiune comună : cea de liniaritate a curbei (6).

Ori, relația (8) reprezintă și ea o dreaptă (D) care intersectează în P_1, $P_2 \ldots P_n$ caracteristicile $I_{a1} = f(U_{a2}, U_{g1})$.

Proiectarea deci decurge în modul următor :

a) Se determină caracteristica $I_{a2} = f(U_{a2}, U_{g2})$ (curba 6).

b) Se determină I_{a20} și se trasează dreapta $I_{a1} = -SU_{g1} - I_{a20}$.

c) Se alege ca punct de funcționare pentru trioda activă unul din punctele de intersecție ale acestei trepte cu caracteristicile : $I_{a1} = f_1(U_{a1}, U_{g1})$. Se vede că nu se poate adopta $U_{a1} \leqslant U_{ar}$ și că cu cît U_{a1} este mai mare cu atît punctul de intersecție se găsește într-o regiune mai liniară a caracteresticii.

d) Se alege ca punct de funcționare pentru trioda de compensare oricare din punctele de pe porțiunea liniară a caracteristicii ; pentru ca condiția de egalitate a rezistențelor interne și a pantei între triode să fie cît mai apropiată de realitate (această condiție a fost presupusă atunci cînd s-a dedus relația (3) de compensare), se recomandă ca $I_{a2} = I_{a1}$; rezultă deci numai o anumită zonă permisă de alegere acestui punct (zona haşurată pe figura 7).

e) Rezultă din calcul I_c, R_k și x. Se verifică că $U_{g2} = x U_{g1}$.

Catedra de automatică I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Dimo Petre.* Ipoteze simplificotoare în proiectarea amplificatoarelor operaționale. Automatica și electronica, Nr. 3/1966.
2. *Kogan B. I.* Dispozitive analogice de modelare. Editura Tehnică, 1965.
3. *Scot N. R.* Analog and digital computer techmology. Mc. Graw Hill, 1960.
4. *Fifer Stanley.* Analogue Computation.
5. *Jackson A. S.* Analog Computation Mc. Graw Hill, 1960.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. : 539.4:533:531.1

FLUTTERING OF THE „ELECTRICAL LINE GALLOPING" TYPE FOR WIRES OF CONTINUOUS MASS *

AUGUSTIN PETRE

We consider a wire initially placed in a horizontal position on two supports. Its cross-section is considered to be tapered due to ice loading. The equation which determines the vertical displacement of an arbitrary section of the wire is

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{q}{H} \tag{1}$$

where q is the load per unit length, and H is the stress in the wire, in horizontal projection. This eyuation is valid in the case of small deflections with respect to the span.

The distributed load is considered as being produced by a combined action of the aerodynamic loads, the body forces, as well as by internal frictions. The effect of the own weight is neglected.

For determining the aerodynamic loads we consider a wire element of unit length im motion in the vertical plane. This element is considered as being initially under the action of an air stream in the horizontal plane.

As a consequence of the vertical displacement of the considered element the air stream will have an incidence, which varies with the angle

$$\Delta i = \frac{1}{V} \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2}$$

where V is the air stream velocity and $\frac{\partial v}{\partial t}$ the vertical velocity of the considered element, which is small as compared to the first one.

The variation of the vertical component of the aerodynamic forces due to the incidence variation will be

$$\Delta F = q_A = P \cos \Delta i + R \sin \Delta i \tag{3}$$

* Presented at the Scientific Session of the Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest, 27—29 May 1966.

and setting this expresion function of the incidence variation

$$q_A = \frac{\partial F}{\partial i}\Delta i = \left(\frac{\partial P}{\partial i}\cos\Delta i - P\sin\Delta i + \frac{\partial R}{\partial i}\sin\Delta i + R\sin\Delta i\right)\Delta i. \tag{4}$$

Taking into account that the incidence variation is small, we may write

$$\begin{aligned}\sin\Delta i &\approx 0\\ \cos\Delta i &\approx 1\end{aligned} \tag{5}$$

such that relation (4), takingo also into account (2), becomes

$$q_A = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial i} + R\right)\frac{1}{V}\frac{\partial v}{\partial t} \tag{6}$$

Inserting here the expression of lift P and the drag R we obtain

$$q_A = \frac{\varrho}{2}cV\left(\frac{\partial C_z}{\partial i} + C_x\right)\frac{\partial v}{\partial t} \tag{7}$$

wher c is the chord of the considered element.

The body forcese for the same element will be

$$q_M = m\frac{^2v}{\partial t^2} \tag{8}$$

and the friction forces will be set under the form

$$q_F = C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{9}$$

The total load which acts on an element of unit length will be

$$q = q_A + q_M + q_F = m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left[C + \frac{\varrho}{2}cV\left(\frac{\partial C_z}{\partial i} + C_x\right)\right]\frac{\partial v}{\partial t} \tag{10}$$

Hence, equation (1) becomes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{m}{H}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left[\frac{C}{H} + \frac{\varrho}{2H}cV\left(\frac{\partial C_z}{\partial i} + C_x\right)\right]\frac{\partial v}{\partial t} \tag{11}$$

Since the unit lift coefficient C_z depends only on the incidence i all the coefficients of the equation may be considered as being constant.

By considering the normal modes of oscillation, the solution will be taken of the form

$$v = X(x)\cdot T(t) \tag{12}$$

such that equation (11) becomes

$$T\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{m}{H}X\frac{d^2T}{dt^2} + \left[\frac{C}{H} + \frac{\varrho}{2H}cV\left(\frac{dC_z}{di} + C_x\right)\right]X\frac{dT}{dt} \tag{13}$$

and if we separate the functions containig a single variable

$$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}+\left[\frac{C}{m}+\frac{\varrho}{2m}cV\left(\frac{dC_z}{di}+C_x\right)\right]\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{H}{m}\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-p^2 \tag{14}$$

Thus, we obtain

$$\begin{gathered}\frac{d^2T}{dt^2}+\left[\frac{C}{m}+\frac{\varrho}{2m}cV\left(\frac{dC_z}{di}+C_x\right)\right]\frac{dT}{dt}+p^2T=0\\ \frac{d^2X}{dx^2}+p^2\frac{m}{H}X=0\end{gathered} \tag{15}$$

and

$$\begin{gathered}\frac{d^2T}{nt^2}+2C_1\frac{dT}{dt}+p^2T=0\\ \frac{d^2X}{dx^2}+C_2^2X=0\end{gathered} \tag{16}$$

where we have denoted

$$\begin{gathered}2C_1=\frac{C}{m}+\frac{\varrho}{2m}cV\left(\frac{dC_z}{di}+C_x\right)\\ C_2^2=p^2\frac{m}{H}\end{gathered} \tag{17}$$

The solutions of these two equations becomes

$$\begin{gathered}T=A_1\,\mathrm{e}^{-C_1t}\sin(\omega t+\alpha)\\ X=A_2\sin c_2x+A_3\cos c_2x\end{gathered} \tag{18}$$

where

$$\omega=\sqrt{p^2-C_1^2} \tag{19}$$

and α, A_1, A_2, A_3 are integrating constants.

The constants A_2 and A_3 will be determined with the aid of the boundary conditions. Thus, on the two supports the displacements must be equal to zero.

Since for

$$x=0$$

it is necessary that

$$v=0$$

it results

$$A_3=0 \tag{20}$$

For the other support it is also necessary that the displacement be zero, that is for

$$x = l$$

it is necesary that

$$v = 0 \tag{21}$$

It results that for not obtaining an identically zero solution, it is necessary to have

$$C_2 l = \pi, 2\pi, ..., n\pi, ...$$

Taking into account (17) it results that the value of p must be

$$p = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{m}} \tag{23}$$

$$n = 1, 2, ...$$

Returning to the expression of natural pulsation (19), this one will be of the form

$$\omega = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l^2}\frac{H}{m} - \frac{1}{4}\left[\frac{C}{m} + \frac{\varrho}{2m} cV\left(\frac{dC_z}{di} + C_x\right)\right]^2} \tag{24}$$

and the natural freqvencies of such a wire will be of the form

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{l}\frac{H}{m} - \frac{1}{4}\left[\frac{C}{m} + \frac{\varrho}{2m} cV\left(\frac{dC_z}{di} + C_x\right)\right]^2} \tag{25}$$

Considering the solutions (18) we abserve that the type of oscilation may be damped if

$$C_1 > 0 \tag{26}$$

or we may have a self-excited oscillation if

$$C_1 < 0 \tag{27}$$

The stability boundary condition that separates the two situations is obtained for

$$C_1 = 0 \tag{28}$$

and for

$$C + \frac{\varrho}{2} cV\left(\frac{dC_z}{di} + C_x\right) = 0 \tag{29}$$

There results that the wind velocity that determines the appearance of the "galloping of electric lines" has the expression

$$V = -\frac{C}{\frac{3}{2} c\left(\frac{dC_z}{di} + C_x\right)} \tag{30}$$

This velocity is hence proportional with the value of the friction coefficient C and inversely proportional to the chord c and the aerodynamic characteristics of the cross-section. However, this phenomeneon can take place only if

$$\frac{dC_z}{di} + C_x < 0$$

that is for relatively great incidences of the profile of the considered section, for incidences ranging from 15° to 45°.

Chaire of Strength of Materials
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

REFERENCES

1. *Hartog Den P.*, Mechanical Vibrations, 1956.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z. : 539.4:620.173:624.04:624.023.9

O METODĂ GENERALĂ PENTRU CALCULUL SARCINII CRITICE DE FLAMBAJ LA GRINZILE CONTINUE PENDULARE SUB SARCINI TRANSVERSALE *

VICTOR DROBOTĂ

Ipoteze de calcul

Într-o serie de articole publicate [1], [2], [3], [4], [5], [6] s-au stabilit formulele care dau sarcina critică de flambaj pentru o serie de cazuri de rezemare și încărcare ale grinzilor continue pendulare sub sarcini transversale concentrate, uniform repartizate, concentrate și uniform repartizate acționînd simultan și convoaie de sarcini concentrate. În aceste articole la fiecare caz de încărcare și rezemare s-au efectuat o serie de calcule absolut necesare și uneori destul de laborioase pentru stabilirea relației care dă sarcina critică.

În cuprinsul articolului de față este prezentată o metodă generală, ce dă posibilitatea stabilirii de relații generale de calcul, cu ajutorul cărora se pot deduce cu ușurință, formulele care dau sarcina critică de flambaj pentru toate cazurile de flambaj studiate în articolele menționate și dau posibilitatea stabilirii de formule noi ,pentru calculul sarcinii critice de flambaj, la o mare varietate de cazuri de încărcare și rezemare la astfel de grinzi.

La stabilirea acestor relații s-au folosit următoarele ipoteze generale de calcul și anume :

— grinda se consideră de rigiditate transversală mică ;

— susținerea grinzii se face pe reazeme așezate la distanțe egale între ele, care permit orice rotire în jurul punctului de fixare ;

— punctele de aplicație ale sarcinilor sînt situate la distanța e de linia reazemelor ;

— toate punctele de fixare ale grinzii și cele de aplicare ale sarcinilor sînt situate în planul de rigiditate maximă al grinzii, care este și plan de simetrie al acesteia, inițial vertical ;

— greutatea proprie a grinzii se consideră neglijabilă ;

— se neglijează de asemenea răsucirea grinzii, care este foarte mică în comparație cu încovoierea laterală a acesteia [1], [2], [3].

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

Pentru stabilirea acestor relații generale s-a pornit de la aplicarea metodei energetice de calcul. Această metodă exprimă egalitatea dintre energia de deformație datorită eforturilor și variația de energie potențială a momentelor și forțelor exterioare. La aplicarea acestei metode se ține seama că energia de deformație datorită eforturilor interioare este egală cu cea de încovoiere laterală produsă de momentul încovoietor, energia de deformație la răsucire fiind neglijabilă în raport cu cea de încovoiere.

Variația de energie potențială a forțelor exterioare are loc prin deplasarea pe verticală a sarcinilor aplicate grinzii datorită încovoierii și rotirii acesteia în jurul liniei care unește reazemele.

Formulelor de calcul deduse pe această cale li se dă o interpretare grafico-analitică care dă posibilitatea generalizării acestora pentru un mare număr de cazuri.

În cele ce urmează se demonstrează relațiile deduse pentru cîteva cazuri generale de încărcare și rezemare la flambajul simetric și se fac o serie de aplicații cu aceste relații pentru cîteva cazuri particulare, ale căror relații de calcul sînt cunoscute din articolele menționate.

A. Flambajul lateral al grinzii continue încărcată cu o singură sarcină concentrată (fig. 1)

Pentru studierea acestui caz în afara ipotezelor generale precizate mai înainte se adaugă ipoteza că, pe grindă acționează într-o secțiune oarecare a acesteia o sarcină P.

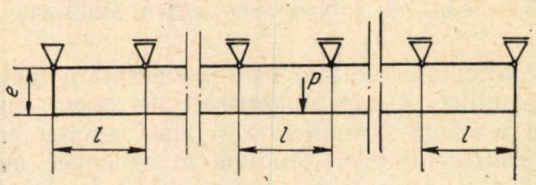


Fig. 1

În vederea aplicării metodei energetice, în acest caz, este necesar să se scrie momentul încovoietor proiectat pe direcția axei Oy într-o secțiune oarecare a grinzii. Expresia acestuia este

$$M_y = \alpha P m$$

unde P este sarcina aplicată pe grindă ;

α — unghiul de rotire al grinzii după pierderea stabilității elastice ;

m — momentul încovoietor într-o secțiune oarecare a grinzii nerotite ($\alpha = 0$) atunci cînd pe grindă acționează o sarcină $P = 1$, scris între limitele între care expresia lui este o funcție continuă.

Energia interioară de deformație pentru întreaga grindă este dată de relația

$$L_i = \frac{1}{2EI_y} \sum \int_0^{li} M_y^2 \, dx = \frac{P^2 \alpha^2}{2EI_y} \sum \int_0^{li} m^2 \, dx .$$

Pentru calculul variației energiei potențiale a sarcinilor este necesar calculul deplasării f_1 (fig. 2) produsă de coborîrea pe verticală a sarcinii P datorită încovoierii grinzii și a deplasării pe verticală f_2 a aceleiași sarcini datorită rotirii grinzii în jurul liniei reazemelor.

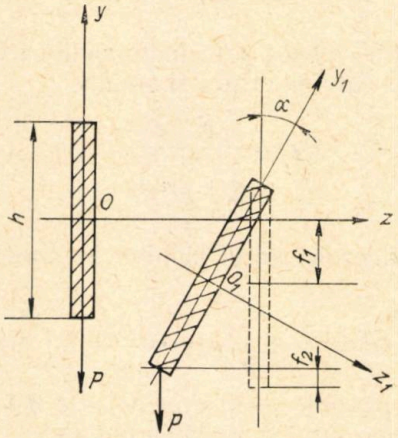


Fig. 2

Deplasarea f_1 se calculează cu ajutorul teoremei lui Castigliano și este

$$f_1 = \alpha W_P = \frac{\alpha}{EI_y} \int M_y \frac{\partial M_y}{\partial (P\alpha)} dx$$

unde W_P este deformația grinzii măsurată pe direcția axei Oz în dreptul sarcinii P.

Înlocuind expresiile lui M_y și $\frac{\partial M_y}{\partial (P\alpha)}$ cu cele corespunzătoare funcție de m, se obține

$$f_1 = \alpha W_P = \frac{P\alpha^2}{EI_y} \sum \int_0^{li} m^2 dx .$$

Deplasarea f_2 se calculează pe cale geometrică și are expresia

$$f_2 = \frac{e\alpha^2}{2} .$$

Datorită deplasării f_2 punctul de aplicație al sarcinii P se ridică față de poziția nerotită a grinzii și în consecință energia potențială se micșorează, așa încît variația de energie potențială produsă de deplasarea pe verticală a sarcinii P este

$$L_e = Pf_1 - Pf_2 = \frac{P^2\alpha^2}{EI_y} \sum \int_0^{li} m^2 dx - \frac{Pe\alpha^2}{2} .$$

Egalînd cele două lucruri mecanice se obține

$$\frac{P^2\alpha^2}{2EI_y}\sum\int_0^{li} m^2\,dx = \frac{P^2\alpha^2}{EI_y}\sum\int_0^{li} m^2\,dx - \frac{Pe\alpha^2}{2}.$$

Reducînd termenii asemenea și făcînd simplificările necesare, se găsește relația care dă valoarea sarcinii critice și anume

$$P_f = \frac{EI_y e}{\sum\int_0^{li} m^2\,dx}.$$

Pentru calculul integralei de la numitor se observă că, aceasta se mai poate scrie

$$\sum\int_0^{li} m^2\,dx = \sum\int_0^{li} m\cdot m\cdot dx = \sum\int_0^{li} m\cdot dA$$

unde produsul mdx reprezintă elementul de arie dA din diagrama de momente construită pentru o sarcină egală cu unitatea.

Dar m reprezintă în același timp dublul ordonatei centrului de greutate al elementului de arie dA în raport cu axa față de care s-a construit diagrama de momente și în consecință expresia de sub integrală reprezintă de două ori momentul static al suprafeței diagramei de momente (construită pentru o sarcină egală cu unitatea aplicată în dreptul și pe direcția forței P) și deci :

$$\sum\int_0^{li} m^2\cdot dx = 2S.$$

În consecință formula care dă sarcina critică în acest caz este

$$P_f = \frac{EI_y e}{\sum\int_0^{li} m^2\,dx} = \frac{EI_y e}{2S}. \qquad (1)$$

Calculul sarcinii critice se reduce deci pentru aceste cazuri la construirea diagramei de momente pentru sarcina egală cu unitatea aplicată în dreptul și pe direcția forței P și la calculul momentului static al acesteia față de axa de referință în raport cu care se măsoară momentele încovoietoare.

Exemple de calcul

1. *Grinda pe două reazeme cu sarcina de mijlocul deschiderii* (fig. 3)

Momemntul static al diagramei de momente construită pentru o sarcină egală cu unitatea aplicată în dreptul și pe direcția forței P este

$$S = \frac{1}{2}\,l\,\frac{l}{4}\,\frac{l}{4}\,\frac{1}{3} = \frac{l^3}{96}.$$

Sarcina critică este

$$P_f = \frac{EI_y e}{\frac{l^3}{48}} = 48 \frac{EI_y e}{l^3}. \qquad (2)$$

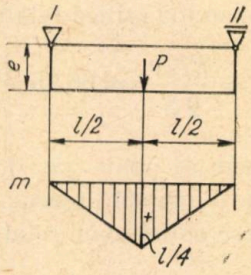


Fig. 3

Aceasta este de fapt și cea mai mică valoare a sarcinii critice în cazul în care forța P ar fi mobilă pe grindă, deoarece pentru poziția sarcinii pe mijlocul deschiderii grinzii se obține momentul static al suprafeței diagramei de momente cu valoarea cea mai mare.

2. *Grinda pe trei reazeme cu sarcina pe mijlocul uneia din deschideri (fig. 4)*

Pentru calculul sarcinei critice se construiește mai întîi diagrama de momente m pentru sarcina egală cu unitatea aplicată în dreptul și pe direcția forței P.

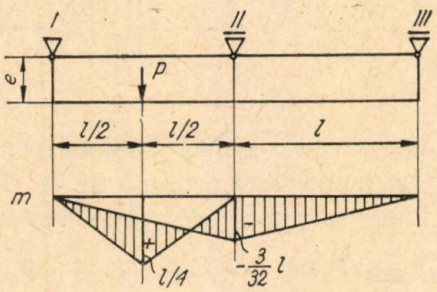


Fig. 4

Se calculează cu ajutorul ecuației celor trei momente, momentul încovoietor pe reazemul intermediar și se obține

$$m_{II} = -\frac{3}{32} l.$$

Se calculează apoi momentul static al diagramei de momente m, care este

$$S = \frac{1}{2} l \left(\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{3} - \frac{2l}{2}\left(-\frac{3}{32} l\right)^2 \frac{1}{3} = \frac{l^3}{33{,}375}.$$

Se obține astfel pentru sarcina critică relația

$$P_f = \frac{EI_y e}{2S} = 66{,}75 \frac{EI_y e}{l^3}. \tag{3}$$

Procedînd în același mod, se poate găsi formula sarcinii critice pentru orice poziție a sarcinii la o grindă rezemată pe un număr oricît de mare de reazeme. Se regăsesc astfel toate relațiile stabilite în cuprinsul articolului (1).

B. Flambajul lateral al grinzii continue încărcată pe una din deschideri cu mai multe sarcini concentrate (fig. 2)

La rezolvarea acestui caz general se pornește întocmai ca și în cazul precedent de la scrierea egalității dintre lucrul mecanic de deformație al eforturilor și variația de energie potențială a forțelor exterioare care acționează asupra grinzii.

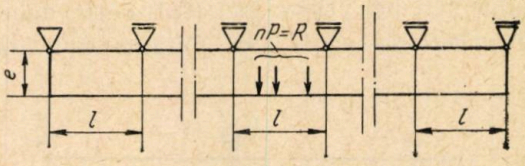


Fig. 5

Dacă se presupune că pe o grindă continuă pendulară, acționează pe una din deschideri mai multe forțe concentrate $P_1, P_2 \ldots P_n$, atunci momentul încovoietor într-o secțiune oarecare a acesteia este dat de relația

$$M_y = \alpha (P_1 m_1 + P_2 m_2 + \ldots + P_n m_n),$$

unde m_1 este momentul încovoietor într-o secțiune oarecare x a grinzii nerotite ($\alpha = 0$) atunci cînd pe grindă acționează numai sarcina $P_1 = 1$;

m_2 — momentul încovoietor în aceiași secțiune x a grinzii nerotite ($\alpha = 0$) atunci cînd pe grindă acționează numai sarcina $P_2 = 1$;

m_n — momentul încovoietor în aceiași secțiune x a grinzii nerotite ($\alpha = 0$) atunci cînd pe grindă acționează numai sarcina $P_n = 1$.

Expresia lucrului mecanic L_i este deci

$$L_i = \frac{1}{EI_y} \sum \int_0^{l_i} M_y^2 \, dx = \frac{\alpha^2}{EI_y} \sum \int_0^{l_i} (P_1 m_1 + P_2 m_2 + \ldots + P_n m_n)^2 \, dx =$$

$$= \frac{\alpha^2}{EI_y} \sum \int_0^{l_i} \left(\sum_1^n P_i m_i \right)^2 dx .$$

Variația de energie potențială a forțelor exterioare este dată de relația

$$L_e = \alpha (P_1 w_{P_1} + P_2 w_{P_2} + \ldots + P_n w_{P_n}) -$$

$$- (P_1 + P_2 + \ldots + P_n) \frac{e\alpha^2}{2} = \alpha \sum_1^n P_i m_i$$

unde $w_{P_1}, w_{P_2}, \ldots w_{P_n}$ sînt deformațiile laterale ale grinzii în dreptul sarcinilor $P_1, P_2, \ldots P_n$ măsurate pe direcția axei Oz luînd ca origină axa Oy a secțiunilor din dreptul reazemelor.

Aceste deformații se calculează folosind teorema lui Castigliano și au următoarea expresie generală

$$w_{P_n} = \frac{1}{EI_y} \sum \int_0^{l_i} M_y \frac{\partial M_y}{\partial (P_n \alpha)} \, dx = \frac{\alpha}{EI_y} \sum \int_0^{l_i} (P_1 m_1 + P_2 m_2 + \ldots +$$

$$+ P_n m_n) \, m_n \, dx = \frac{\alpha}{EI_y} \sum \int_0^{l_i} m_n \sum_1^n P_i m_i \, dx .$$

Expresia lucrului mecanic L_e este

$$L_e = \frac{\alpha^2}{EI_y} \left[P_1 \sum \int_0^{l_i} m_1 \sum_1^n P_i m_i \, dx + P_2 \sum \int_0^{l_i} m_2 \sum_1^n P_i m_i \, dx + \ldots + \right.$$

$$\left. + P_n \sum \int_0^{l_i} m_n \sum_1^n P_i m_i \, dx \right] = \frac{e\alpha^2}{2} \sum_1^n P_i .$$

Egalînd cele două lucruri mecanice se obține

$$\frac{1}{2EI_y} \sum \int_0^{l_i} \left(\sum_1^n P_i m_i \right)^2 dx = \frac{1}{EI_y} \left[P_1 \sum \int_0^{l_i} m_1 \sum_1^n P_i m_i \, dx + \right.$$

$$\left. + P_2 \sum \int_0^{l_i} m_2 \sum_1^n P_i m_i \, dx + \ldots + P_n \sum \int_0^{l_i} m_n \sum_1^n P_i m_i \, dx \right] - \frac{e}{2} \sum_1^n P_i \qquad (5)$$

Pentru cazul particular al grinzii încărcată cu sarcini egale între ele

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$$

egalitatea (5) capătă următoarea formă

$$\frac{P^2}{2EI_y}\sum\int_0^{li}\left(\sum_1^n m_i\right)^2 dx = \frac{P^2}{EI_y}\left[\sum\int_0^{li} m_1\sum_1^n m_i\,dx + \sum\int_0^{li} m_2\sum_1^n m_i\,dx + \ldots + \right.$$

$$\left. + \sum\int_0^{li} m_n\sum_1^n m_i\,dx\right] - \frac{e}{2}\,nP$$

și deoarece

$$\sum\int_0^{li} m_1\sum_1^n m_i\,dx + \sum\int_0^{li} m_2\sum_1^n m_i\,dx + \ldots + \sum\int_0^{li} m_n\sum_1^n m_i\,dx =$$

$$= \sum\int_0^{li}\left(\sum_1^n m_i\right)^2 dx$$

atunci devine

$$\frac{P^2}{2EI_y}\sum\int_0^{li}\left(\sum_1^n m_i\right)^2 dx = \frac{P^2}{EI_y}\sum\int_0^{li}\left(\sum_1^n m_i\right)^2 dx - \frac{e}{2}\,nP\,.$$

De unde rezultă sarcina critică

$$P_f = \frac{n\,e\,EI_y}{\sum\int_0^{li}\left(\sum_1^n m_i\right)^2 dx} = \frac{n\,e\,EI_y}{\sum\int_0^{li} m^2\,dx}\;;\quad \text{unde}\quad m = \sum_1^n m_i \tag{6}$$

sau notînd cu $R = nP$ rezultanta tuturor forțelor ce acționează asupra grinzii, rezultă că valoarea critică a acesteia este dată de relația

$$R_f = \frac{n^2\,e\,EI_y}{\sum\int_0^{li} m^2\,dx}\,. \tag{7}$$

Făcînd același raționament ca mai înainte, rezultă că integrala de la numitor este dublul momentului static al diagramei de momente construită pentru sarcinile P egale cu unitatea. Așa că formula ce dă pe R_f se mai poate scrie

$$R_f = \frac{n^2\,e\,EI_y}{2S}\,. \tag{8}$$

Exemple de calcul

1. *Grinda pe două reazeme încărcată simetric cu două sarcini egale (fig. 6).*

Se construiește mai întîi diagrama de momente m pentru sarcinile P egale cu unitatea.

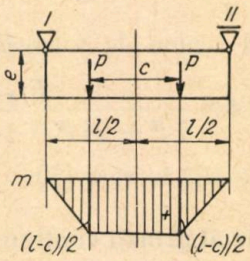


Fig. 6

Momentul static al suprafeței diagramei de momente m este

$$S = 2\left[\frac{1}{2^2}(l-c)^2\,\frac{l-c}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{2^2}\,\frac{(l-c)^2}{2}\,c = \frac{l^3-3lc^2+2c^3}{24}$$

De unde rezultă

$$R_f = \frac{4\,EI_y\,e}{2\,S} = \frac{48\,EI_y\,e}{l^3-3lc^2+2c^3} \tag{9}$$

relație găsită și pe cale analitică în lucrarea (5).

2. *Grinda pe patru reazeme încărcată cu două sarcini egale simetric așezate față de mijlocul unei deschideri de capăt (fig. 7)*

Momentele încovoietoare pe reazemele intermediare calculate pentru $P = 1$ se deduc din ecuația lui Clapeyron aplicată de două ori și au valorile

$$m_{II} = -\frac{l^2-c^2}{5l}\;;\quad m_{III} = -\frac{m_{II}}{4} = \frac{l^2-c^2}{20\,l}.$$

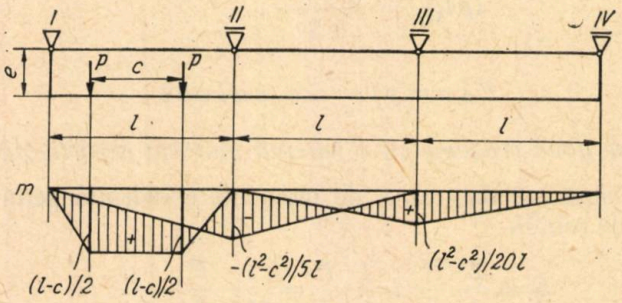


Fig. 7

Cu acestea momentul static S se calculează în modul următor:

$$S = \frac{l^3 - 3lc^2 + 2c^3}{24} - \frac{2l(l^2-c^2)^2}{2\times 3\times 5^2 l^2} + \frac{2l(l^2-c^2)^2}{2^5\times 3\times 5^2} =$$

$$= \frac{1}{2^4\times 3\times 5}\,\frac{7l^4 - 24l^2c^2 + 20c^3 l - 3c^4}{l}.$$

Rezultanta critică ținînd seama de asemenea că $n = 2$, are expresia

$$R_f = \frac{n^2 EI_y e}{2S} = 480\,\frac{EI_y e l}{7l^4 - 24l^2c^2 + 20c^3 l - 3c^4}. \qquad (10)$$

relație cunoscută dedusă într-o altă lucrare (5).

C. Flambajul asimetric al grinzii continue cu sarcină uniform repartizată (fig. 8)

Grinda încărcată cu o sarcină uniform repartizată pe o porțiune de lungime l_1, situată pe una din deschiderile grinzii, poate fi considerată ca fiind încărcată cu sarcini concentrate infinit apropiate.

De aceea pentru calculul sarcinii critice se aplică aceiași relație (8) găsită mai înainte, în care rezultanta forțelor de pe grindă este $R = pl_1$, numărul de sarcini este $n = l_1$, iar momentul static S se calculează pentru grinda încărcată cu sarcina ce corespunde lui $p = 1$.

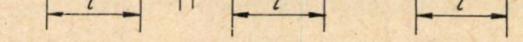


Fig. 8

În consecință formula care dă sarcina critică pentru acest caz este

$$(p\,l_1)_f = \frac{l_1^2\,EI_y\,e}{2S}. \qquad (11)$$

Exemple de calcul

1. *Grinda pe două reazeme cu o sarcină uniform repartizată (fig. 9)*

Momentul static al diagramei de momente construită pentru o sarcină $p = 1$ este dat de relația

$$S = \frac{2}{3}\,\frac{l^2}{8}\,l\,\frac{2}{5}\,\frac{l^2}{8} = \frac{l^5}{2^4\times 3\times 5}.$$

Sarcina critică este dată de relația

$$(pl_1)_f = \frac{l_1^2 EI_y e}{2S} = \frac{l^2 EI_y e}{2\dfrac{l^5}{2^4 \times 3 \times 5}} = 120 \frac{EI_y e}{l^3}. \qquad (12)$$

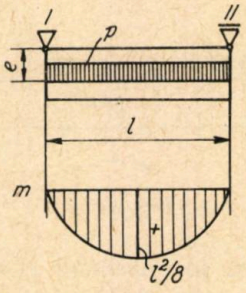


Fig. 9

2. *Grinda pe trei reazeme cu o sarcină uniform repartizată pe una din deschideri (fig. 10)*

Momemntul încovoietor pe reazemul intermediar pentru sarcina $p = 1$ este dat de relația

$$m_{II} = -\frac{l^2}{16}.$$

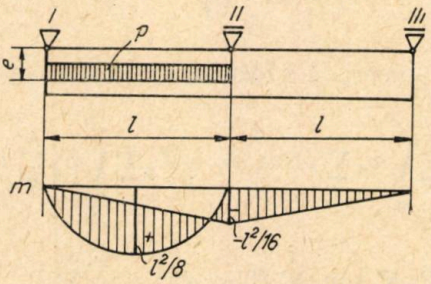


Fig. 10

Momentul static al suprafeței diagramei de momente construită pentru o sarcină $p = 1$ este dată de relația

$$S = l^5\left(\frac{1}{2^4 \times 3 \times 5} - \frac{1}{2^3 \times 3}\right) = \frac{3l^5}{2^3 \times 5}.$$

Sarcina critică este dată de relația

$$(pl_1)_f = \frac{l_1^2 EI_y e}{2S} = \frac{l^2 EI_y e}{\dfrac{3l^5}{2^7 \times 5}} = 213{,}5 \frac{EI_y e}{l^3}. \qquad (13)$$

D. **Flambajul simetric al grinzii continue sub sarcini concentrate (fig. 11)**

În afara ipotezelor generale, în acest caz, se adaugă ipoteza că pe fiecare interval dintre două reazeme acționează o forță concentrată P_i.

La stabilirea relației generale de calcul pentru acest caz, se aplică de asemenea metoda energetică.

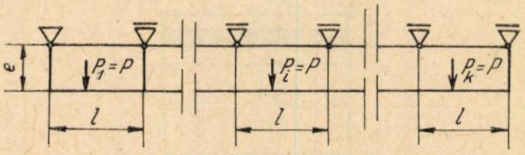


Fig. 11

Păstrînd notațiile folosite în cuprinsul paragrafului *B* și considerînd grinda alcătuită dintr-un număr de k intervale egale, momentul încovoietor într-o secțiune oarecare a grinzii este dat de relația generală.

$$M_y = \alpha (P_1 m_1 + P_2 m_2 + \ldots + P_k m_k) = \alpha \sum_1^k P_i m_i .$$

De asemenea expresia lucrului mecanic L_i este

$$L_i = \frac{\alpha^2}{EI_y} \Sigma \int_0^{li} \left(\sum_1^k P_i m_i \right)^2 dx$$

iar variația de energie potențială a forțelor exterioare este

$$L_e = \frac{\alpha^2}{EI_y} \left[P_1 \Sigma \int_0^{li} m_1 \sum_1^k P_i m_i \, dx + P_2 \Sigma \int_0^{li} m_2 \sum_1^k P_i m_i \, dx + \ldots \right.$$

$$\left. + P_k \Sigma \int_0^{li} m_k \sum_1^k P_i m_i \, dx \right] - \frac{e}{2} \sum_1^k P_i .$$

Egalînd cele două energii se obține următoarea egalitate

$$\frac{1}{2EI_y} \Sigma \int_0^{li} \left(\sum_1^k P_i m_i \right)^2 dx = \frac{1}{EI_y} \left[P_1 \Sigma \int_0^{li} m_1 \sum_1^k P_i m_i \, dx + \right.$$

$$\left. + P_2 \Sigma \int_0^{li} m_2 \sum_1^k P_i m_i \, dx + \ldots + P_k \Sigma \int_0^{li} m_k \sum_1^k P_i m_i \, dx \right] - \frac{e}{2} \sum_1^k P_i . \quad (14)$$

Pentru cazul particular al grinzii asupra căreia acționează forțe de valori egale așezate la distanțe egale între ele cu deschiderea grinzii adică

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_k = P$$

relația de mai sus (14) devine

$$\frac{P^2}{2EI_y}\sum\int_0^{li}\left(\sum_1^k m_i\right)^2 dx = \frac{P^2}{EI_y}\sum\int_0^{li}\left(\sum_1^k m_i\right)^2 dx - \frac{e}{2}kP$$

de unde rezultă sarcina critică

$$P_f = \frac{kEI_y e}{2S}. \tag{15}$$

Exemple de calcul

1. *Grinda pe trei reazeme cu sarcini pe mijlocul deschiderii (fig. 12)*

La construirea diagramei de momente pentru sarcinile $P = 1$ se calculează mai întîi momentul pe reazemul intermediar cu ajutorul ecuației celor trei momente.

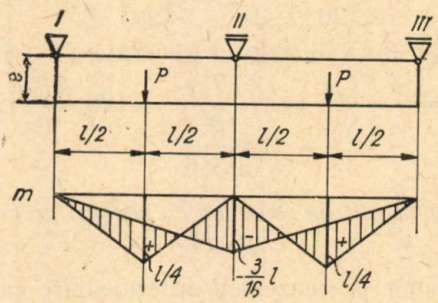


Fig. 12

Se obține astfel

$$m_{II} = -\frac{3}{16}l.$$

Odată cunoscută această valoare se construiește diagrama de momente m și se calculează momentul static al acesteia care este

$$S = l\left(\frac{l}{4}\right)^2\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,2 - \frac{2l}{2}\left(\frac{3}{16}l\right)^2\frac{1}{3} = \frac{7\,l^3}{3\times 2^8}.$$

Se stabilește apoi ținînd seama de relația generală (15) formula sarcinii critice pentru acest caz ținînd seama că $k = 2$ și se obține

$$P_f = \frac{kEI_y e}{2S} = \frac{7\,EI_y e}{3\times 2^8} = 109{,}7\,\frac{EI_y e}{l^3}. \tag{16}$$

2. *Grinda pe patru reazeme cu sarcini pe mijlocul deschiderilor (fig. 13)*

Procedînd întocmai ca în cazul precedent se obțin valorile momentelor pe reazemele intermediare egale între ele și date de relația

$$m_{II} = m_{III} = -\frac{3}{20} l.$$

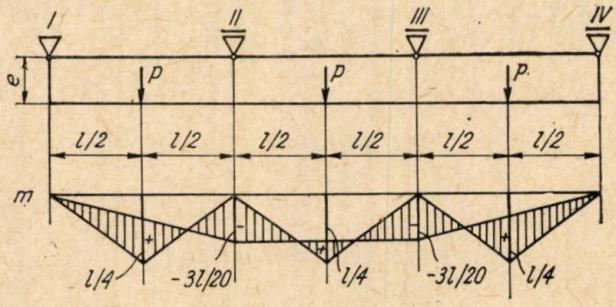


Fig. 13

Momentul static al suprafeței diagramei de momente m este în acest caz

$$S = \frac{3}{96} l^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{20} l\right)^2 \frac{1}{3} 2l - \left(\frac{3}{20}\right)^2 \frac{1}{2} l^3 = \frac{l^3}{2^4 \times 5}.$$

Sarcina critică este dată de relația generală (15) în care $k = 3$

$$P_f = \frac{k E I_y e}{2 S} = \frac{3 E I_y e}{2 \frac{l^3}{2^4 \times 5}} = 120 \frac{E I_y e}{l^3}. \qquad (17)$$

3. *Grinda pe un număr infinit de reazeme cu sarcini pe mijlocul deschiderilor (fig. 14)*

Momentul încovoietor pe reazemele intermediare calculat pentru sarcinile $P = 1$ are valoarea dată de

$$m_I = m_{II} = -\frac{l}{8}.$$

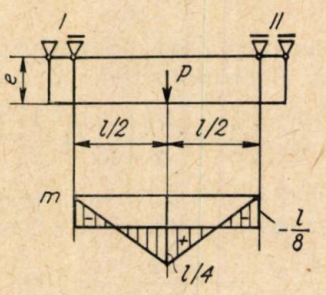


Fig. 14

Momentul static al diagramei de momente m este

$$S = \frac{l}{4} l \frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{1}{3} - \frac{1}{8} l \frac{1}{8} \frac{l}{2} l = \frac{l^3}{2^7 \times 3}$$

iar sarcina critică este dată de relația

$$P_f = \frac{EI_y e}{\frac{l^3}{2^6 \times 3}} = 192 \frac{EI_y e}{l^3}. \tag{18}$$

E. Flambajul simetric al grinzilor continue încărcate pe fiecare deschidere cu mai multe sarcini concentrate de valoare egală (fig. 15)

Presupunînd o grindă continuă încărcată la distanțe egale cu deschiderea dintre două reazeme consecutive cu un convoi de sarcini de rezultantă R, se poate stabili o relație care dă sarcina critică de flambaj, folosind concluziile ce se pot trage din paragrafele B și D ale lucrării.

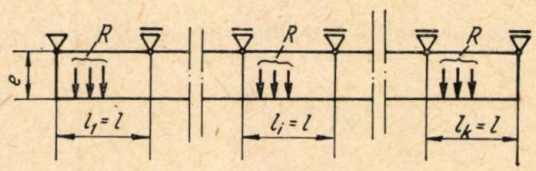


Fig. 15

În acest sens ținînd seama de relațiile (8) și (15) se poate scrie că sarcina critică de flambaj pentru acest caz este dată de relația

$$R_f = \frac{k n^2 EI_y e}{2S}, \tag{19}$$

unde ca în paragrafele menționate, k este numărul de deschideri pe care sînt aplicate convoaiele de sarcini de valori egale, n este numărul de sarcini ce alcătuiesc convoiul dintre două reazeme consecutive, celelalte notații avînd semnificația cunoscută.

F. Flambajul simetric al grinzii continue sub sarcini uniform repartizate (fig. 16)

Considerînd o grindă continuă încărcată la distanțe egale cu deschiderea dintre două reazeme consecutive, cu o sarcină uniform repartizată pe o lungime de grindă l_1, generalizînd relațiile deduse la paragrafele C și D se poate deduce formula sarcinii critice pentru acest caz general

folosind relația (19) în care $R_f = (p\,l_1)_f$, $n = l_1$ (vezi paragraful C), S este momentul static al diagramei de momente m construită pentru sarcina $p = 1$, celelalte notații având semnificația cunoscută.

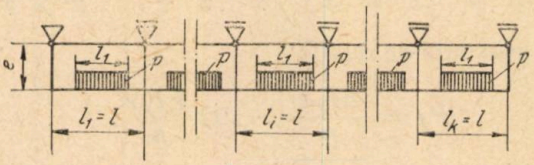


Fig. 16

Sarcina critică este deci dată de relația

$$(pl_1)_f = \frac{k\,l_1^2\,EI_y\,e}{2\,S} \tag{20}$$

în care k este numărul de deschideri pe care se aplică aceiași sarcină pl_1.

Exemple de calcul

1. Grinda pe trei reazeme (fig. 17)

Pentru acest caz momentul intermediar calculat cu ecuația celor trei momente este

$$m_{II} = -\frac{l^2}{8}$$

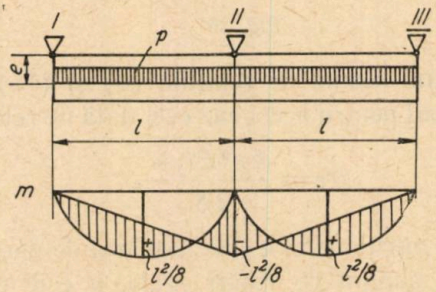


Fig. 17

iar momentul static al suprafeții diagramei de momente m este

$$S = \frac{2}{3}\,\frac{l^2}{8}\,l\,\frac{2}{5}\,\frac{l^2}{8}\,2 - \frac{1}{2}\,\frac{l^2}{8}\,2\,l\,\frac{1}{3}\,\frac{l^2}{8} = \frac{l^5}{2^6 \times 5}.$$

Sarcina critică este dată de relația generală (20) în care $k = 2$

$$(pl_1)_f = \frac{k\,l_1^2\,EI_y\,e}{2\,S} = \frac{2\,l^2\,EI_y\,e}{\frac{2\,l^5}{2^6 \times 5}} = 320\,\frac{EI_y\,e}{l^3}. \tag{21}$$

2. *Grinda pe patru reazeme (fig. 18)*

Momentele pe reazemele intermediare se calculează cu ecuația celor trei momente și au valorile date de relațiile :

$$m_{II} = m_{III} = -\frac{l^2}{10}.$$

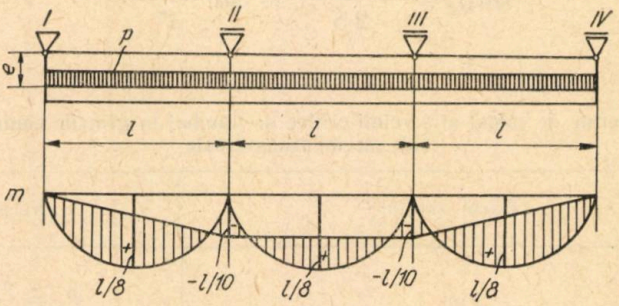


Fig. 18

Momentul static al suprafeței diagramei de momente m este

$$S = \frac{2}{3}\frac{l^2}{8} l \frac{2}{5}\frac{l^2}{8} 3 - \frac{l^2}{10}\frac{1}{2} l \frac{l^2}{10}\frac{1}{3} 2 - \frac{l^2}{10} l \frac{l^2}{10}\frac{1}{2} = \frac{l^5}{2^4 \times 3 \times 5}.$$

Sarcina critică ținînd seama că $k = 3$ este

$$(pl_1)_f = \frac{k l^2 EI_y e}{2S} = \frac{3 l^2 EI_y e}{\frac{2 l^5}{2^4 \times 3 \times 5}} = 360 \frac{EI_y e}{l^3}. \qquad (22)$$

3. *Grinda pe un număr infinit de reazeme (fig. 19)*

Momentele pe reazemele intermediare sînt egale între ele și au expresia

$$m_I = m_{II} = -\frac{l^2}{12}.$$

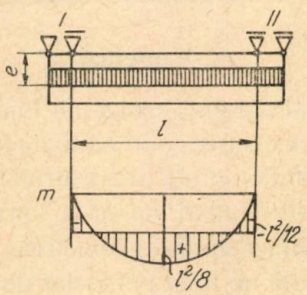


Fig. 19

Momentul static al suprafeței diagramei de momente m este

$$S = \frac{2}{3}\frac{l^2}{8} l \frac{2}{5}\frac{l^2}{8} - \frac{l^3}{12} l \frac{l^2}{12}\frac{1}{2} = \frac{l^5}{2^5 \times 3^2 \times 5}.$$

Sarcina critică este dată de relația (20) în care $k = 1$

$$(pl_1)_f = \frac{k l_1^2 EI_y e}{2S} = 360 \frac{EI_y e}{l^3}. \tag{23}$$

Tabela 1

Formulele generale de calcul al sarcinii critice de flambaj la grinzile continue pendulare sub sarcini transversale

Nr. crt.	Cazul studiat	Formula
1	Fig. 1	$P_f = \frac{EI_y e}{2S}$
2	Fig. 5	$R_f = \frac{n^2 EI_y e}{2S}$
3	Fig. 8	$(pl_1)_f = \frac{l_1^2 EI_y e}{2S}$
4	Fig. 11	$P_f = \frac{k EI_y e}{2S}$
5	Fig. 15	$R_f = \frac{k n^2 EI_y e}{2S}$
6	Fig. 16	$(pl_1)_f = \frac{k l_1^2 EI_y e}{2S}$

G. **Concluzii :**

Formulele de calcul al sarcinii critice de flambaj pentru cazurile generale studiate în cuprinsul articolului sînt adunate în tabela 1.

Urmărind aceste formule se pot trage următoarele concluzii generale:

1. În toate cazurile de flambaj valoarea sarcinii critice depinde de materialul grinzii (E), de dimensiunile geometrice ale secțiunii (I_y), de distanța sarcinilor aplicate față de linia punctelor de rezemare (e) și de poziția acestor sarcini pe grindă (S).

2. Pentru cazurile de flambaj 1, 2, 3 valoarea sarcinii critice este funcție de numărul de sarcini ce acționează pe intervalul dintre reazemele pe care acestea se aplică (n pentru sarcini concentrate l_1 pentru sarcini uniform repartizate), fiind proporțională în cazul sarcinilor concentrate de valoare egală, cu pătratul numărului acestor sarcini (n^2), iar pentru sarcini uniform repartizate cu pătratul lungimii pe care se aplică (l_1).

3. Pentru cazurile de flambaj simetric valoarea sarcinii este funcție, atît de numărul de sarcini care acționează asupra grinzii, cît și de numărul de deschideri pe care acestea se aplică.

4. În toate cazurile, pentru stabilirea relațiilor care dau sarcina critică de flambaj, este necesar calculul momentului static al suprafeței diagramei de momente (S) construită pentru sarcinile ce acționează pe grindă considerate egale cu unitatea (respectiv $P = 1$ pentru sarcini concentrate și $p = 1$ pentru sarcini uniform repartizate).

5. Ținînd seama de concluziile de mai sus, se pot stabili o serie de relații generale și pentru alte cazuri de solicitare la flambaj ale grinzilor continue pendulare, atît pentru cazurile de flambaj simetric, cît și pentru cele de flambaj asimetric, la grinzi solicitate cu sarcini concentrate, uniform repartizate sau cu sarcini concentrate și uniform repartizate.

6. Metoda de calcul aplicată este ușor de folosit, expeditivă și duce la relații de calcul simple, atît pentru cazurile generale, cît și pentru cazurile particulare de interes practic la care se aplică.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Petre, A., Drobotă, V.* Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare, Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 4, tom 16, 1964, Editura Academiei R,S,R.
2. *Drobotă, V.* Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale uniform distribuite, Buletinul Institutului politehnic, București, tomul XXVI, fasc. 6, anul 1964.
3. *Drobotă, V.* Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale concentrate și uniform distribuite, Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 3, tom 18, 1965, Editura Academiei R,S,R.
4. *Drobotă, V.* Flambajul lateral simetric și antisimetric al grinzilor pendulare sub sarcini transversale, Buletinul Institutului politehnic, București, fasc. 5, 1965.
5. *Drobotă, V.* Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini mobile. Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 4, tom 18, 1965, Editura Academiei R,S,R.
6. *Drobotă, V.* Calculul de stabilitate al căii de rulare la grinzile rulante suspendate, Revista Construcția de mașini, nr. 11, 1965, București.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z.: 539.3/.4 : 624.07 : 621.01

EFECTUL MASELOR CONCENTRATE ASUPRA VIBRAȚIILOR LIBERE ALE BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI AVÎND PROFILUL ÎNCHIS *

TOMA PANA

De multe ori în practică se întîlnesc bare cu pereți subțiri care au în lungul lor dispuse mase concentrate. În asemenea cazuri la expresiile amplitudinilor vibrațiilor, stabilite în lucrarea [1], trebuiesc adăugați termeni suplimentari.

Masele concentrate sînt aplicate în secțiunea transversală prin intermediul unor întăriri locale. Se presupune că aceste întăriri modifică starea de tensiune numai în jurul punctului de aplicație; ele nu opresc deplanarea liberă a secțiunii așa cum fac de exemplu diafragmele rigide sau nervurile.

Studiul influenței acestor mase se face ca la barele obișnuite [4] și anume, adăugînd ca forțe exterioare pulsatorii ne masice eforturile ce apar în secțiune ca rezultat al forțelor de inerție care acționează asupra maselor concentrate.

Calculul acestor eforturi se face după procedeul arătat în cele ce urmează.

În planul secțiunii transversale de abscisă x_i se consideră un punct $K(y_k; z_k)$ în care se presupune că este aplicată masa m_k. Deplasările punctului K după direcțiile axelor de coordonate, se exprimă în funcție de deplasările generale ale secțiunii [2] cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned} \xi_k &= \xi - \alpha_y z_k + \alpha_z y_k - \beta \hat{\omega}_k , \\ \eta_k &= \eta + (z_k - z_0)\varphi , \\ \zeta_k &= \zeta - (y_k - y_0)\varphi . \end{aligned} \tag{1}$$

în care s-a notat cu:

ξ, η, ζ — deplasările secțiunii după direcțiile axelor de coordonate,

$\varphi, \alpha_y, \alpha_z$ — unghiurile de rotație ale secțiunii în jurul axelor Ox, Oy, și Oz,

β — funcția de proporționalitate între deplanarea locală și deplanarea unitară $\hat{\omega}_k$ din punctul $K(y_k; z_k)$, calculată în ipoteza răsucirii libere;

y_0, z_0 — coordonatele centrului de rotație al secțiunii.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

Forțele de inerție ce acționează asupra masei m_k sînt :

$$f_{xk} = -m_k \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2},$$

$$f_{yk} = -m_k \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2}; \tag{2}$$

$$f_{zk} = -m_k \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2}.$$

Dacă în secțiunea transversală sînt dispuse mai multe mase m_k, atunci ca rezultat al tuturor forțelor de inerție din secțiune, vor apare următoarele eforturi :

— forța de inerție axială :

$$P_{xi} = \Sigma f_{xk} \tag{3}$$

— forțele de inerție transversale :

$$P_{yi} = \Sigma f_{yk}, \qquad P_{zi} = \Sigma f_{zk}. \tag{4}$$

— momentele încovoietoare de inerție :

$$M_{yi} = -\Sigma f_{xk} z_k, \qquad M_{zi} = \Sigma f_{xk} y_k. \tag{5}$$

— momentul torsional de inerție :

$$M_x = \Sigma f_{yk} z_k - \Sigma f_{zk} y_k \tag{6}$$

— bimomentul de inerție :

$$B_{\hat{\omega} i} = \Sigma f_{xi} \hat{\omega}_k. \tag{7}$$

Înlocuind relațiile (2) în relațiile (3)....,(7), ținînd seama de faptul că deplasările centrului de rotație al secțiunii datorită încovoierii pure se pot scrie sub forma :

$$\alpha_z = -\bar{\eta}' \quad ; \quad \alpha_y = \bar{\zeta}' \tag{8}$$

și neglijînd inerția forfecării în mișcarea vibratorie de încovoiere, adică presupunînd că :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2} \tag{9}$$

rezultă :

$$P_{xi} = -\widetilde{M}_i \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \widetilde{S}_{yi} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}'}{\partial t^2} + \widetilde{S}_{zi} \frac{\partial^2 \bar{\eta}'}{\partial t^2} + \widetilde{S}_{\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} ,$$

$$P_{yi} = -\widetilde{M}_i \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} - [\widetilde{S}_{yi} - z_0 \widetilde{M}_i] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} ,$$

$$P_{zi} = -\widetilde{M}_i \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2} + [\widetilde{S}_{zi} - y_0 \widetilde{M}_i] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} ,$$

$$M_{yi} = \widetilde{S}_{yi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \widetilde{J}_{yi} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}'}{\partial t^2} - \widetilde{J}_{yzi} \frac{\partial^2 \bar{\eta}'}{\partial t^2} - \widetilde{J}_{y\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} , \tag{10}$$

$$M_{zi} = -\widetilde{S}_{zi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \widetilde{J}_{zi} \frac{\partial^2 \bar{\eta}'}{\partial t^2} + \widetilde{J}_{yzi} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}'}{\partial t^2} + \widetilde{J}_{z\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} ,$$

$$M_{xi} = -\widetilde{S}_{yi} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} - [\widetilde{J}_{yi} - z_0 \widetilde{S}_{yi}] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \widetilde{S}_{zi} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2} - [\widetilde{J}_{zi} - y_0 \widetilde{S}_{zi}] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} ,$$

$$B_{\hat{\omega} i} = -\widetilde{S}_{\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \widetilde{J}_{y\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}'}{\partial t^2} + \widetilde{J}_{z\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \bar{\eta}'}{\partial t^2} + \widetilde{J}_{\hat{\omega} i} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} .$$

În relațiile (10) au fost folosite următoarele notații :

$$\widetilde{M}_i = \Sigma m_k ,$$

$$\widetilde{S}_{yi} = \Sigma m_k z_k \quad ; \quad \widetilde{S}_{zi} = \Sigma m_k y_k \quad ; \quad \widetilde{S}_{\hat{\omega} i} = \Sigma m_k \hat{\omega}_k ;$$

$$\widetilde{J}_{yzi} = \Sigma m_k y_k z_k \quad ; \quad \widetilde{J}_{zi} = \Sigma m_k y_k^2 \quad ; \quad \widetilde{J}_{yi} = \Sigma m_k z_k^2 , \tag{11}$$

$$\widetilde{J}_{xi} = \Sigma m_k z_k^2 + \Sigma m_k y_k^2 ,$$

$$\widetilde{J}_{z\hat{\omega} i} = \Sigma m_k y_k \hat{\omega}_k \quad ; \quad \widetilde{J}_{y\hat{\omega} i} = \Sigma m_k z_k \hat{\omega}_k \quad ; \quad \widetilde{J}_{\hat{\omega} i} = \Sigma m_k \hat{\omega}_k^2 ,$$

Dacă se ține seama că deplasările generale ale secțiunii sînt funcții de forma :

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi(x)\, e^{ipt} \\ \bar{\eta}(x, t) &= \bar{\eta}(x)\, e^{ipt} \\ \bar{\zeta}(x, t) &= \bar{\zeta}(x)\, e^{ipt} \\ \varphi(x, t) &= \varphi(x)\, e^{ipt} \end{aligned} \tag{12}$$

unde p reprezintă pulsația mișcării vibratorii, atunci eforturilor (10) le corespund următoarele amplitudini :

$$
\begin{aligned}
P_{xi} &= [\widetilde{M}_i\,\xi - \widetilde{S}_{yi}\,\bar{\zeta}' - \widetilde{S}_{zi}\,\bar{\eta}' - \widetilde{S}_{\hat{\omega}i}\,\beta]\,p^2\,,\\
P_{yi} &= [\widetilde{M}_i\,\bar{\eta} + (\widetilde{S}_{yi} - z_0\,\widetilde{M}_i)\,\varphi]\,p^2\,,\\
P_{zi} &= [\widetilde{M}_i\,\bar{\zeta} - (\widetilde{S}_{zi} - y_0\,\widetilde{M}_i)\,\varphi]\,p^2\,,\\
M_{yi} &= [-\widetilde{S}_{yi}\,\xi + \widetilde{J}_{yi}\,\bar{\zeta}' + \widetilde{J}_{yzi}\,\bar{\eta}' + \widetilde{J}_{y\hat{\omega}i}\,\beta]\,p^2\,,\\
M_{zi} &= [\widetilde{S}_{zi}\,\xi - \widetilde{J}_{zi}\,\bar{\eta}' - \widetilde{J}_{yzi}\,\bar{\zeta}' - \widetilde{J}_{z\hat{\omega}i}\,\beta]\,p^2\,,\\
M_{xi} &= [\widetilde{S}_{yi}\,\bar{\eta} + (\widetilde{J}_{yi} - z_0\,\widetilde{S}_{yi})\,\varphi - \widetilde{S}_{zi}\,\bar{\zeta} + (\widetilde{J}_{zi} - y_0\,\widetilde{S}_{zi})\,\varphi]\,p^2\,,\\
B_{\hat{\omega}i} &= [\widetilde{S}_{\hat{\omega}i}\,\xi - \widetilde{J}_{y\hat{\omega}i}\,\bar{\zeta}' - \widetilde{J}_{z\hat{\omega}i}\,\bar{\eta}' - \widetilde{J}_{\hat{\omega}i}\,\beta]\,p^2\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Cînd se studiază numai vibrațiile de încovoiere și de răsucire ca în cele ce urmează, deplasările axiale ale secțiunii pot fi neglijate. Aceasta înseamnă că în relațiile (13) se consideră :

$$\xi(x) \equiv 0\,.$$

După cum s-a demostrat în lucrarea [3], amplitudinile vibrațiilor de încovoiere și de răsucire pentru barele cu pereți subțiri încărcate cu forțe exterioare pulsatorii, în cazul particular al secțiunii biaxial simetrice, sînt date de relațiile :

$$
\begin{aligned}
\bar{\eta}(\theta) &= \bar{\eta}_0\,F'_{11}(\theta) + \bar{\eta}'_0\,[F_{11}(\theta) + \varkappa\,F_{12}(\theta)] + \frac{M_{z0}\,l^2}{EI_z}\,F'_{12}(\theta) + \\
&+ \frac{T_{y0}\,l^3}{EI_z}\,F_{12}(\theta) + \frac{M_{zi}\,l^2}{EI_z}\,F'_{12}(\theta-\theta_i) - \frac{P_{yi}\,l^3}{EI_z}\,F_{12}(\theta-\theta_i)\,;\\
\bar{\zeta}(\theta) &= \bar{\zeta}_0\,F'_{21}(\theta) + \bar{\zeta}'_0\,[F_{21}(\theta) + \varkappa\,F_{22}(\theta)] - \frac{M_{y0}\,l^2}{EI_y}\,F'_{22}(\theta) + \\
&+ \frac{T_{z0}\,l^3}{EI_y}\,F_{22}(\theta) - \frac{M_{yi}\,l^2}{EI_y}\,F'_{22}(\theta-\theta_i) - \frac{P_{zi}\,l^3}{EI_y}\,F_{22}(\theta-\theta_i)\,;\\
\varphi(\theta) &= \varphi_0\,[F'_{31}(\theta) + \varkappa\,a_f^2\,F'_{32}(\theta)] + \nu\,\beta_0\,l\,[F_{31}(\theta) + (\varkappa + \varkappa\,a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2)\cdot\\
&\cdot F_{32}(\theta)] + \frac{\nu\,B_{\hat{\omega}0}\,l^2}{EI_{\hat{\omega}}}\,F'_{32}(\theta) + \frac{M_{tf0}\,l}{GI_f}\left[F_{31}(\theta) + \left(\varkappa\,a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu}\,c_{\hat{\omega}}^2\right)F_{32}(\theta)\right] - \\
&- \frac{1}{1-\nu}\,c_{\hat{\omega}}^2\,\frac{M_{ti}\,l}{GI_f}\,F_{32}(\theta-\theta_i) + \frac{\nu\,B_{\hat{\omega}i}\,l^2}{EI_{\hat{\omega}}}\,F'_{32}(\theta-\theta_i).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

în care $\bar{\eta}_0$, $\bar{\eta}'_0$, M_{z0}, T_{y0}, $\bar{\zeta}_0$, $\bar{\zeta}'_0$, M_{y0}, T_{z0}, φ_0, β_0, $B_{\hat{\omega}0}$ și M_{tf0} sînt amplitudinile parametrilor inițiali iar: M_{zi}, P_{yi}, M_{yi}, P_{zi}, M_{ti} și $B_{\hat{\omega}i}$ reprezintă amplitudinile sarcinilor exterioare pulsatorii aplicate în secțiunea de abscisă adimensională:

$$\theta_i = \frac{x_i}{l} . \tag{15}$$

Funcțiile $f(\theta)$ au expresiile:

$$F_{j1}(\theta) = \frac{s_{j2}^2}{s_{j1}(s_{j2}^2 - s_{j1}^2)} sh\, s_{j1}\theta - \frac{s_{j1}^2}{s_{j2}(s_{j2}^2 - s_{j1}^2)} sh\, s_{j2}\theta ,$$

$$F_{j2}(\theta) = \frac{1}{s_{j1}(s_{j2}^2 - s_{j1}^2)} sh\, s_{j1}\theta - \frac{1}{s_{j2}(s_{j2}^2 - s_{j1}^2)} sh\, s_{j2}\theta . \tag{16}$$

în care j poate lua valorile 1, 2 sau 3, iar

$$s_{11,12} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 + 4\varkappa b_z^4}\right]} ,$$

$$s_{21,22} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 + 4\varkappa b_y^4}\right]} , \tag{17}$$

$$s_{31};\ s_{32} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[-(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) \pm \sqrt{(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2)^2 + 4\varkappa(a_{\hat{\omega}}^4 - \varkappa a_f^2)}\right]}$$

Notațiile utilizate în relațiile (17) au următoarea semnificație:

$$\varkappa = \frac{\gamma p^2 l^2}{Eg} \ ; \quad b_z^4 = \frac{Al^2}{I_z} \ ; \quad b_y^4 = \frac{Al^2}{I_y} ,$$

$$h^2 = \frac{I_y + I_z}{A} \tag{18}$$

$$a_f^2 = \frac{EA}{GI_f} h^2 \ ; \quad c_{\hat{\omega}}^2 = \frac{GI_t}{EI_{\hat{\omega}}} \nu l^2 \ ; \quad a_{\hat{\omega}}^4 = \frac{A\nu}{I_{\hat{\omega}}} h^2 l^2$$

În alcătuirea acestor relații sînt cuprinse mărimile:

A — aria secțiunii;
I_y și I_z — momentele de inerție axiale principale ale secțiunii;
I_f — momentul de inerție dirijat al secțiunii;
I_t — momentul de inerție polar convențional;
$I_{\hat{\omega}}$ — momentul de inerție sectorial generalizat;
$\nu = 1 - \frac{I_t}{I_f}$ — coeficientul de deformație al secțiunii;

p — pulsația vibrației ;

γ — greutatea specifică a materialului din care este confecționată bara ;

E și G — modul de elasticitate longitudinal și transversal ;

l — lungimea barei ;

g — accelerația gravitației.

Scriind relațiile (13) pentru cazul particular al secțiunii biaxial simetrice (la care $y_0 = z_0 = 0$ deoarece centrul de rotație și centrul de greutate se confundă cu originea sistemului de coordonate), trecînd la variabila adimensională θ și înlocuind în relațiile (14) rezultă :

$$\bar{\eta}(\theta) = \bar{\eta}_0 F'_{11}(\theta) + \bar{\eta}'_0 [F_{11}(\theta) + \varkappa F_{12}(\theta)] + \frac{M_{z0} l^2}{EI_z} F'_{12}(\theta) +$$

$$+ \frac{T_{y0} l^3}{EI_z} F_{12}(\theta) - \frac{p^2 l^2}{EI_z} [\tilde{J}_{zi} \frac{1}{l} \bar{\eta}'(\theta_i) + \tilde{J}_{yzi} \frac{1}{l} \bar{\zeta}'(\theta) +$$

$$+ \tilde{J}_{z\hat{\omega}i} \beta(\theta_i)] F'_{12}(\theta - \theta_i) - \frac{p^2 l^3}{EI_z} [\tilde{M}_i \bar{\eta}(\theta_i) + \tilde{S}_{yi} \varphi(\theta_i)] F_{12}(\theta - \theta_i),$$

$$\bar{\zeta}(\theta) = \bar{\zeta}_0 F'_{21}(\theta) + \bar{\zeta}'_0 [F_{21}(\theta) + \varkappa F_{22}(\theta)] - \frac{M_{y0} l^2}{EI_y} F'_{22}(\theta) +$$

$$+ \frac{T_{z0} l^3}{EI_y} F_{22}(\theta) - \frac{p^2 l^2}{EI_y} [\tilde{J}_{yi} \frac{1}{l} \bar{\zeta}'(\theta_i) + \tilde{J}_{yzi} \frac{1}{l} \bar{\eta}'(\theta_i) + \tilde{J}_{y\hat{\omega}i} \beta(\theta_i)] \cdot$$

$$\cdot F'_{22}(\theta - \theta_i) - \frac{p^2 l^3}{EI_y} [\tilde{M}_i \bar{\zeta}(\theta_i) - \tilde{S}_{zi} \varphi(\theta_i)] F_{22}(\theta - \theta_i) ; \qquad (19)$$

$$\varphi(\theta) = \varphi_0 [F'_{31}(\theta) + \varkappa a_f^2 F'_{32}(\theta)] + \nu \beta_0 l \left[F_{31}(\theta) + \left(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2\right) F_{32}(\theta)\right] +$$

$$+ \frac{\nu B_{\hat{\omega}0} l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F'_{32}(\theta) + \frac{M_{tf0} l}{GI_f} \left[F_{31}(\theta) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_{32}(\theta)\right] -$$

$$- \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \frac{p^2 l}{GI_f} [\tilde{S}_{yi} \bar{\eta}(\theta_i) + \tilde{J}_{yi} \varphi(\theta_i) - \tilde{S}_{zi} \bar{\zeta}(\theta_i) + \tilde{J}_{zi} \varphi(\theta_i)] F_{32}(\theta - \theta_i) -$$

$$- \frac{\nu p^2 l^2}{EI_{\hat{\omega}}} \left[\tilde{J}_{y\hat{\omega}i} \frac{1}{l} \bar{\zeta}'(\theta_i) + \tilde{J}_{z\hat{\omega}i} \frac{1}{l} \bar{\eta}'(\theta_i) + \tilde{J}_{\hat{\omega}i} \beta(\theta_i)\right] F'_{32}(\theta - \theta_i).$$

Relațiile (19) conțin amplitudinile $\bar{\eta}(\theta_i)$, $\bar{\eta}'(\theta_i)$, $\bar{\zeta}(\theta_i)$, $\bar{\zeta}'(\theta_i)$, $\varphi(\theta_i)$ și, $\beta(\theta_i)$ din secțiunea θ_i în care sînt aplicate masele concentrate. Primele cinci amplitudini se calculează direct din relațiile (14) și din derivatele acestora în raport cu θ scrise pentru $\theta = \theta_i$.

Deoarece

$$F_{12}(0) = F_{22}(0) = F_{32}(0) = 0$$
$$F'_{12}(0) = F'_{22}(0) = F'_{32}(0) = 0 \qquad (20)$$
$$F''_{12}(0) = F''_{22}(0) = F''_{32}(0) = 0$$

termenii din relațiile (14) proveniți din considerarea forțelor exterioare pulsatorii sînt nuli astfel încît se obține :

$$\bar{\eta}(\theta_i) = \bar{\eta}_0 F'_{11}(\theta_i) + \bar{\eta}'_0 [F_{11}(\theta_i) + \varkappa F_{12}(\theta_i)] + \frac{M_{z0} l^2}{EI_z} F'_{12}(\theta_i) + \frac{T_{y0} l^3}{EI_z} F_{12}(\theta_i),$$

$$\bar{\eta}'(\theta_i) = \bar{\eta} F''_{11}(\theta_i) + \bar{\eta}'_0 [F'_{11}(\theta_i) + \varkappa F'_{12}(\theta_i)] + \frac{M_{z0} l^2}{EI_z} F''_{12}(\theta_i) + \frac{T_{y0} l^3}{EI_z} F'_{12}(\theta_i),$$

$$\bar{\zeta}(\theta_i) = \bar{\zeta}_0 F'_{21}(\theta_i) + \bar{\zeta}'_0 [F_{21}(\theta_i) + \varkappa F_{22}(\theta_i)] - \frac{M_{y0} l^2}{EI_y} F'_{22}(\theta_i) + \frac{T_{z0} l^3}{EI_y} F_{22}(\theta_i),$$

$$\bar{\zeta}'(\theta_i) = \bar{\zeta}_0 F''_{21}(\theta_i) + \bar{\zeta}'_0 [F'_{21}(\theta_i) + \varkappa F'_{22}(\theta_i)] - \frac{M_{y0} l^2}{EI_y} F''_{22}(\theta_i) + \frac{T_{z0} l^3}{EI_y} F'_{22}(\theta_i),$$

$$\varphi(\theta_i) = \varphi_0 [F'_{31}(\theta_i) + \varkappa a_f^2 F'_{32}(\theta_i)] + \nu \beta_0 l \left[F_{31}(\theta_i) + \left(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2\right) F_{32}(\theta_i)\right] +$$
$$+ \frac{\nu B_{\hat{\omega}0} l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F'_{32}(\theta_i) + \frac{M_{tf0} l}{GI_f} \left[F_{31}(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_{32}(\theta_i)\right]. \qquad (21)$$

Amplitudinea funcției deplanărilor $\beta(\theta_i)$ poate fi calculată în funcție de derivatele ultimei relații (14) scrise pentru $\theta = \theta_i$, cu ajutorul expresiei :

$$\beta(\theta_i) = \frac{-1}{\nu l \left(\varkappa - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right)} \left[\varphi'''(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^4\right) \varphi'(\theta_i)\right]. \qquad (22)$$

Înlocuind relațiile (21) și (22) în relațiile (19) rezultă expresiile amplitudinilor vibrațiilor de încovoiere și de răsucire pentru bara cu mase concentrate. Aceste expresii conțin ca necunoscute numai parametrii inițiali.

După cum rezultă din relațiile (19) expresiile amplitudinilor vibrațiilor libere de încovoiere și de răsucire, pentru bara cu mase concentrate, sînt cuplate între ele chiar și în cazul secțiunilor biaxial simetrice, spre deosebire de bara fără mase concentrate la care relațiile amplitudinilor libere [1] sau forțate (14) sînt independente cînd secțiunea admite două axe de simetrie.

Dacă, de exemplu, sînt îndeplinite condițiile :

$$\tilde{S}_{zi} = \tilde{J}_{yzi} = \tilde{J}_{y\hat{\omega}i} = 0 \qquad (23)$$

vibrația de încovoiere din planul Ozx se decuplează de vibrația de încovoiere-răsucire.

Cînd sînt satisfăcute condițiile :

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_{yi} &= \widetilde{S}_{zi} = \widetilde{J}_{yzi} = 0 , \\ \widetilde{J}_{y\hat{\omega}i} &= \widetilde{J}_{z\hat{\omega}i} = 0 , \end{aligned} \tag{24}$$

amplitudinile vibrațiilor de încovoiere și de răsucire se decuplează. Expresiile acestora sînt :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\theta) = \bar{\eta}_0 \Big[& F'_{11}(\theta) - \frac{p^2 l^3}{EI_z} \widetilde{M}_i F'_{11}(\theta_i) F_{12}(\theta - \theta_i) - \frac{p\, l}{EI_z} \widetilde{J}_{zi}\, F''_{11}(\theta_i) F'_{12}(\theta - \theta_i) \Big] + \\ & + \eta'_0 \Big\{ F_{11}(\theta) + \varkappa F_{12}(\theta) - [F_{11}(\theta_i) + \varkappa F_{12}(\theta_i)] \frac{p^2 l^3}{EI_z} \widetilde{M}_i F_{12}(\theta - \theta_i) - \\ & - [F'_{11}(\theta_i) + \varkappa F'_{12}(\theta_i)] \frac{p^2 l}{EI_z} \widetilde{J}_{zi} F'_{12}(\theta - \theta_i) \Big\} + \frac{M_{z0} l^2}{EI_z} \Big[F'_{12}(\theta) - \\ & - \frac{p^2 l^3}{EI_z} \widetilde{M}_i F'_{12}(\theta_i) F_{12}(\theta - \theta_i) - \frac{p^2 l}{EI_z} \widetilde{J}_{zi} F''_{12}(\theta_i) F'_{12}(\theta - \theta_i) \Big] + \\ & + \frac{T_{y0} l^3}{EI_z} \Big[F_{12}(\theta) - \frac{p^2 l^3}{EI_z} \widetilde{M}_i F_{12}(\theta_i) F_{12}(\theta - \theta_i) - \frac{p^2 l}{EI_z} \widetilde{J}_{zi} F'_{12}(\theta_i) \times \\ & \times F'_{12}(\theta - \theta_i) \Big] . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}(\theta) = \bar{\zeta}_0 \Big[& F'_{21}(\theta) - \frac{p^2 l^3}{EI_y} \widetilde{M}_i F'_{21}(\theta_i)\; F_{22}(\theta - \theta_i) - \frac{p^2 l}{EI_y} \widetilde{J}_{yi} F''_{21}(\theta_i)\; F'_{22}(\theta - \theta_i) \Big] + \\ & + \zeta'_0 \Big\{ F_{21}(\theta) + \varkappa F_{22}(\theta) - [F_{21}(\theta_i) + \varkappa F_{22}(\theta_i)] \frac{p^2 l^3}{EI_y} \widetilde{M}_i F_{22}(\theta - \theta_i) - \\ & - [F'_{21}(\theta_i) + \varkappa F'_{22}(\theta_i)] \frac{p^2 l}{EI_y} \widetilde{J}_{yi} F'_{22}(\theta - \theta_i) \Big\} - \frac{M_{y0} l^2}{EI_y} \Big[F'_{22}(\theta) - \\ & - \frac{p^2 l^3}{EI_y} \widetilde{M}_i F'_{22}(\theta_i)\; F_{22}(\theta - \theta_i) - \frac{p^2 l}{EI_y} \widetilde{J}_{yi} F''_{22}(\theta_i) \cdot F'_{22}(\theta - \theta_i) \Big] + \\ & + \frac{T_{z0} l^3}{EI_y} \Big[F_{22}(\theta) - \frac{p^2 l^3}{EI_y} \widetilde{M}_i F_{22}(\theta_i) F_{22}(\theta - \theta_i) - \\ & - \frac{p^2 l}{EI_y} \widetilde{J}_{yi} F'_{22}(\theta_i)\; F'_{22}(\theta - \theta_i) \Big] . \end{aligned} \tag{25}$$

$$\varphi(\theta) = \varphi_0 \Bigg\{ F'_{31}(\theta) + \varkappa a_f^2 F'_{32}(\theta) - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \frac{p^2 l}{GI_f} \widetilde{J}_{xi} \left[F'_{31}(\theta_i) + \right.$$

$$+ \varkappa a_f^2 F'_{32}(\theta_i) \left] F_{32}(\theta - \theta_i) + \frac{p^2 l}{EI_{\hat{\omega}} \left(\varkappa - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right)} \widetilde{J}_{\hat{\omega} i} \Bigg[F_{31}^{IV}(\theta_i) + \varkappa a_f^2 F_{32}^{IV}(\theta_i) + \right.$$

$$+ \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F''_{31}(\theta_i) + \varkappa a_f^2 \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F''_{32}(\theta_i) \Bigg] F'_{32}(\theta - \theta_i) \Bigg\} +$$

$$+ \nu \beta_0 l \Bigg\{ F_{31}(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_{32}(\theta) - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \frac{p^2 l}{GI_f} \widetilde{J}_{xi} [F_{31}(\theta_i) +$$

$$+ (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_{32}(\theta_i)] F_{32}(\theta - \theta_i) + \frac{p^2 l}{EI_{\hat{\omega}} \left(\varkappa - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right)} \widetilde{J}_{\hat{\omega} i} \Bigg[F'''_{31}(\theta_i) +$$

$$+ (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F'''_{32}(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F'_{31}(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \right.$$

$$+ \left. \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F'_{32}(\theta_i) \Bigg] F'_{32}(\theta - \theta_i) \Bigg\} + \frac{\nu B_{\hat{\omega} 0} l^2}{EI_{\hat{\omega}}} \Bigg\{ F'_{32}(\theta) -$$

$$- \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \frac{p^2 l}{GI_f} \widetilde{J}_{xi} F'_{31}(\theta_i) \cdot F_{32}(\theta - \theta_i) + \frac{p^2 l}{EI_{\hat{\omega}} \left(\varkappa - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right)} \widetilde{J}_{\hat{\omega} i} \Bigg[F_{32}^{IV}(\theta_i) +$$

$$+ \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F''_{32}(\theta_i) \Bigg] F''_{32}(\theta - \theta_i) \Bigg\} + \frac{M_{tf0} l}{GI_f} \Bigg\{ F_{31}(\theta) + \left(\varkappa a_f^2 + \right.$$

$$+ \left. \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F_{32}(\theta) - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \frac{p^2 l}{GI_f} \widetilde{J}_{xi} \Bigg[F_{31}(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \right.$$

$$+ \left. \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F_{32}(\theta_i) \Bigg] F_{32}(\theta - \theta_i) + \frac{p^2 l}{EI_{\hat{\omega}} \left(\varkappa - \frac{1}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right)} \widetilde{J}_{\hat{\omega} i} \times$$

$$\times \Bigg[F'''_{31}(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F'''_{32}(\theta_i) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F'_{31}(\theta_i) +$$

$$+ \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right)^2 F'_{32}(\theta_i) \Bigg] F'_{32}(\theta - \theta_i) \Bigg\}.$$

Este de remarcat faptul că relațiile (23) exprimă, condiția ca centrul de greutate al maselor concentrate din secțiune să se afle pe axa *Oz*, iar relațiile (24) condiția ca centrul de greutate să se confunde cu originea sistemului de coordonate.

Deoarece sistemul de axe este central și principal rezultă că atunci cînd centrul de greutate al maselor concentrate se află pe una din axe, vibrația de încovoiere după direcția acelei axe se decuplează de vibrația generală de încovoiere-răsucire. Dacă centrul de greutate al maselor și centrul de greutate al secțiunii se confundă, atunci vibrațiile de încovoiere și de răsucire se pot produce independent una de cealaltă, ele fiind decuplate.

Pentru calculul pulsațiilor se pun condițiile la limite și cu ajutorul relațiilor (25) se obțin trei sisteme algebrice omogene în care necunoscutele sînt parametrii inițiali. Condițiile de compatibilitate ale acestor sisteme reprezintă ecuațiile pulsațiilor.

În mod analog se procedează și în cazul vibrațiilor cuplate dar rezultă o ecuație a pulsațiilor mult mai complicată.

Ecuațiile pulsațiilor proprii sînt ecuații transcendente ; deoarece ele conțin numai sinusul și cosinusul hiperbolic rezolvarea este întrucîtva ușurată, fapt care permite simplificarea programării în cazul în care rezolvarea se face pe un calculator electronic.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Pană T.* Aplicarea metodei parametrilor inițiali în studiul vibrațiilor la barele cu pereți subțiri avînd profilul închis, Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, nr. 6, tom. XXVII, 1965.
2. *Pană T.* Calculul pulsațiilor proprii ale vibrațiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereți subțiri avînd profilul închis, Studii și cercetări de mecanică aplicată nr. 2, tom. 18, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1965.
3. *Pană T.* Calculul barelor cu pereți subțiri avînd profilul închis încărcate cu sarcini perturbatoare periodice, Comunicare prezentată la Conferința de mecanică, București, 27—30 septembrie 1965.
4. *Ponomariov S. D.* Calculul de rezistență în construcția de mașini, vol. 3, Editura tehnică, București, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

C.Z.: 621.51/54

OSCILAŢII PROPRII ŞI FORŢATE ÎN CONDUCTELE DE AER COMPRIMAT *

I. N. CONSTANTINESCU, A. V. DARABONT
Institutul de mine Petroşani

Se ştie că dezavantajul principal al compresoarelor cu piston constă în neuniformitatea la aspiraţia şi refularea aerului. Ca efect al existenţei undelor de şoc se produce vibraţia conductelor şi chiar a compresorului. Frecvenţa oscilaţiilor este proporţională, atît cu numărul de cilindri, cît şi cu turaţia compresorului. Oscilaţia conductelor de legătură provoacă o serie de fenomene periculoase şi dăunătoare: distruge suporţii conductelor, foarfecă şuruburile de la îmbinările cu flanşe, produce ruperea conductelor la locurile de îmbinare, poate da naştere la vibraţia excesivă a cilindrilor, măreşte consumul de energie.

In unele cazuri, supraconsumul de energie datorit vibraţiilor se ridică la 10% [1].

Problemele teoriei oscilaţiilor curentului de aer în conducte şi influenţa lor asupra sistemului de conducte şi a compresoarelor nu au fost suficient de amănunţit studiate.

O serie de probleme ca deplasarea pulsatorie a curentului de aer comprimat în conductă, influenţa curentului pulsatoriu asupra randamentului compresoarelor, asupra vibraţiilor mecanice ale conductei, pierderea de energie în conductă, sînt strîns legate de teoria oscilaţiilor curentului de aer în conducte.

In lucrarea de faţă ne propunem să determinăm relaţiile care exprimă oscilaţiile forţate şi proprii ale presiunii şi vitezei curentului de aer dintr-o conductă, cînd se cunosc condiţiile iniţiale şi la limită.

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care caracterizează deplasarea pulsatorie a curentului de aer într-o conductă este de forma:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \varrho_0\left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2av\right) \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \varrho_0 c^2 \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

* Manuscris predat la redacţie la 17 mai 1966

unde

p, v — presiunea, respectiv viteza curentului de aer,

ϱ_0 — densitatea aerului

c — viteza sunetului în gaze,

$$2a = \frac{\lambda v}{2d} \quad \text{unde}$$

λ — un coeficient care depinde de rugozitatea conductei și de cifra lui Reynolds,

d — diametrul conductei.

Pentru a putea determina funcțiile $p(x, t)$ și $v(x, t)$ din sistemul (1) este necesar să cunoaștem condițiile inițiale și la limită.

Presupunem că la momentul $t = 0$, aerul nu se deplasează în conductă deci presiunea p și viteza v pentru $t \leqslant 0$ nu depind de timp. Atunci valorile inițiale ale funcției presiune și viteză pentru un punct oarecare al conductei sînt

$$t = 0; \quad p(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = 0 \tag{2}$$

Condițiile la limită depind de lungimea conductei, poziția rezervorului tampon în legătură cu compresorul, de poziția supapelor compresorului ș.a. Multiplicăm ambii membrii ai sistemului (1) cu $e^{-p^* t}$ unde p^* reprezintă operatorul lui Laplace și integrăm în raport cu timpul t între limitele de la 0 la ∞. Ținînd seama că t și x sînt variabile independente putem scrie:

$$\int_0^\infty \frac{\partial p}{\partial x} e^{-p^* t}\, dt = \frac{d}{dx} \int_0^\infty p e^{-p^* t}\, dt = \frac{dLp}{dx} \tag{3}$$

$$\varrho_0 \int_0^\infty \left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2av \right) e^{-p^* t}\, dt = \varrho_0 \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t} e^{-p^* t}\, dt + 2a\varrho_0 \int_0^\infty v e^{-p^* t}\, dt \tag{4}$$

Integrînd ecuațiile (3) și (4) obținem

$$-\frac{dLp}{dx} = \varrho_0 (p^* + 2a) Lv; \quad -\frac{dLv}{dx} = \frac{p^*}{\varrho_0 c^2} Lp \tag{5}$$

Derivînd prima relație de la (5) în raport cu x și înlocuind în expresia obținută valoarea $\frac{dLv}{dx}$ din a doua relație de la (5), obținem

$$\frac{d^2 Lp}{dx^2} - \omega^2 Lp = 0$$

avînd soluția generală de forma

$$Lp = C_1 ch\, \omega x + C_2 sh\, \omega x \tag{6}$$

unde C_1 și C_2 sînt constante de integrare, iar $\omega^2 = \frac{p^*(p^*+2a)}{c^2}$. Din prima relație de la (5) și ținînd seama de (6) avem

$$Lv = -\frac{1}{\nu}(C_1 sh\,\omega x + C_2 ch\,\omega x) \tag{7}$$

unde

$$\nu = \varrho_0 c \sqrt{\frac{p^*+2a}{p^*}} \tag{8}$$

Folosind relațiile (6) și (7) vom studia oscilațiile curentului de aer comprimat în instalația redată în fig. 1, care constă din sursa de producere a

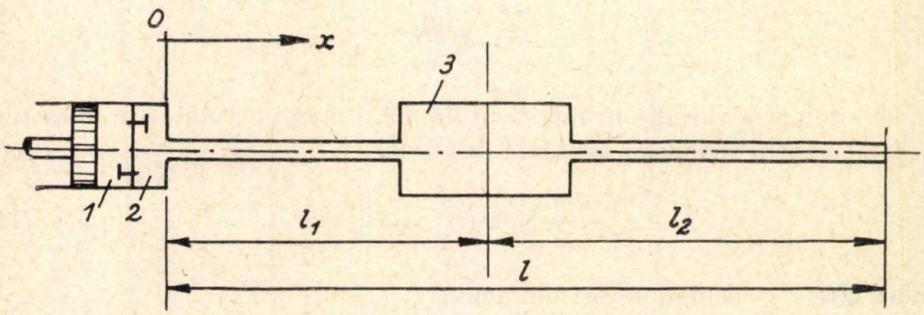


Fig. 1

oscilațiilor 1 (cilindrul), camera supapelor 2, rezervorul tampon 3, porțiunea de conductă dintre rezervor și compresor, de lungime l_1 și porțiunea de conductă care pleacă de la rezervor, de lungime l_2. Conductele se consideră orizontale și de secțiune constantă S.

Deoarece procesul de propagare liniară a undelor are o largă bandă de frecvență și amplitudine, ne vom limita la determinarea funcțiilor presiune și viteză în două porțiuni ale conductei ; înainte și după rezervorul tampon. Pentru aceste porțiuni ecuațiile (6) și (7) devin :

$$Lp_1 = C_1 ch\,\omega x + C_2 sh\,\omega x\,; \quad Lv_1 = -\frac{1}{\nu}(C_1 sh\,\omega x + C_2 ch\,\omega x) \tag{9}$$

$$Lp_2 = C_3 ch\,\omega x + C_4 sh\,\omega x\,; \quad Lv_2 = -\frac{1}{\nu}(C_3 sh\,\omega x + C_4 ch\,\omega x) \tag{10}$$

Să determinăm condițiile la limită care caracterizează instalația din fig. 1.

a) Condițiile la limită care caracterizează camera supapelor.

Notăm cu V_1 volumul camerei și precizăm că dimensiunile camerei sînt mici în raport cu lungimea de undă a oscilațiilor.

Fie $m_1 = m_1(t)$ masa totală a aerului în camera supapei, la momentul t, unde $m_1 = m_0 + m'$ și m_0 — masa aerului la momentul inițial, iar m' — masa suplimentară.

Scriem ecuația de stare $\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^k$ care logaritmată și apoi diferențiată ne dă $\frac{dp_1}{p_1} = k\,\frac{dm_1}{m_1}$. Avînd în vedere că $m_1 = \varrho_1 V_1$, împărțind expresia de mai sus cu dt obținem

$$V_1 \frac{dp_1}{dt} = c^2 \frac{dm'}{dt} \tag{11}$$

unde

$$c^2 = k\,\frac{p_1}{\varrho_1}.$$

Pe de altă parte variația în raport cu timpul a masei aerului care intră sau iese din camera supapelor este dată de relația

$$\frac{dm'}{dt} \varrho_1 Q(t) - \varrho S v_1 \tag{12}$$

unde $Q(t)$ — debitul de aer cunoscut.

Împărțind expresia (12) cu $\varrho_1 S$ și ținînd seama de (11) obținem condiția la limită pentru camera supapelor, care în transformata Laplace devine

$$x = 0; \quad Lf(p^*) = Lv_1 + \frac{Lp_1}{Sz(p^*)} \tag{13}$$

unde

$$Lf(p^*) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p^* t}\, dt \quad \text{iar} \quad z(p) = \frac{\varrho_0 c^2}{p^* V_1}$$

reprezintă impedanța acustică a rețelei.

b) Condițiile limită care caracterizează rezervorul tampon.

Dacă lungimea de undă $\lambda_0 \gg \sqrt[3]{V}$ unde V este volumul rezervorului, atunci putem scrie $Sv_1 = \frac{dV_0}{dt} + Sv_2$ unde v_1, v_1 — viteza curentului de aer la intrarea, respectiv la ieșirea din rezervor, V_0 — volumul dislocuit.

Presiunea în rezervor prin comprimarea de la V la V' va fi

$$p = \varrho_0 c^2 \frac{V - V'}{V} = \frac{\varrho_0 c^2 V_0}{V}$$

pe care înlocuind-o în expresia de mai sus, obținem condiția la limită pentru $x = l_1$ care în transformata Laplace devine

$$Lv_1 = \frac{Lp}{Sz_1(p^*)} + Lv_2 \tag{14}$$

unde

$$z_1(p^*) = \frac{\varrho_0 c^2}{p^* V}.$$

În general lungimea de undă a oscilațiilor curentului de aer este mult prea mare în raport cu diametrul conductei sau a rezervorului. Această împrejurare ne duce la concluzia că în toate secțiunile rezervorului avem aceeași presiune. Deci a doua condiție la limită va fi

$$Lp_1 = Lp_2 = Lp \tag{15}$$

c) Condițiile la limită corespunzătoare capătului conductei.

Pentru $x = l$, avem

$$Lv_2 = \frac{Lp_2}{Sz_2(p^*)} \tag{16}$$

unde v_2, p_2 și z_2 sînt viteza, presiunea și impedanța la capătul conductei.

Înlocuind condițiile la limită date de relațiile (13), (14), (15) și (16) în expresiile (9) și (10) obținem un sistem de ecuații care ne permit determinarea constantelor de integrare C_1, C_2, C_3 și C_4.

$$\left.\begin{aligned} &a_0 C_1 - C_2 = \nu Lf(p^*); \quad r_1 C_1 + q_1 C_2 - r_1 C_3 - q_1 C_4 = 0 \\ &C_1(q_1 + a_1 r_1) + C_2(r_1 + a_1 q_1) + C_3 q_1 + C_4 r_1 = 0 \\ &C_3(q + a_2 r) + C_4(r + a_2 q) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = \frac{\nu}{Sz_0(p^*)}; \quad a_1 = \frac{\nu}{Sz_1(p^*)}; \quad a_2 = \frac{\nu}{Sz_2(p^*)} \\ &q = sh\,\omega l; \quad r = ch\,\omega l; \quad h_1 = sh\,\omega l_1; \quad r_1 = ch\,\omega l_1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Scriind și dezvoltînd determinantul sistemului (17) obținem:

$$D = a_0 q_1(q_1 b_1 - b_2 b_3) + r_1(b_1 b_4 - r_1 b_2) + a_0 r_1 b_1 b_5 - q_1 b_2 b_6 \tag{19}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} &b_1 = r + a_2 q; \quad b_2 = q + a_2 r; \quad b_3 = 2r_1 + a_1 q_1 \\ &b_4 = 2q_1 + a_1 r_1; \quad b_5 = r_1 + a_1 q_1; \quad b_6 = q_1 + a_1 r_1 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

De asemenea

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = \nu Lf(p^*)[q_1(q_1 b_1 - r_1 b_2) - b_5(r_1 b_1 + q_1 b_2)]; \\ &D_2 = \nu Lf(p^*)[r_1(r_1 b_2 - q_1 b_1) + b_6(q_1 b_2 - r_1 b_1)]; \\ &D_3 = Lf\nu(p^*) b_1(r_1 b_5 - q_1 b_6; \quad D_4 = \nu Lf(p^*) b_2(q_1 b_6 - r_1 b_5) \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Avînd în vedere expresiile (19) și (21) valorile constantelor de integrare C_1, C_2, C_3 și C_4 se determină cu relațiile $C_i = \frac{Di}{D}$ ($i = 1, 2, 3$ și 4).

Înlocuind valorile constantelor de integrare în ecuațiile (9) și (10), ținînd seama de notațiile de la (18) și (20) și considerînd pentru simplificare $a_1 = a_2 = a$, după o serie de transformări obținem :

$$\left.\begin{aligned} Lp_1 &= \frac{[ch\,\omega(l-x) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega(l_1-x)]\,\nu Lf(p^*)}{a_0(ch\,\omega l + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega l_1) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega l_1 + sh\,\omega l} \\ Lv_1 &= \frac{[sh\,\omega(l-x) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega(l_1-x)]\,Lf(p^*)}{a_0(ch\,\omega l + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega l_1) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega l_1 + sh\,\omega l} \\ Lp_2 &= \frac{ch\,\omega(l-x)\,\nu Lf(p^*)}{a_0(ch\,\omega l + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega l_1) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega l_1 + sh\,\omega l} \\ Lv_2 &= \frac{sh\,\omega(l-x)\,Lf(p^*)}{a_0(ch\,\omega l + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega l_1) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega l_1 + sh\,\omega l} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Funcțiile căutate ale presiunii și vitezei le putem determina cu ajutorul formulelor de inversare ale lui Mellin-Fourier. Notînd

$$a_0(ch\,\omega l + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega l_1) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega l_1 + sh\,\omega l = N \quad \text{și}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\nu}{N}[ch\,\omega(l-x) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot sh\,\omega(l_1-x)] = W_1(iz, x) \\ &\frac{1}{N}[sh\,\omega(l-x) + a\,ch\,\omega l_2 \cdot ch\,\omega(l_1-x)] = W_2(iz, x) \\ &\frac{\nu}{N}[ch\,\omega(l-x)] = W_3(iz, x); \quad \frac{1}{N}sh\,\omega(l-x) = W_4(iz, x) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

obținem

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} Lf(iz)\,W_1(iz, x)\,e^{izt}\,dz; \quad v_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} Lf(iz)\,W_2(iz, x)\,e^{izt}\,dz \\ p_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} Lf(iz)\,W_3(iz, x)\,e^{izt}\,dz; \quad v_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty} Lf(iz)\,W_4(iz, x)\,e^{izt}\,dz \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Vom calcula integralele din relațiile (24) cu ajutorul teoremei reziduurilor. Vom scrie :

$$\left.\begin{aligned} p_1(x, t) &= \sum_j r_j^{(1)} + \sum_k r_k^{(1)}; \quad v_1(x, t) = \sum_j r_j^{(2)} + \sum_k r_k^{(2)} \\ p_2(x, t) &= \sum_j r_j^{(3)} + \sum_k r_k^{(3)}; \quad v_2(x, t) = \sum_j r_j^{(4)} + \sum_k r_k^{(4)} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

unde $r_j^{(1),(2),(3),(4)}$ — reziduul funcției de sub semnul integralei punctul iz_j al funcției limită $Lf(iz)$;

$r_k^{(1),(2),(3),(4)}$ — reziduul referitor la punctul p_r al funcțiilor $W_1(iz, x)$, $W_2(iz, x)$, $W_3(iz, x)$, $W_4(iz, x)$.

Calculînd reziduurile care intră în componența expresiilor (25) obținem:

$$\left.\begin{aligned}
p_1(x,t) &= \sum_j \lim_{iz\to it_j} [Lf(iz)(iz-iz_j)]W_1(iz_j,x)\,e^{iz_j t} + \\
&+ \sum_k \frac{1}{A}[\operatorname{ch}\omega_k(l-x) + ad_k \operatorname{sh}\omega_k(l_1-x)]\,\nu_k\,Lf(p_k)\,e^{p_k t} \\
v_1(x,t) &= \sum_j \lim_{iz\to iz_j} [Lf(iz)(iz-iz_j)]W_2(iz_j,x)\,e^{iz_j t} + \\
&+ \sum_k \frac{1}{A}[\operatorname{sh}\omega_k(l-x) + ad_k \operatorname{ch}\omega_k(l_1-x)]\,Lf(p_k)\,e^{p_k t} \\
p_2(x,t) &= \sum_j \lim_{iz\to iz_j} [Lf(iz)(iz-iz_j)]W_3(iz_j,x)\,e^{iz_j t} + \\
&+ \sum_k \frac{1}{A}\operatorname{ch}\omega_k(l-x)\,\nu_k\,Lf(p_k)\,e^{p_k t} \\
v_2(x,t) &= \sum_j \lim_{iz\to iz_j} [Lf(iz)(iz-iz_j)]W_4(iz_j,x)\,e^{iz_j t} + \\
&+ \sum_k \frac{1}{A}\operatorname{sh}\omega_k(l-x)\,Lf(p_k)\,e^{p_k t}
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

unde

$$A = A_1 \operatorname{ch}\omega l + A_2 \operatorname{sh}\omega l + A_3 \operatorname{sh}\omega l_1 + A_4 \operatorname{ch}\omega l_1 \quad \text{și}$$

$$A_1 = a_0' + \frac{d\omega l}{dp}; \qquad A_2 = a_0 \frac{d\omega l}{dp}$$

$$A_3 = a_0' a q_0 + a_0 a' q + a_0 a q_0' + a q_0' \frac{l_1}{l} \cdot \frac{d\omega l}{dp}$$

$$A_4 = a' q_0 + a q_0' + a_0 a q_0 \frac{l_1}{l} \cdot \frac{d\omega l}{dp}; \quad \operatorname{ch}\omega l_2 = q_0$$

Primii termeni din relațiile (26) unde reziduul s-a calculat referitor la punctul iz_j determină oscilațiile forțate ale presiunii și vitezei, iar al doilea termen oscilațiile proprii.

Formulele (26) dau soluția problemei în cazul general, dacă se cunosc funcțiile la limită în diferite puncte ale conductei.

Să studiem cazul particular cînd funcția la limită $f(t)$ este o funcție periodică de timp, caz care apare la compresoarele cu piston, adică $f(t) = Be^{i\alpha t}$ pentru $t > 0$ și $f(t) = 0$ pentru $t \leqslant 0$ În acest caz oscilațiile proprii pot fi neglijate, deoarece ele se amortizează.

Prima relație de la (26) devine

$$p_1(x, t) = \lim_{iz \to i\alpha} [Lf(iz)(iz - i\alpha)] W_1(i\alpha, x) e^{izt} =$$

$$= \frac{B}{iz - i\alpha} (iz - i\alpha) W_1(i\alpha, x) e^{i\alpha t} = BW_1(i\alpha, x) e^{i\alpha t}$$

În mod analog obținem :

$$v_1(x, t) = BW_2(i\alpha, x) e^{i\alpha t}; \quad p_2(x, t) = BW_3(i\alpha, x) e^{i\alpha t}$$

$$v_2(x, t) = BW_4(i\alpha, x) e^{i\alpha t}$$

Relațiile de mai sus, exprimă oscilațiile forțate în conductele de aer comprimat cu rezervor. Pentru calcule trebuie să despărțim partea reală de cea imaginară a acestor expresii.

În cazul cînd funcția $f(t)$ se poate considera ca o sumă de variații periodice ale presiunii, atunci este mai comod să se dezvolte în serii Fourier sub formă complexă, care în transformata Laplace va lua forma

$$Lf(p^*) = \int_0^\infty f(t) e^{-p^* t} dt = \frac{B_0}{p^*} + \frac{B_0 \sum_n c_n}{p^* - in\alpha} \tag{27}$$

Relația (27) reprezintă spectrul de frecvență al oscilațiilor, forțate. Pentru primul termen avem $p^* = i\alpha = 0$.

În acest caz expresiile care dau oscilațiile forțate ale presiunii și vitezei sînt :

$$p_1(x, t) = \lim_{z \to 0} \frac{B_0}{iz} izW_1(0, x) + \lim_{z \to \alpha} \frac{n}{inz - in\alpha} (inz - in\alpha) W_1(in\alpha, x) e^{in\alpha t} =$$

$$= B_0 W_1(0, x) + B_0 \sum_n c_n W_1(in\alpha, x) e^{in\alpha t}$$

$$v_1(x, t) = \lim_{z \to 0} \frac{B_0}{iz} izW_2(0, x) + \lim_{z \to \alpha} \frac{n}{inz - in\alpha} (inz - in\alpha) W_2(in\alpha, x) e^{in\alpha t} =$$

$$= B_0 W_2(0, x) + B_0 \sum_n c_n W_2(in\alpha, x) e^{in\alpha t}$$

În mod analog :

$$p_2(x, t) = B_0 W_3(0, x) + B_0 \sum_n c_n W_3(in\alpha, x) e^{in\alpha t}$$

$$v_2(x, t) = B_0 W_4(0, x) + B_0 \sum_n c_n W_4(in\alpha, x) e^{in\alpha t}$$

CONCLUZII

1. Relațiile deduse permit determinarea variației presiunii și vitezei funcție de timp în diferite puncte ale conductei de aer comprimat cunoscînd condițiile inițiale și la limită.

2. Cunoscînd oscilațiile presiunii și vitezei în diferite puncte ale conductei se pot eventual depista acele zone ale conductei unde apare pericolul de rezonanță.

3. Oscilațiile proprii ale conductei de aer, în cazurile practice se pot neglija întrucît se amortizează după o lege exponențială.

4. Relațiile deduse pot fi folosite în calculele de proiectare a rețelelor de aer comprimat în vederea combaterii oscilațiilor curentului de aer și a conductelor.

BIBLIOGRAFIE

1. — Raționalizarea aerului comprimat în minerit. Ed. tehnică, București, 1962.

2. *Gladkih P. A. Haciaturian S. A.* Vibrații v truboprovodah i metodî ih ustranenia. Masghiz, 1959.

3. *Gladkih P. A.* Puti ustranenia colebanii truboprovod. Nefteanoe hoziaistvo nr. 10, 1954.

4. *N. Ciorănescu.* Tratat de matematici speciale. E.D.P., București, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 3

ELECTRONICA

C.Z. : 621.314.7:621.3.023:621.385

ASUPRA COMPORTĂRII LA ÎNALTĂ FRECVENȚĂ A TRANZISTORULUI UNIPOLAR CU CURENT LIMITAT DE SARCINA SPAȚIALĂ *)

DAN DASCĂLU

I. Introducere

Structura tranzistorului unipolar cu curent limitat de sarcina spațială este reprezentată în fig. 1, a. Emitorul E formează un contact ohmic, rezervor permanent de electroni. Dacă se aplică o tensiune pozitivă pe electrodul de control (poarta G), între emitor și poartă trece un curent limitat de sarcina spațială. Electronii străbat poarta (un strat subțire, permeabil) și sînt puternic accelerați în spațiul poartă-colector de către tensiunea mare aplicată pe colector. Stratul subțire care formează electrodul de control (poarta) poate fi considerat într-o primă aproximație echipotențial și total permeabil pentru electroni. Acest electrod este în același timp un ecran electrostatic între colector și emitor. Curentul de colector (i_c) este controlat exclusiv de tensiunea poartă-emitor (U_G). Spațiul poartă-emitor reprezintă în fond o diodă dielectrică [1], [2] în care curentul este proporțional cu pătratul tensiunii aplicate (fig. 2, a), astfel că pentru $U_G > 0$, $U_c \gg U_G$.

$$i_G = 0 \quad , \quad i_c = KU_G^2 \tag{1}$$

Dispozitivul are caracteristici de ieșire de tip pentodă (fig. 2, b).

Acest model descrie, în primă aproximație, funcționarea a două tipuri de dispozitive. Primul dispozitiv este trioda dielectrică (fig. 1, b) propusă de Wright [3] și ulterior realizată experimental [4]. Al doilea dispozitiv (fig. 1, c) este trioda „cu electroni fierbinți" și bază (electrod de control sau poartă) de metal [5], [6]. Nu vom intra în detalii de construcție și funcționare. Scopul lucrării de față este de a studia răspunsul la semnale mici pe baza unui model simplificat. Am văzut că în primă aproximație curentul de colector este controlat de tensiunea poartă-emitor U_G. Tot în primă aproximație putem neglija timpul de trecere al electronilor prin poartă și regiunea poartă-colector. În acest caz comportarea dispozitivului la semnele mici și frecvente înalte va fi determinată doar de procesele ce au loc în spațiul poartă-emitor. Acest spațiu poate fi asimilat cu o diodă electrică cu curent limitat de sarcina spațială [3].

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

Comportarea diodei dielectrice la semnale mici și frecvențe înalte este relativ bine studiată [2], [7], [8]. Din cele de mai sus rezultă că, într-o primă etapă a studiului tranzistorului cu curent limitat de sarcina spațială,

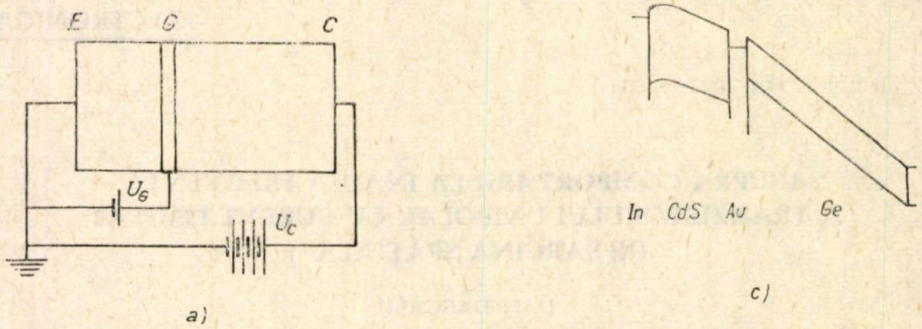


Fig. 1 — Tranzistorul unipolar cu curent limitat de sarcina spațială. (a) Structura E = emitor, G = poartă, C = colector; (b) Diagrama energetică pentru tranzistorul heterojoncțiune sau trioda dielectrică [3], [4]; (c) Diagrama energetică pentru trioda cu electroni „fierbinți" și bază metalică [5], [6]. Curentul de emitor este limitat prin sarcina spațială. În ambele cazuri (b) și (c) emitorul injectează electroni, curentul între emitor (E) și poartă (G) este limitat de sarcina spațială, iar poarta este permeabilă pentru electroni, care sînt preluați de către colector. Diagramele energetice (b) și (c) corespund polarizării normale a electrozilor (a).

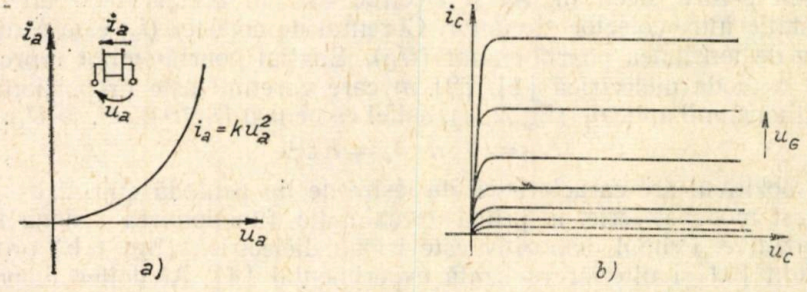


Fig. 2 — (a) Caracteristica curent tensiune a diodei dielectrice ideale. (b) Caracteristicile de ieșire (i_c, u_c) pentru tranzistorul din fig. 1.

esete util să se găsească un mod de a aplica rezultatele teoriei diodei dielectrice. Acest lucru și-l propune autorul în lucrarea de față.

II. Schema echivalentă a tronzistorului la înaltă frecvență

Vor admite că poarta G are o grosime foarte mică, neglijabilă și fluxul de electroni străbate practic instantaneu această regiune. La înaltă frecvență curentul prin regiunea emitor-poartă i_1 are o componentă de convecție i_{1c} și una de deplasare i_{1d} a căror pondere în curentul total este diferită la diferite distanțe de catod (fig. 3)

$$i_1(t) = i_{1c}(x, t) + i_{1d}(x, t), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_g \tag{2}$$

O situație similară are loc în regiunea poartă-colector

$$i_2(t) = i_{2c}(x, t) + i_{2d}(x, t), \quad x_g \leqslant x \leqslant x_c \tag{3}$$

O presupunere fundamentală pentru calculul care urmează rezultă din continuitatea fluxului de electroni la planul $x = x_g$. Admitem că [7]

$$i_{1c}(x_g, t) = i_{2c}(x_g, t) \tag{4}$$

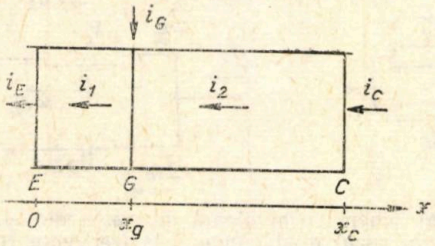


Fig. 3 — Schema curenților tranzistorului.

(continuitatea curentului de convecție pentru $x = x_g$).

De asemenea vom admite că timpul de trecere al electronilor prin regiunea poartă-colector este foarte redus, căci electronii se deplasează cu o viteză apropiată de viteza limită [3], [5]. În această regiune vom neglija contribuția curentului de deplasare la curentul total

$$i_2(t) = i_c(t) = i_{2c}(x_g, t) \tag{5}$$

Ținînd seama de (2), (4), (5)

$$i_E(t) = i_1(t) = i_{1c}(x_g, t) + i_{1d}(x_g, t) = i_c(t) + i_{1d}(x_g, t) \tag{6}$$

și folosind relația evidentă

rezultă

$$i_E(t) = i_c(t) + i_G(t) \tag{7}$$

$$i_G(t) = i_{1d}(x_g, t) \tag{8}$$

Deci putem privi lucrurile în felul următor. Curentul total prin regiunea poartă-emitor se divide la $x = x_g$ (planul porții) în două : curentul de convecție trece nemodificat în curentul de colector iar curentul de deplasare este egal cu curentul de poartă. O situație analoagă are loc la înaltă frecvență în trioda cu vid cu grilă negativată [9].

Este limpede că pentru studiul comportării tranzistorului este necesară separarea curentului alternativ la anodul diodei dielectrice în curent de convecție și curent de deplasare. O astfel de separare a fost făcută de M. Drăgănescu și D. Dascălu [10] pentru dioda dielectrică ideală (fără trape etc.). Dioda dielectrică ideală are impedanța [2], [8].

$$Z = \frac{1}{Y} = R_l \left\{ \frac{6}{\theta^2} \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta} \right) - i \frac{3}{\theta} \left[1 - \frac{2}{\theta^2} (1 - \cos \theta) \right] \right\} \tag{9}$$

unde R_i este rezistența internă, θ unghiul de zbor

$$\theta = \omega T_d \tag{10}$$

iar T_d timpul de zbor al electronilor.

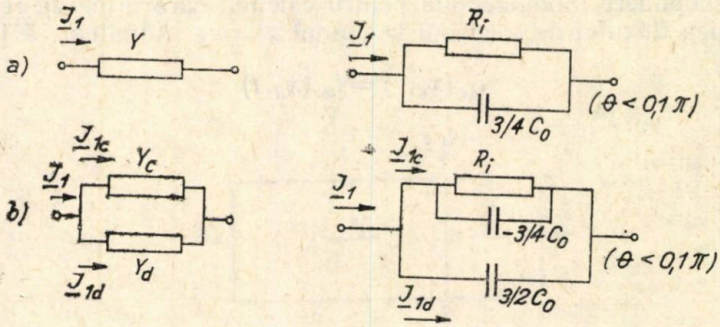


Fig. 4 — (a) Schema echivalentă de c.a. a diodei dielectrice și forma ei în cazul diodei ideale, la frecvențe relativ joase ($\theta < 0{,}1\,\pi$) (b) Schema echivalentă de detaliu a diodei dielectrice și forma ei în cazul diodei ideale, pentru frecvențe corespunzînd la $\theta < 0{,}1\,\pi$.

La frecvențe nu prea înalte ($\theta < 0{,}1\,\pi$) schema echivalentă a diodei este cea din fig. 4, a : rezistența internă R_i în paralel cu capacitatea 3/4 C_0 unde C_0 este capacitatea „geometrică" a diodei (pe unitate de suprafață)

$$C_0 = \frac{\epsilon}{d} \tag{11}$$

Dacă separăm curentul alternativ la anodul diodei în curent de convecție I_{1c} și curent de deplasare I_{1d} obținem schema echivalentă de detaliu [10] din fig. 4, b. Această schemă permite o mai bună înțelegere a feno-

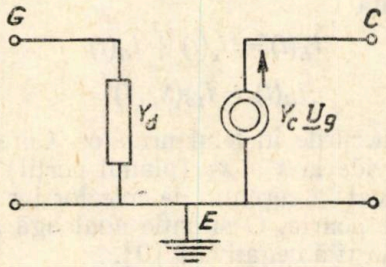


Fig. 5 — Schema echivalentă de c.a. la semnale mici a tranzistorului. Schema ține seama doar de procesele ce au loc în spațiul poartă-emitor.

menelor ce au loc cu diodă [10]. Astfel curentului de deplasare îi corespunde capacitatea 3/2 C_0 care este chiar capacitatea staționară a diodei în prezența sarcinii spațiale. Dar dioda nu se comportă cvasi-staționar nici

la frecvențe joase. Se observă că dioda prezintă o capacitate mai mică (3/4 C_0), deoarece curentului de convecție îi corespunde o capacitate negativă — 3/4 C_0 chiar la frecvențele cele mai joase. Această capacitate negativă corespunde efectului inductiv determinat de inerția electronilor în transport [10].

Schema echivalentă de detaliu din fig. 4, b ne este foarte utilă pentru deducerea schemei echivalente a tranzistorului. Ținînd seama de cele discutate mai înainte, schema echivalentă la semnale mici a tranzistorului în conexiunea cu colector comun este reprezentată în fig. 5. Admitanța de intrare este egală cu admitanța „de deplasare" Y_d iar panta este egală cu admitanța „ de convecție" Y_c a diodei electrice. Reamintim că această schemă este idealizată, ținînd seama doar de fenomenele ce au loc în spațiul poartă-emitor. Dar comportarea spațiului poartă-emitor este esențială în funcționarea la înaltă frecvență [3], [5]. Funcționarea la înaltă frecvență este una din cele mai interesante aplicații posibile ale acestui tranzistor experimental. Iată de ce examinarea schemei simplificate din fig. 5 poate duce la concluzii interesante.

III. Efectul timpului de trecere la frecvențe înalte

Mai întîi vom considera să spațiul poartă-emitor poate fi asimilat cu o diodă dielectrică ideală, ca cea studiată de Shao și Wright [2]. Curentul de difuzie este neglijabilă și nu se ține seama de efectul trapelor. Mobilitatea electronilor este considerată constantă. Dioda are o caracteristică pătratică ca cea din fig. 2, a iar impedanța la frecvențe înalte este dată de relația (9). Conform calculelor prezentate în [10]

$$Y_d = f(\theta)\, Y \tag{12}$$

$$Y_c = [1 - f(\theta)]\, Y \tag{13}$$

unde

$$f(\theta) = 1 + \frac{i}{\theta}(1 - \epsilon^{-i\theta}) \tag{14}$$

Variația cu frecvența a părții reale și imaginare a lui Y_d și Y_c a fost reprezentată în [10]. La frecvențe relativ joase ($\theta < 0{,}1\,\pi$) obținem

$$Y_d = i\omega \frac{3}{2} C_0 \quad , \quad Y_c = \frac{1}{R_i} - i\omega \frac{3}{4} C_0 \tag{15}$$

și schema echivalentă generală din fig. 5 capătă forma din fig. 6, a. Capacitatea de intrare este egală cu capacitatea staționară corespunzătoare spațiului poartă-emitor în prezența sarcinii spațiale. O situație oarecum analogă are loc la trioda cu vid [9]. In același domeniu de frecvență trebuie să ținem seama că panta $S = Y_d$ are o expresie complexă : apare un defazaj în urmă, efect inductiv corespunzător inerției electronilor (efect discutat în secțiunea II). In lucrarea [3] Wright prezintă o altă schemă echivalentă a tranzistorului (fig. 6, b). După părerea noastră această din urmă schemă, obținută direct din schema echivalentă a diodei dielectrice (fig. 4, a), nu este corectă.

Caracteristicile de frecvență ale tranzistorului (variația cu frecvența a transconductanței și a admitanței de intrare) pot fi deduse direct din articolul [10]. Reținem doar că panta (transconductanța) tranzistorului scade la frecvențe înalte și se anulează la frecvențele ce corespund la $\theta = k \cdot 2\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$). De asemenea admitanța de intrare (cu caracter capacitiv) prezintă și o conductanță pozitivă la orice frecvență.

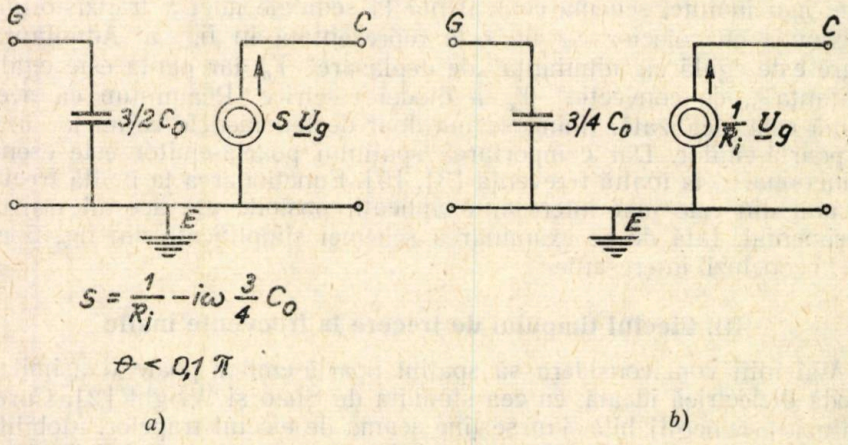


Fig. 6 — Schema echivalentă de c.a. a tranzistorului ($\theta < 0{,}1\,\pi$) (a) Schema propusă de autor ; (b) Schema propusă de WRIGHT [3].

Teoria diodei dielectrice (și a tranzistorului descris de modelul simplu prezentat aici) poate fi extinsă luînd în considerare un efect fizic important și anume dependența mobilității electronilor de cîmpul electric. La intensități nu prea mari ale cîmpului electric E putem admite că viteza electronilor este proporțională cu cîmpul electric

$$v = \mu E \tag{16}$$

pe cînd la cîmpuri mai intense μ începe să scadă. La intensități relativ mari ale cîmpului viteza electronilor tinde către o valoare limită. Dependența $v = v(E)$ este relativ complicată și poate avea un caracter diferit pentru diferite materiale semiconductoare [7], [11]. Teoria diodei dielectrice poate fi extinsă în cazul mai general al dependenței mobilității de cîmp. Pentru aceasta e necesară o aproximare analitică a curbei $v = v(E)$, aproximare care se poate face în mai multe moduri. Ținînd seama de rezultatele publicate de Brujdo [7], Shumka și Nicolet [11], precum și de unele rezultate originale, vom face aci precizări cu caracter general.

Datorită scăderii mobilității cu cîmpul electric, caracteristică de c.c. a diodei dielectrice se apropie de o formă lineară la tensiuni mari. Corespunzător se modifică și poziția curbelor din familia de caracteristici (i_c, U_c) a tranzistorului (fig. 2 b).

Schema echivalentă de c.a. din fig. 6, a suferă unele modificări. Capacitatea de intrare va fi de asemenea egală cu capacitatea staționară, dar

această capacitate va depinde, în general, de punctul de funcționare. Capacitatea va fi $C' > \frac{3}{2} C_0$ putînd atinge valoarea $2C_0$. Acest din urmă caz corespunde situației limită de la tensiuni relativ mari cînd electronii se deplasează practic în tot domeniul de sarcină spațială cu o viteză egală cu viteza limită. Panta va fi dată de o expresie de forma $S = \frac{1}{R_l} - i\omega C''$ unde $C'' \neq \frac{3}{4} C_0$.

IV. Efectul trapelor de electroni asupra caracteristicilor de frecvență

Este de așteptat să apară un efect însemnat al trapelor de electroni asupra curentului limitat de sarcina spațială [12], [13], [14]. Spațiul poartă-emitor este realizat din sulfură de cadmiu policristalină. Defectele de structură acționează ca trape (capcane) de electroni. Efectul trapelor de electroni asupra comportării diodei dielectrice a fost studiat de mai mulți autori. Deosebit de interesant este cazul trapelor puțin adînci (sau practic neocupate de electroni) [12], [13]. În acest caz raportul dintre densitatea electronilor liberi și densitatea totală a electronilor (liberi și captați) este

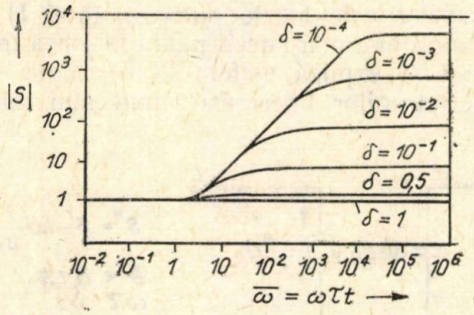


Fig. 7 — Efectul trapelor de electroni (un nivel energetic) asupra variației transconductanței (pantei) tranzistorului cu frecvența. Transconductanța e normată la valoarea de la frecvențe foarte joase. Parametrii δ și τ_t (durata de viață a electronilor captați) caracterizează efectul trapelor [14].

constant (δ) în orice secțiune a diodei și curentul prin diodă scade în același raport δ față de curentul ce trece prin dioda fără trape. În regim variabil efectul trapelor este de asemenea important, deoarece restabilirea cvasi-echilibrului termic dintre electronii liberi și cei captați nu se face instantaneu. Efectul trapelor asupra răspunsului diodei dielectrice la semnale mici a fost studiat de G. T. Wright [13] și D. Dascălu [14]. Prezintă interes rezultatele originale privind efectul trapelor și al timpului de trecere asupra caracteristicilor de frecvență [15].

Pe baza acestor rezultate se poate trece la studiul efectului trapelor asupra funcționării la semnale mici a tranzistorului cu curent limitat de sarcină spațială.

În domeniul de frecvențe la care timpul de trecere este neglijabil, și curentul de deplasare în prima regiune va fi neglijabil. Impedanța de intrare este infinită iar panta tranzistorului este egală cu admitanța diodei. Variația admitanței diodei dielectrice cu frecvența pentru diferite valori ale parametrului δ este reprezentată în lucrarea [14]. Rezultatele se referă la cazul simplu cînd efectul trapelor este descris de un singur nivel energetic discret în banda interzisă. În cazul cînd trapele puțin adînci sînt distribuite în energie rezultatele sînt calitativ aceleași. La frecvențe foarte joase panta este $S = \frac{1}{R_i}$. La frecvențe ceva mai înalte apare efectul reactiv al trapelor. Deosebit de interesant este că acest efect este capacitiv (transconductanța — sau panta — are o fază pozitivă). De asemenea modulul pantei crește cu frecvența (fig. 7). La frecvențe suficient de înalte efectul dispare și panta are valoarea

$$S' = \frac{1+\delta}{2\delta} S > S. \tag{17}$$

Dacă efectul trapelor este foarte puternic ($\delta \ll 1$) (atunci panta la înaltă frecvență este mult mai mare decît panta la joasă frecvență ($S' \gg S$). Acest efect neobișnuit se explică astfel: la frecvențe suficient de înalte durata de viață a electronilor liberi este mult mai mare decît perioada

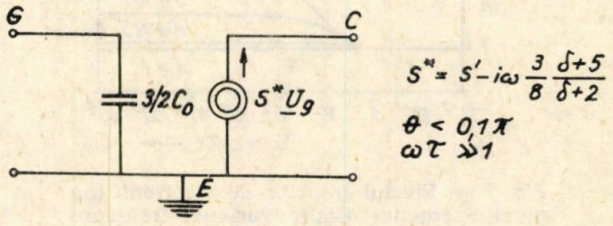


Fig. 8 — Schema echivalentă a tranzistorului în care efectul trapelor din spațiul emitor-poartă este important; δ reprezintă fracțiunea electronilor liberi din totalul electronilor captați iar τ timpul de relaxare în prezența trapelor.

semnalului aplicat și electronii injectați de semnal rămîn practic toți liberi, contribuind la trecerea curentului. Conductanța diodei dielectrice sau panta (transconductanța) tranzistorului cu curent limitat de sarcina spațială crește în mod corespunzător [13], [14]. Astfel tranzistorul în care efectul trapelor este important poate funcționa cu un curent continuu relativ mic și o pantă suficient de mare la înaltă frecvență, ceea ce este deosebit de favorabil.

La frecvențe mai ridicate va trebui să ținem seama de efectul timpului de trecere. Teoria corespunzătoare a fost dezvoltată în [15]. Pe baza acestor calcule se obține schema echivalentă din fig. 8. Această schemă este valabilă doar pe un domeniu de frecvențe înalte delimitat de

$$\omega\tau \gg 1 \quad , \quad \tau = \omega T_d < 0{,}1\,\pi \tag{18}$$

A doua condiție din (18) nu necesită o discuție aparte. Remarcăm numai că timpul de zbor al electronilor nu este afectat de captarea în trape. Condiția $\omega\tau \gg 1$ va fi interpretată astfel. Dacă în banda interzisă a dielectricului (semiconductorului) există un singur nivel energetic corespunzător trapelor, atunci τ este timpul de relaxare [13], [14] definit prin

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_t} \tag{19}$$

unde τ_c, τ_t sînt duratele de viață ale electronilor liberi și respectiv captați. Dacă trapele puțin adînci au o distribuție oarecare în energie vom înțelege prin τ constanta de timp (sau durata de viață) cea mai mică care caracterizează cvasi-echilibrul termic dintre electronii liberi și cei captați.

Din schema echivalentă din fig. 8 observăm că nu s-a modificat capacitatea de intrare. Capacitatea staționară $\frac{3}{2} C_0$ nu este modificată. Într-adevăr cîmpul electric la anod (și deci sarcina totală înmagazinată în diodă) este determinat de toți electronii injectați, atît liberi cît și captați. Trapele puțin adînci reduc curentul prin diodă (sau tranzistor) dar nu modifică cîmpul electric. În schimb efectul inductiv care modifică panta la înaltă frecvență (S^*) va depinde de parametrul δ care măsoară efectul trapelor

$$S^* = S' - i\omega \frac{3}{8} \frac{\delta + 5}{\delta + 2} C_0 \tag{20}$$

Pentru $\delta = 1$ (dioda ideală) reobținem schema echivalentă din fig. 6, a ($S' = S$).

V. Concluzii

Tranzistorul unipolar cu curent limitat de sarcina spațială are o serie de avantaje principale în raport cu tranzistorul bipolar (cu două tipuri de purtători) de structură clasică. Amintim aici comportarea bună în regim variabil (limitare doar prin timpul de zbor al purtătorilor), zgomotul redus (efectul sarcinii spațiale) [3].

Modelul de tranzitor studiat aici are o structură și o funcționare apropiată de a triodei cu vid. Schema echivalentă de c.a. propusă în această lucrare este foarte simplă și ține seama doar de procesele ce au loc în spațiul poartă-emitor. Ea permite totuși obținerea unor rezultate interesante. Deoarece spațiul poartă-colector poate fi înlocuit cu o diodă dielectrică (cu curent limitat de sarcina spațială) au fost folosite unele re-

zultate — în parte originale — privind funcționarea în c.a., la semnale mici a acestui dispozitiv. În lucrare s-a studiat schema echivalentă a tranzistorului în domeniul de frecvențe

$$\theta = \omega T_d < 0{,}1\,\pi$$

Capacitatea de intrare a tranzistorului este egală cu capacitatea staționară a diodei poartă-emitor calculată în prezența sarcinii spațiale. O situație analoagă apare la trioda în vid. Această capacitate nu este afectată de prezența trapelor puțin adînci și este egală cu 3/2 C_0 (C_0 = capacitatea geometrică). În schimb, dacă mobilitatea purtătorilor depinde de cîmpul electric, această capacitate depinde de punctul de funcționare (crește cu tensiunea aplicată (U_G) la tensiuni suficient de mari, fără a depăși valoarea $2C_0$). Schemele echivalente prezentate aici pun în evidență și efectul inductiv al inerției electronilor în transport.

Un rezultat important este corectarea schemei echivalente prezentate de Wright [3] pentru același dispozitiv, în aceleași condiții de funcționare. După calculele din lucrarea de față, capacitatea de intrare este de două ori mai mare decît cea indicată de Wright.

Calculul caracteristicilor de frecvență la frecvențe mai înalte poate fi afectat pe baza schemei echivalente generale, schemă propusă în această lucrare.

Catedra de tuburi electrice și tranzistori
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ruppel, W.* și *Smith, R. W.*, A Cds Analog Diode and Triode. In: R.C.A. Review, 20, nr. 4, dec. 1959, p. 702.
2. *Shao, J.* și *Wright, G. T.*, Caracteristics of the Space-Charge-limited Diode at Very High Frequencies. In: Solid-St. Electron., 3, nr. 2, 1961, p. 291—303.
3. *Wright, G.T.*, The Space Charge Limited Dielectric Triode. În: Solid-St. Electron., 5, nr. 2, Mai—Iunie 1962.
4. *Brodjo, S.*, *Riley, T. J.* și *Wright, G. T.*, A Space — charge — limited Dielectric Triode. In: Brit. Journ. of Applied Physics, 16, nr. 2, Februarie 1965, p. 133.
5. *Atalla, M. M.* și *Soshea, R. W.*, Hot — carrier Triodes with Thin Film Metal Base. In: Solid-St. Electron., 6, nr. 3, Mai-Iunie 1963, p. 245—250.
6. *Holland, L.*, Thin Film Microlelctronics, Chapman and Hall Ltd., London, 1965.
7. *Brojdo, S.*, Characteristics of the Dielectric Diode and Triode at Very High-frequencies. In: Solid-St. Electron., 6, nr. 6, Nov.-Dec., 1963, p. 611—629.
8. *Drăgănescu, M.*, Частотные своиства идеального дизлектрического диода при малых сигналах. In: Bul. Inst. politehnic, „Gheorghe Gheorghiu-Dej", 27, nr. 4, iulie-aug., 1965, p. 131—138.
9. *Drăgănescu, M.*, Capacitățile tuburilor electronice și dependența lor pe punctul de funcționare. Dizertație. Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" 1956.
10. *Drăgănescu, M.* și *Dascălu D.*, A. Detailed Equivalent Scheme for the Dielectric Diode. In: Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", 27, nr. 5, sep.-oct. 1965, p. 145—151.

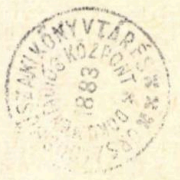
11. *Shumka, A.* și *Nicolet, M. A.*, Impedance of Space — charge — limited Currents with Field — dependent Mobility. In : Solid.-St. Electron., 7, 1, Ian. 1964, p. 106—107.

12. *Lampert, M. A.*, Simplified Theory of Space — charge — limited Currents in an Insulator with Traps. In : Phys. Rev. 103, 1955, p. 1648.

13. *Wright, G. T.*, A proposed Space — charge — limited Dielectric Triode. In : Journ. Brit. I.R.E., 20, nr. 5, Mai 1960, p. 337.

14. *Dascălu, D.*, Efectul trapelor asupra comportării diodei dielectrice la semnale mici. În : Studii și cercetări de fizică, 17, nr. 8, 1965, p. 875—886.

15. *Dascălu, D.*, Trapping and Transit-time Effects în High-frequency Operation of Space-charge-limited Dielectric Diodes. Comunicare la conferința internațională „Semiconductor Device Research", Bad Nauheim (R.F.G.), Aprilie 1967.



ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 6724

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text si se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1968 JAN 28

F 1130

R

REDACȚIA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX NUMĂRUL 4 ANUL 1967
IULIE — AUGUST

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

MŰSZAKI EGYETEM 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXIX — NUMĂRUL 4

IULIE — AUGUST
1967

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici ;* Prof. Dr. Docent *E. Bratu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli ;* Prof. Dr. *S. Călin ;* Acad. Prof. Dr. Docent *D. Dumitrescu ;* Prof. *S. Gâdea ;* Conf. Dr. *I. Grădișteanu,* Prof. *C. Ionescu-Bujor ;* Prof. Dr. Docent *Gh. Manea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu ;* Prof. *St. Mantea;* Prof. Dr. *N. Marinescu ;* Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu;* Prof. *C. Penescu,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu ;* Acad. Prof. Dr. Docent *R. Rădulet ;* Prof. *Al. Rău ;* Prof. *Al. Spătaru ;* Prof. *L. Stoicescu ;* Prof. Dr. Docent *R. Voinea,* membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu.*

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

Sumar

MATEMATICA

M. N. Roşculeţ

Recherches sur les séries trigonométriques 17

CHIMIE

A. Ianu, Ileana Niculescu, Ana Maria Lupu

Dozarea urmelor de fier în prezenţa ionilor de fluor 35

Gr. Teodorescu, Ileana Niculescu

Metode de dozare a N-N' — tetrametil hexametilen 1—6 diamină . 43

B. Melega, I, Gh. Constantinescu

On the Theory of the Equilibrium of Solid-liquid Heterogenous Reactions 47

I. Cristea, Gh. Ioniţă, Iuliana Lupu

Pelicule exfoliabile pe bază de alcool polivinilic pentru protecţia suprafeţelor finisate cu poliesteri 51

FIZICA

Ariana Ichimescu, G. Teodorescu

Contribuţii la studiul formării straturilor subţiri de sulfură de argint 55

MECANICA

C. Guţă

Scurgerea spaţială prin reţelele de profile ale turbomaşinilor . . 65

CENTRALE ELECTRICE

C. Dinculescu, P. Buhuş

Metodă pentru stabilirea relaţiilor de calcul al duratelor medii de funcţionare în studiul siguranţei structurilor complexe cu elemente de rezervă 83

REŢELE ELECTRICE

M. Bercovici, A. Arie, Maria Tudose

Aspecte privind aplicarea teoriei componentelor simetrice în analiza regimurilor nesimetrice a reţelelor electrice 101

ELECTRONICA

M. Petrescu

Frequency Response of the Input Admittance of Impedance Sign Converters 133

Резюме

М. Н. Рошкулец Д. К. 514 : 517.5

Исследования тригонометрических рядов

Если $f(x)$ есть определенная функция для $(-\pi, \pi)$, за исключением множества нулевого измерения, периодическая для периода 2π неинтегрируемая для $(-\pi, \pi)$, то таким образом функция

$$x^n f(n),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

будет интегрируемой для $(-\pi\,\pi)$. Доказывается, что ряд Фурье, объединенный функцией $f(x)$, имеет вид

$$S_o(x) + \lambda_1 S_1(x) + \cdots + \lambda_n S_n(x)$$

с $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ произвольными числами. Определяются ряды $S_k(x)$ и показывается, что $S_1(x), \ldots S_n(x)$ слагаемы (C, n) для $(-\pi, \pi)$ к нулю.

Дано интегральное выражение коэффициентов ряда $S_o(x)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 66.028 : 546.72 : 541.132 : 546.16

А. Япу, Ил. Никулеску, А. М. Лупу

Дозировка следов железа в присутствии ионов фтора

Разработан колориметрический метод дозировки железа в присутствии больших количеств фтора для дозировки следов железа во вторичных продуктах промышленности фосфатных удобрений (Нэводарь).

В качестве сложного реагента была использована сульфосалициловая кислота, которая образует с трехвалентным железом более сложные комплексы, чем фтор.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 66.028 : 547.415.1 : 545.81 : 547.513 : 547.288.15

Гр. Теодореску Ил. Никулеску

Метод дозировки $N - N'$— тетраметил гексаметилен 1—6 диамина

Дозировка при объемном методе была произведена косвенно с использованием соли Рейнеке как осаждающего вещества. После фильтрации осадок был разведен в ацетоне, обработан раствором азотнокислого серебра, который, в свою очередь, был обработан раствором роданистого аммония.

Для колориметрического метода была использована соль Рейнеке как осадочный реактив. Осадок после фильтрации был разведен в ацетоне и колориметром Б. Ланге была измерена интенсивность цвета.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 548 : 66.065.58 : 546 : 661.18 : 541.182

Б. Мелега, И. Гх. Константинеску

Относительно теории равновесия твердо-жидких гетерогенных реакций

Исходя из уравнения Кельвина, выводится соотношение, связывающее равновесное псевдопостоянство реакций двойного обмена между мало взаимнорастворимыми солями с размерами частиц и с поверхностным напряжением жидкости. Делается заключение о существовании взаимозависимости между концентрациями соединений, легко растворимых при равновесии, размерами частиц в равновесии с раствором и внутренним напряжением.

Проверка эксперимента и правильности реакции затруднена наличием в ней двух независимых переменных с одинаковыми возможностями изменения.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Summary

M. N. Roşculeţ D.C. 514 : 517.5

Investigations on Trigonometric Series

Let $f(x)$ be a function defined on $(-\pi, \pi)$ except a set $\mathfrak{M}$ of zero measure, periodic with the period 2π, not integrable on $(-\pi, \pi)$ so that the function

$$x^n f(n),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

be integrable $(-\pi, \pi)$. It is proved that the Fourier series associated to the function $f(x)$ is of the form

$$S_o(x) + \lambda_1 S_1(x) + \cdots + \lambda_n S_n(x)$$

to λ_1, $\lambda_2 \cdots \lambda_n$ as arbitrary numbers. The S_k (x) series are determined and it is shown that $S_1(x), \ldots S_n(x)$ are (C, n) summable on $(-\pi, \pi)$ towards zero. An integral expression of the S_o (x) series coefficients is given.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 66.028 : 546.72 : 541.132 : 546.16

A. Ianu, Il. Niculescu, A. M. Lupu

The Titration of Iron Traces in the Presence of Fluorine Ions

A colorimetric method of dosing iron in the presence of large quantities of fluorine has been elaborated for the titration of iron traces in the secondary products of the phosphatic fertilizers industry (Năvodari).

As complexing reagent sulphosalicylic acid has been used for its property of forming with trivalent iron more stable complexes than those obtained with fluorine.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 66.028 : 547.415.1 : 545.81 : 547.513 : 547.288.15

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Volumetric Method for Dosing N—N' — Tetramethyl Hexamethylene 1—6 Dinamine.

In the volumetric method dosing has been effected indirectly by using the Reinecke salt as precipitating reagent, After filtration, the precipitate has been dissolved with acetone, and treated with silver nitrate solution in excess, the excess being titrated with ammonium thiocyanate solution.

In the colorimetric method, Reinecke salt has been used to precipitate, and the precipitate formed has been dissolved in acetone; the intensity of the colour has been measured by means of a B. Lange colorimeter.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 548 : 66.065.58 : 546 : 661.18 : 541.182

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

On the Theory of the Equilibrium of Solid-liquid Heterogeneous Reactions.

Starting with the Kelvin equation, the authors deduce a relation which connects the pseudo-balance constancy of the double exchange reactions between reciprocal salts of low solubility with the dimensions of particles and the superficial strain of the liquid. They come to the conclusion that there is an interdependency between the concentration of the highly soluble components at balance, the dimensions of the particles in balance with the solution and the interface strain.

The experimental checking of the reaction's accuracy is rendered difficult because there are within it two independent variables having equal variation possibilities.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 667.6/.7 : 678.744 : 547.361

И. Кристя, Г. Ионицэ, И. Лупу

Разлиственные пленки на основе поливинилового спирта для защиты поверхностей, доведенных полиэстерами

Экспериментируются и вырабатываются защитные листы различных знаков для мебели, обработанной полиэстерными лаками из пленочных материалов на основе поливинилового спирта с большой силой сцепления, с прочностью на нитролак и его растворителей, производство которых возможно в стране.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 549.3 : 546.221 : 541.451 : 535 - 547.55 : 537.7

А. Икимеску, Г. Теодореску

К изучению образования тонких слоев сернистого серебра

Электрическим путем изучено с помощью электронной дифракции образование тонких слоев моно и поликристаллов Ag_2S методом теплового испарения в вакууме. Уточнена структура этих слоев, которая подтверждает тот факт, что акантит принадлежит моноклинической системе. На кристаллических основах NaCl были получены эпитаксиальные слои.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 629.13 : 621—135 : 621—22

К. Гуцэ

Пространственное течение через решетки турбомашин

Методы профилирования весьма разнообразны. Выбор того или иного метода должен производиться по критерию минимального изменения общей энтальпии (h) вдоль лопатки, а также углов входа и выхода потока газов. На рис. 8 обнаруживается очень большое изменение угла выхода из направляющего аппарата вдоль радиуса, что предполагает соответствующее закручивание лопаток, профилированных по закону постоянной циркуляции. Наблюдается (рис. 8), что изменение угла для профилирования с постоянной степенью реакции вблизи окружности $(\bar{r}_m < 1{,}1)$ очень мало. На рис. 9 б, показано изменение потерь энергии в случае небольших удлинений лопаток.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 667.6/.7 : 678.744 : 547.361

I. Cristea, Gh. Ioniță, I. Lupu

Stripping Films Based on Polyvinylic Alcohol for the Protection of Surfaces Finished with Polyesthers

The authors make experiments and elaborate protection sheets for various items for furniture finished with polyestheric varnish of a film-forming material made of polyvinylic alcohol with high adhésive strength, resistant to nitrocellulose varnish and its solvents and which can be manufactured in Romania.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 549.3 : 546.221 : 541.451 : 535 : 547.55 : 537.7

A. Ichimescu, G. Teodorescu

Contributions to the Study of the Formation of Thin Silver Sulphide Layers

The authors have studied electrically and by means of electronic difraction the formation of thin mono and polycrystalline Ag_2S layers by the method of thermal evaporation in vacuum. They have ascertained the structure of these layers and confirmed the fact that acanthitis belongs to the monoclinic systhem. On crystalline NaCl supports epitaxial layers have been obtained.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 629.13 : 621—135 : 621—22

C. Guță

Spatial Leaking Through the Turbomachines Profile Networks

The profile methods are fairly varied. The selection of one method or the other should be made according to the criterion of the total enthalpy-(h) minimum variation along the blade, as well as to the input and output angles of the gas current. În fig. 8, we observe a very great variation of the escape exit output angle from the directing instrument along the radius, which implies a corresponding twist of the blades profiled according to the constant circulation law. We observe (fig. 8) that the variation of the angle for the constant reaction degree profile up to the vicinity of the periphery ($\bar{r}_m < 1{,}1$) is very small. Taking three profile laws into consideration, the variation of energy losses in the case of small blade elongations is represented in fig. 8 b.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 621.311 : 621.3.011 : 621.3.018 : 621.314

К. Динкулеску, П. Бухуш

Метод установления расчетных соотношений средних продолжительностей работы в изучении надежности сложных структур с резервными элементами

В работе изучается случай сложных структур, состоящих из m элементов, необходимых для обеспечения успеха, и из $n-1$ резервных элементов. Считается, что все элементы обладают одинаковыми аварийными частотами и соответственно одинаковыми частотами восстановления.

Рассматривая состояния, в которых можно обнаружить структуру как цепь Маркова, работа предлагает оригинальный метод установления расчетных соотношений для средних продолжительностей работы структур в состоянии успеха. Эти соотношения могут найти широкое применение в изучении надежности работы энергетических систем и в других различных областях техники.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 621.316 : 621.317.3 : 621.3.025.3 : 621.372.6 : 621.3.011

М. Беркович, А. Арие, М. Тудосе

Виды применения теории симетричных составляющих при расчете несимемтричных режимов электрических сетей

В работе указывается на существующую нетождественность между понятиями прямой, обратной и гомополярной временной последовательности, привязанными к электрическим величинам, обладающим свойством временной последовательностью и типом операции, применяемым для получения этих величин; причем один и тот же тип операции может применяться к некоторым величинам, неявляющимся функцией времени. Для установления различия вводятся для указания использованного математического типа операции обозначения 0,1 и 2; а для указания временной последовательности обозначения d, i и h, соответствующие прямым, обратным и гомополярным последовательностям. На основе сделанных уточнений определяется смысл понятия симметрии, используемой в теории электрических сетей, как для величин, обладающих свойством последовательности во времени и представляющих фазу и амплитуду (фазоры), так и для величин, не имеющих этого свойства. В заключение устанавливаются матрицы „симметрии", соответствующие элементам симметричных сетей, и матрицы „отклонения от симметрии", соответствующие несимметричным элементам. На основе введенных в работу понятий определяется общее матричное уравнение для множественных несимметрий.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Д. К. 621.385 : 621.372.6 : 621.375 : 621.314 : 621.3.018

М. Петреску

Частотная зависимость входиого адмиттанса инверторов знака импеданса

В статье анализируется частотная зависимость входного адмиттанса инверторов знака импеданса, содержащих двухкаскадный транзисторный усилитель. Показывается, что на высоких частотах инверсия знака импеданса становится неточной, особенно в результате изменения с частотой фазы коэффициента усиления. Доказывается также, что в случае инверсии знака реактивных импедансов, на входе инвертора появляются паразитные отрицательные сопротивления, что может привести к нарушению стабильности работы инвертора.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 621.311 : 621.3.011 : 621.3.018 : 621.314

C. Dinculescu, P. Buhuș

Method for Establishing Computation Relations of Mean Operating Durations in the Study of the Reliability of Complex Structures Having Reserve Elements.

This paper studies the case of complex structures composed of *m* elements required to assure success and *n*-l reserve elements. All the elements are considered as having the same damage frequency and, respectively, the same restoring frequency.

Considering the states in which the structure may be found as a Marcov chain, an original method is presented in view of establishing the computation relations for the mean operating durations of the structure in its successful state. These relations may be widely applied in the study of relability in the operation of power systems and in various other domains of technique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 621.316 : 621.317.3 : 621.3.0.25.3 : 621.372.6 : 621.3.011

M. Bercovici, A. Arie, M. Tudose

Aspects Regarding the Application of the Symmetric Companent Theory in the Computation of Electrical Networks Non-symmetric Regimes.

In this paper stress is laid on the non-identity existing between the notions of direct, inverse and homo-polar sequence afforded to electric magnitudes enjoying the property of being successive in time, and the type of operation used in view of obtaining these magnitudes, the same type of operation may be applied also to magnitudes that are not a function of time, In order to make a difference the notations O, 1 and 2 are introduced to indicate the type of mathematical operation used, and the notations *d*, *i* and *h*, corresponding to direct, inverse and homo-polar sequences are used to indicate the order of time-sequence. On the basis of the specifications made, the meaning of the notion of symmetry used in the theory of electric networks is defined, both for the magnitude having the property of time-sequence — phasers — and for magnitudes lacking this property. Further, the „symmetry" matrices corresponding to the elements of symmetric network and the „deviation from symmetry" matrices corresponding to the non-symmetric elements are established. Based on the notions introduced in the paper, a general matricial equation for multiple non-symmetries is determined.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.C. 621.385 : 621.372.6 : 621.375 : 621.314 : 621.3.018

M. Petrescu

Frequency Response of the Input Admittance of Impedance Sign Converters.

The author describes in the paper the analysis of the frequency dependency of the input admittance of the impedance sign conversion devices by using a double transistor amplifier. He asserts that for high frequencies, the impedance sign conversion becomes unprecise, a fact depending mainly on the variation with the frequency of the amplification coefficient phase of the amplifier employed. He demonstrates at the same time that in case of conversion the reactive impedance sign, stray negative resistances occur at the conversion device input, which may lead to the infringement of the operation stability.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Résumé

M. N. Roşculeţ C.D. 514 : 517.5

Recherches sur les séries trigonométriques.

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $(-\pi, \pi)$ outre un ensemble $\mathfrak{M}$ de mesure nulle, périodique de période 2π, non intégrable sur $(-\pi, \pi)$, de sorte que la fonction

$$x^n f(n),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

soit intégrable sur $(-\pi, \pi)$. On y démontre que la série Fourier associée à la fonction $f(x)$ a la forme

$$S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \cdots + \lambda_n S_n(x)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ comme nombres arbitraires. On y détermine les séries $S_k(x)$ et on y montre que $S_1(x), \ldots S_n(x)$ sont sommables (C, n) sur $(-\pi, \pi)$ vers zéro. On y donne une expression intégrale des coefficients de la série $S_0(x)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 66.028 : 546.72 : 541.132 : 546.16

A. Ianu, Il. Niculescu, A. M. Lupu

Le dosage des traces de fer en présence des ions de fluor.

Les auteurs ont élaboré une méthode colorimétrique pour le dosage du fer en présence de grandes quantités de fluor, pour servir au dosage des traces de fer dans les produits secondaires de l'industrie des engrais phosphatés (Năvodari).

Les auteurs ont utilisé comme réactif complexant l'acide sulfosalicylique qui forme avec le Ier trivalent des complexes plus stables que le fluor.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 66.028 : 547.415.1 : 545.81 : 547.513 : 547.288.15

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Méthode de dosage N—N′ — tétraméthyl hexaméthylè 1—6 diamine

Dans la méthode volumétrique, le dosage a été fait indirectement avec utilisation du sel Reinecke comme réactif précipitant après le filtrage, on a dissous le précipité avec de l'acétone, on l'a traité avec un excédent de solution d'azotate d'argent et on a titré l'excédent avec une solution de thiocyanate d'ammonium.

Pour la méthode colorimétrique, on a utilisé le sel Reinecke comme réactif précipitant. Après filtrage, le précipité a été dissous dans de l'acétone et on a mesuré l'intensité de la couleur en utilisant le colorimètre B. Lange.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 548 : 66.065.58 : 546 : 661.18 : 541.182

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

Sur la théorie de l'équilibre des réactions hétérogènes solide-liquide

En partant de l'équation Kelvin, on déduit une relation qui met en rapport la constante de l'équilibre des réactions de double échange entre des sels réciproques peu solubles avec les dimensions des particules et la tension superficielle du liquide.

On arrive à la conclusion de l'existence d'une interdépendence entre les concentrations à l'équilibre, des composés facilement solubles les dimensions des particules en équilibre avec la solution et la tension interfaciale.

La vérification expérimentale de la justesse de la rélation est difficille à cause de l'existence dans son cadre de deux variables indépendantes, avec des possibilités de variations égales.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

Zusammenfassung

M. N. Roşculeţ D.K. 514 : 517.5

Forschungen über die trigonometrischen Reihen

Sei $f(x)$ eine auf $(-\pi, \pi)$ bestimmte Funktion ausser einer Menge $\mathfrak{M}$, des Null-Masses, periodisch der Periode 2π nichtintegrierbar auf $(-\pi, \pi)$, sodass die Funktion

$$x^n f(n),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

auf $(-\pi, \pi)$ intergriert werden kann. Es wird bewiesen dass dass die der Funktion $f(x)$ angeschlossene Fournier — Reihe folgende Form hat

$$S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \cdots + \lambda_n S_n(x)$$

worin $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ beliebige Zahlen sind. Es werden die Reihen $S_k(x)$ bestimmt und es wird gezeigt, dass $S_1(x) \ldots S_n(x)$ summierbar (C, n) auf $(-\pi, \pi)$ gegen Null sind. Es wird ein integraler Ausdruck der Faktoren der Reihe $S_0(x)$ gegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 66.028 : 546.72 : 541.132 : 546.16

A. Ianu, Il. Niculescu, A. M. Lupu

Dosierung der Eisenspuren in Anwesenheit der Fluorionen

Es wurde eine kolorimetrische Dosierungsmethode des Eisens in Anwesenheit grosser Fluormengen ausgearbeitet und zwar zur Dosierung der Eisenspuren in den Sekundärerzeugnissen der Phosphatdüngerindustrie (Năvodari).

Als Komplexionsreagens wurde die Sulfosalyzilsäure benützt, die mit dem dreiwertigen Eisen beständigere Komplexe als das Fluor bildet.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 66.028 : 547.415.1 : 545.81 : 547.513 : 547.288.15

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu

Dosierungsmethode N—N' — Tetramethyl Hexamethylen 1—6 Diamin.

In der volumetrischen Methode wurde die Dosierung indirekt, unter Anwendung des Reinecke-Salzes als fällendes Reagens durchgeführt. Nach der Filtrierung wurde der Niederschlag mit Azeton gelöst, mit Silbernitratlösung-Überschuss behandelt und der Überschuss mit Ammoniumthiozyanatlösung titriert.

Für die kolorimetrische Methode wurde das Reinekke-Salz als fällendes Reagens benützt. Der Niederschlag wurde nach der Filtrierung in Azeton gelöst und die Intensität der Farbe unter Benützung des B. Lange Kolorimeters gemessen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 548 : 66.065.58 : 546 : 661.18 : 541.182

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

Über die Theorie des Gleichgewichts der heterogenen festflüssigen Reaktionen

Von der Kelvinischen Gleichung ausgehend, wird eine Beziehung gefolgert die die Gleichgewichts — Pseudobeständigkeit der Doppel — Tauschreaktionen zwischen den gegenseitigen, schwach löslichen Salzen mit den Teilchenausmassen und der Oberflächenspannung der Flüssigkeit in Verbindung setzt.

Man gelangt zu der Schlussfolgerung der Existenz einer gegenseitigen Abhängigkeit zwischen den in Gleichgewicht leicht löslichen Verbindungskonzentrationen, den sich mit der Lösung in Gleichgewicht befindenden Teilchen und der interfazialen Spannung.

Die Prüfung der Genauigkeit des Reaktionexperiments wird durch das Vorhandensein von zwei unabhängigen Variablen mit gleichen Veränderungsmöglichkeiten erschwert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 667.6/.7 : 678.744 : 547.361

I. Cristea, Gh. Ioniță, I. Lupu

Pellicules exfoliables à base d'alcool polyvinylique pour la protection des surfaces finies au moyen de polyesters.

Les auteurs expérimentent et élaborent des feuilles de protection pour divers repères, pour meubles finis avec des vernis polyestériques dans un matériel pelliculogène à base d'alcool polyvinylique, ayant une grande force d'adhésion, résistant au vernis de nitrocellulose et à ses solvants et qui peut être fabriqué en Roumanie.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 549.3 : 546.221 : 541.451 : 535 : 547.55 : 537.7

A. Ichimescu, G. Teodorescu

Contributions à l'étude de la formation des couches minces de sulfure d'argent.

Les auteurs ont étudié par voie électrique et à l'aide de la diffraction électronique la formation des couches minces mono et polycristallines de Ag_2S par la méthode de l'évaporation thermique dans le vide. Ils ont précisé la structure de ces couches en confirmant le fait que l'acanthite appartient au système monoclinique. Des couches épitaxiales ont été obtenues sur des supports cristallins de NaCl.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 629.13 : 621—135 : 621—22

C. Guță

L'écoulement spatial par les réseaux de profil des turbomachines

Les méthodes de profiler sont assez variées. Le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes doit se faire d'après, le critère de la variation minimum de l'enthalpie totale (h) le long de la palette, ainsi que des angles d'entrée et de sortie du courant de gaz. On observe dans la figure 8 une très grande variation de l'angle de sortie de l'appareil directeur le long du rayon, ce qui suppose une torsion correspondante des palettes préfilées selon la loi de la circulation constante. On remarque (fig. 8) que la variation de l'angle pour le profil à degré de réaction constant jusqu'aux approches de la périphérie ($\overline{r_m} < 1{,}1$) est très petite. Dans la fig. 8 b, où trois lois de profil sont prises en considération, on indique la variation des partes d'énergie dans le cas des légères élongations des palettes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 667.6/.7 : 678.744 ; 547.361

I. Cristea, Gh. Ioniță, I. Lupu

Schichtbare Filme auf Polyvinylalkoholbasis zum Schutz der mit Polyester bearbeiteten Oberflächen.

Es werden Versuche angestellt und Schutzfolien der verschiedenen Einzelteile der mit Polyesterlack polierten Möbel ausgearbeitet. Diese Folien sind aus einem filmartigen Material auf Polyvinylalkoholbasis hergestellt, haben eine hohe Klebkraft, sind Nitrolack und dessen Lösemittel gegenüber widerstandsähig und können im Land erzeugt werden.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 549.3 : 546.221 : 541.451 : 535 : 547.55 : 537.7

A. Ichimescu, G. Teodorescu

Beiträge zum Studium der Bildung dünner Silbersulfidschichten.

Auf elektrischem Wege und mittels elektronischer Beugung wurde die Bildung der dünnen mono und polykristallinen Ag_2S-Schichten durch die Methode der thermischen Verdunstung im Vakuum studiert. Es wurde die Struktur dieser Schichten bestimmt und dadurch bestätigt, dass die Akanthite dem monoklinischen System angehört. Auf Kristallunterlagen von NaCl wurden Epitaxial-Schichten erlangt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 629.13 : 621—135 : 621—22

C. Guță

Raumströmung durch Profilnetze der Turbomaschinen.

Die Profilierungsmethoden sind sehr verschieden. Die Wahl der einen oder der anderen Methode muss entsprechend dem Kriterium der minimalsten Veränderung der gesamten Enthalpie (h) entlang der Palette, sowie auch der Eingangs und Ausgangswinkel des Gasstroms durchgeführt werden. In Abbildung 8 wird eine sehr grosse Änderung des Ausgangswinkels aus dem Leitapparat entlang des Radius festgestellt. Dieses setzt eine entsprechende Verdrehung der Profilschaufeln nach dem Gesetz des konstanten Umlaufs voraus. Es wird festgestellt (Abb. 8), dass die Veränderung des Winkels zur Profilierung mit konstantem Reaktionsgrad bis in die Nähe der Pheripherie ($\overline{r_m} < 1{,}1$) sehr klein ist.

Unter Betrachtung von drei Profilierungsgesetzen wird in Abb. 8 b die Änderung der Energieverluste im Falle der kleinen Verlängerungen der Schaufeln wiedergegeben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 621.311 : 621.3.011 : 621.3.018 : 621.314

C. Dinculescu, P. Buhuş

Méthode pour déterminer les relations de calcul des durées moyennes de fonctionnement dans l'étude de la friabilité des structures complexes avec des éléments de réserve.

On étudie dans l'ouvrage le cas des structures complexes composées de *m* éléments, nécessaires pour assurer le succès, et de *n*-l éléments de réserve. Tous les éléments sont considérées ayaut les mêmes fréquences d'avarie et, respectivement les mêmes fréquemes de rétablissement.

Considérant les états dans lesquels peut se trouver la structure sous forme d'une chaîne Marcov, on présente une méthode originale d'établir les relations de culcul pour les durées moyennes de fonctionnement de la structure à l'état de succès. Ces relations peuvent avoir une vaste applicabilité dans l'étude de la friabilité dans le fonctionnement des systèmes énergétiques et dans d'autres différents domaines techniques.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 621.316 : 621.317.3 : 621.3.025.3 : 621.372.6 : 621.3.011

M. Bercovici, A. Arie, M. Tudose

Aspects concernant l'application de la théorie des componentes symétriques dans le calcul des régimes non-symétriques des réseaux électriques.

On accentue, dans l'ouvrage, la non-identité qui existe entre les notions de séquence directe, inverse et homopolaire attachées aux grandeurs électriques, qui joüissent de la propriété d'avoir une succession dans le temps et le type d'opération utilisée pour obtenir ces grandeurs, le même type d'opération pouvant être appliqué également à des grandeurs qui ne sont pas une fonction du temps. Pour pouvoir faire la distinction, on y introduit, pour indiquer le type d'opération mathématique utilisée, les notations, 0,1 et 2, et pour indiquer la séquence de succession dans le temps, les notations *d*, *i* et *h*, correspondantes aux séquences directes, inverses et homopolaires. Sur la base des précisions effectuées, on définit le sens de la notion de symetrie utilisée dans la théorie de réseaux électriques, tant pour les grandeurs qui possèdent la propriété de succession dans le temps, phaseurs, que pour les grandeurs qui n'ont pas cette propriété. Ensuite, on établit les matrices de „symétrie" correspondantes aux éléments des réseaux symétriques et les matrices de „l'écart de la symétrie" correspondantes aux éléments non-symétriques. Sur la base des notions introduites dans l'ouvrage, on détermine un équation générale matricielle pour des non-symétries multiples.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

C.D. 621.385 : 621.372.6 : 621.375 : 621.314 : 621.3.018

M. Petrescu

Dépendance de la fréquence de l'admittance d'entrée des inverseurs du signe d'impédance

L'auteur analyse dans l'ouvrage la dépendance de la fréquence de l'admittance d'entrée des inverseurs de signe d'impédance en utilisant un amlificateur à deux transistors. Il indique que pour de hautes fréquences, l'inversion du signe d'impédance devient imprécise, fait qui dépend surtout de la variation à fréquence de la phase du coeffcient d'amplification de l'amplificateur utilisé. Il démontre en même temps que dans le cas de l'inversion du signe d'impédance réactive, des résistances négatives parasites apparaissent à l'entrée de l'inverseur, ce qui peut troubler la stabilité du fonctionnement.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 621.311 : 621.3.011 : 621.3.018 : 621.314

C. Dinculescu, P. Burhuş

Methode zur Feststellung der Berechnungsbeziehungen der mittleren Betriebsdauer beim Studium der komplexen Strukturen mit Reserveelementen

In vorliegender Arbeit wird der Fall der komplexen Strukturen studiert, die aus zur Sicherstellung des Erfolgs notwendigen m Elementen und n-1 Reserveelementen besteht. Es wird angenommen, dass alle Elemente die gleiche Betriebsstörungsfrequenz und dementsprechend die gleiche Wiederherstellungsfrequenz haben.

Wenn man den Zustand in dem sich die Struktur befinden kann als eine Markov-Kette betrachtet, so bietet sich eine originelle Methode zur Bestimmung der Berechnungsbeziehungen für die mittlere Betriebsdauer der Struktur im Erfolgszunstand. Diese Relationen finden in dem Studium der Sicherheit im Betrieb der energetischen Systeme und in anderen verschiedenen technischen Bereichen eine umfangreiche Anwendung.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

D.K. 621.316 : 621.317.3 : 621.3.025.3 : 621.372.6 : 621.3.011

M. Bercovici, A. Arie, M. Tudose

Zur Anwendung der Theorie der symmetrischen Komponenten in der Berechnung der unsymmetrischen Betriebe der elektrischen Netze

Es wird in der Arbeit dargelegt dass die Begriffe der gleichläufigen, gegenläufigen und Nullkomponenten der elektrischen Grössen — welche die Eigenschaft der Zeitsequenz haben — und die mathematische Operation womit dieselben ermittelt werden, nicht verwechselt werden dürfen.

Die gleiche Operation kann auch an Grössen die nicht zeitabhängig sind, angewendet werden.

Um einen Unterschied zu machen, werden für die Anzeige der benützten mathematischen Operation die Indizes 0,1 und 2 eingeführt, während für die Anzeige der Zeitsequenzen die Indizes d, i und h eingeführt werden.

Auf Grund der ausgeführten Bestimmungen, wird der Sinn des angewendeten Symmetriebegriffs bestimmt, der in der Theorie der elektrischen Netze, sowohl für die Grössen die die Eigenschaft der Zeitfolge bestizen, die Phasenzeiger, als auch für die Grössen die diese Eigenschaften nicht besitzen, benützt wird.

In der Folge werden die „Symmetrie" — Matrizen die den symmetrischen Elementen der Netze entsprechen und die Matrizen der „Abweichung von der Symmetrie" die den unsymmetrischen Elementen entsprechen, bestimmt. Auf Grund der in der Arbeit eingeführten Begriffe wird eine allgemeine Matrizen — Gleichung für vielfache Unsymmetrie bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

M. Petrescu D.K.621.385 : 621.372.6 : 621.375 : 621.314 : 621.3.018

Die Frequenzabhängigkeit der Eingangsadmittanz der Impedanzzeichen-Umschalter.

In vorliegendem Artikel wird die Analyse der Frequenzabhängigkeit der Eingangsadmittanz der Impedanzzeichenumschalter unter Benützung eines Verstärkers mit zwei Transistoren durchgeführt.

Es wird gezeigt, dass bei Hochfrequenz die Impedanzzeicheninversion ungenau wird, eine Tatsache die besonders von der Frequenzvariation des Verstärkungskoeffizienten des benützten Verstärkers abhängig ist.

Gleichzeitig wird gezeigt, dass im Falle der Inversion des reaktiven Impedanzzeichens, beim Eingang des Umschalters störende negative Widerstände auftreten und dieses zur Überschreitung der Betriebsstabilität führen kann.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 4/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

MATEMATICĂ

C. Z.: 514 : 517.5

RECHERCHES SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Sur la sommabilité de la série de Fourier associée à une fonction non intégrable *)

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Chapitre I. $x^{2n} f(x)$ *intégrable sur* $[-\pi, \pi]$.

1.1. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π, définie sur $[-\pi, \pi]$ en dehors d'un ensemble $\mathfrak{M}$ de mesure nulle, telle que la fonction

$$x^{2n} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M} \tag{1.1}$$

soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

Soit $T(x)$ le polynôme trigonométrique ([1], pag. 138).

$$T(x) = -1 + 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} \cos kx, \tag{1.2}$$

ou

$$T(x) = -\frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[C_{2n}^{n} + 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_{2n}^{n-k} \cos kx\right] \tag{1.2'}$$

polynôme qui a le zéro $x = 0$ d'ordre $2n$.

Posons

$$T(x) f(x) \simeq T(x)\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx + \cdots$$

la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px) \tag{1.4}$$

*) Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest, 27—29 Mai 1966.

est appelée la série de Fourier associée à la fonction non-intégrable $f(x)$ ([1] pag. 130). Parceque

$$T(x) = -\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sin^{2n}\frac{x}{2}, \tag{1.5}$$

la fonction $T(x)\,f(x)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, donc

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t)\,f(t)\cos kt\,dt,$$
$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(t)\,f(t)\sin kt\,dt. \tag{1.6}$$

En identifiant en (1.3) on obtient le système infini en a_k, b_k,

$$A\cdot\frac{\alpha_0}{2} = C_{2n}^{n}\frac{a_0}{2} - C_{2n}^{n+1}a_1 + \cdots + (-1)^n C_{2n}^{2n}a_n$$

$$A\cdot\alpha_p = (-1)^p 2C_{2n}^{n+p}\frac{a_0}{2} + (-1)^{p+1}(C_{2n}^{n+p-1} + C_{2n}^{n+p+1})a_1 + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n (C_{2n}^{2p} + C_{2n}^{2n})a_{n-p} + (-1)^{n+1} C_{2n}^{2p-1} a_{n-p+1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+p} C_{2n}^{p} a_n + \cdots + (-1)^{n+2p}\cdot C_{2n}^{0} a_{n+p},$$

et

$$A\cdot\beta_p = (-1)^{p+1}(C_{2n}^{n+p-1} - C_{2n}^{n+p+1})\,b_1 + (-1)^{p+2}(C_{2n}^{n+p+2} - C_{2n}^{n+p-2})\,b_2 +$$
$$\cdots + (-1)^n (C_{2n}^{2p} - C_{2n}^{2n})\,b_{n-p} + (-1)^{n+1} C_{2n}^{2p-1} b_{n-p+1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+2p} C_{2n}^{0} b_{n+p},$$

où $p = 1, 2, 3, \ldots$ et $A = -\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$,

avec la solution

$$a_{n+s} = (-1)^n A\left(C_{2n-1}^{0}\alpha_s + C_{2n}^{1}\alpha_{s-1} + \cdots + C_{2n+s-2}^{s-1}\alpha_1 + \right.$$
$$\left. + C_{2n+s-1}^{s}\frac{\alpha_0}{2}\right) + \frac{a_0}{2}(-1)^{n+1}[C_{2n}^{n} C_{2n+s-1}^{s} - (C_{2n}^{n-1} + C_{2n}^{n+1}) C_{2n+s-2}^{s-1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^s (C_{2n}^{n-s} + C_{2n}^{n+s}) C_{2n-1}^{0}] + \tag{1.7}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n+k+1} a_k [C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{s} - (C_{2n}^{n-k-1} + C_{2n}^{n-k+1}) C_{2n+s-2}^{s-1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^s (C_{2n}^{n-k-s} + C_{2n}^{n-k+s}) C_{2n-1}^{0}],\ s = 0, 1, 2, \ldots$$

et

$$b_{n+s} = (-1)^n A\,(C^0_{2n-1}\beta_s + C^1_{2n}\beta_{s-1} + \cdots + C^{s-1}_{2n+s-2}\beta_1) + \\ + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} b_k \,[C^{s-1}_{2n+s-2}(C^{n-k+1}_{2n} - C^{n-k-1}_{2n}) - \\ - C^{s-2}_{2n+s-3}(C^{n-k+2}_{2n} - C^{n-k-2}_{2n}) + \cdots \\ + \cdots + (-1)^{s-1} C^0_{2n-1}(C^{n-k+s}_{2n} - C^{n-k-s}_{2n})\,], \quad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.8}$$

où les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont arbitraires.

Pour obtenur ce résultat on utilise l'-galité

$$C^0_{2n-1} C^k_{2n} - C^1_{2n} C^{k-1}_{2n} + \cdots + (-1)^k C^k_{2n+k-1} C^0_{2n} = 0 \tag{1.8'}$$

obtenue en égalant les coefficients de x^k dans l'identité

$$(1-x)^{2n}\left(1 + \frac{2n}{1!}\,x + \frac{2n(2n+1)}{2!}x^2 + \cdots\right) \equiv 1, \quad |x| < 1.$$

2. Utilisant (1.6) on a

$$\frac{(-1)^n}{A}\,\alpha^*_{n+s} = C^0_{2n-1}\alpha_s + C^1_{2n}\alpha_{s-1} + \cdots + C^{s-1}_{2n+s-2}\alpha_1 + C^s_{2n+s-1}\frac{\alpha_0}{2} = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{h=0}^{s} C^h_{2n+h-1}\cos(s-h)\,t\right) T(t) f(t)\,dt,$$

mais ([1], pag. 140).

$$\sum_{h=0}^{s} C^h_{2n+h-1}\cos(s-h)\,t = \sum_{\alpha=0}^{n}(-1)^{\alpha-1}\frac{1}{2^{2\alpha+1}}(C^{s+\alpha}_{s+2n-\alpha} + C^{s+\alpha-1}_{s+2n-\alpha-1})\cdot\frac{1}{\sin^{2\alpha}\frac{t}{2}} + \\ + \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\,\frac{\cos(s+n)\,t}{\sin^{2n}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{2n+1}}\,\frac{1}{\sin^{2n}\frac{t}{2}}\cdot \mathcal{A}_{n,s}(t)$$

où $\mathcal{A}_{n,s}(t)$ est le polynôme trigonométrique

$$\mathcal{A}_{n,s}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n}(\quad 1)^{\alpha-1}\,2^{2n-2\alpha}(C^{s+\alpha}_{s+2n-\alpha} + C^{s+\alpha-1}_{s+2n-\alpha-1})\sin^{2n-2\alpha}\frac{t}{2} + \\ + (-1)^n 2\cos(s+n)\,t \tag{1.9}$$

et avec $T(x)$ donné par (1.5) il résulte que

$$a^*_{n+s} = \frac{1}{\pi}A^*\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{A}_{n,s}(t) f(t)\,dt, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

avec

$$A^* = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{1.11}$$

De la même manière on a

$$\frac{(-1)^n}{A} b^*_{n+s} = C^0_{2n-1} \beta_s + C^1_{2n} \beta_{s-1} + \cdots + C^{s-1}_{2n+s-2} \beta_1 =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{h=1}^{s} C^h_{2n+h-1} \sin (s-h) \right) T(t) f(t)\, dt$$

mais [1] *)

$$\sum_{h=1}^{s} C^h_{2n+h-1} \sin (s-h)\, t = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{(-1)^\alpha}{2^{2\alpha+1}} C^{s+\alpha}_{s+2n-\alpha-1} \frac{\operatorname{cotg} \frac{t}{2}}{\sin^{2\alpha} \frac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{\sin (s+n)\, t}{\sin^{2n} \frac{t}{2}} = \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{\sin^{2n} \frac{t}{2}} \mathfrak{B}_{n,s}(t)$$

où $\mathfrak{B}_{n,s}(t)$ est le polynôme trigonométrique

$$\mathfrak{B}_{n,s}(t) = 2 \cos \frac{t}{2} \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^\alpha 2^{2n-2\alpha} C^{s+\alpha}_{s+2n-\alpha-1} \sin^{2n-2\alpha-1} \frac{t}{2} + \tag{1.12}$$

$$+ (-1)^n 2 \sin (s+n)\, t$$

donc

$$b^*_{n+s} = \frac{1}{\pi} A^* \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}_{n,s}(t) f(t)\, dt, \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.13}$$

on peut énoncer

Théorème 2.1.1. Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ en dehors d'un ensemble $\mathfrak{M}$ de mesure nulle, non intégrable sur $[-\pi, \pi]$, telle que la fonction

$$x^{2n} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

La série de Fourier associée à la fonction $f(x)$ est donné par

$$S^*(x) + \lambda_0 S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \ldots + \lambda_{n-1} S_{n-1}(x) +$$

$$+ \mu_1 \widetilde{S}_1(x) + \mu_2 \widetilde{S}_2(x) + \ldots + \mu_n \widetilde{S}_n(x),$$

*) pag. 140.

où $S^*(x)$ est la série trigonométrique

$$\frac{a_0^*}{2} + \sum_1^\infty (a_p^* \cos px + b_p^* \sin px)$$

avec a_p^*, b_p^* donnés par (1.10), (1.13) et où $S_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots n-1$, $\widetilde{S}_n(x)$, $h = 1, 2, \ldots, n$, sont 2n séries trigonométrique indépendantes de $f(x)$, définies par (1.7) et (1.8), λ_i, μ_j étant $2n$ nombres arbitraires.

3. La série $S_k(x)$ est donnée par

$$\cos kx + \nu_0 \cos nx + \nu_1 \cos (n+1)x + \ldots + \nu_s \cos (n+s)x + \ldots \quad (1.15)$$

où ν_s est le polynôme $P_{n,k}(n+s)$

$$P_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k+1} \left[C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{s} + \sum_{h=1}^{s} (-1)^h (C_{2n}^{n-k-h} + C_{2n}^{n-k+h}) C_{2n+s-h-1}^{s-h} \right]. \quad (1.16)$$

Lemme 1.3.1. Le polynôme $P_{n,k}(n+s)$ est de degré $2n-2$ en $n+s$.

Démonstration. Le polynôme peut être écrit

$$P_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k+1} \left[C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{2n-1} + \sum_{h=1}^{s} (-1)^h (C_{2n}^{n-k-h} + C_{2n}^{n-k+h}) C_{2n+s-h-1}^{2n-1} \right], \quad (1.17)$$

ou

$$P_{n,k}(n+s) = -C_{2n}^{0} C_{n+s+k-1}^{2n-1} + C_{2n}^{1} C_{n+s+k}^{2n-1} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+k} C_{2n}^{n-k-1} C_{2n+s-2}^{2n-1} + (-1)^{n-k+1} C_{2n}^{n-k} C_{2n+s-1}^{2n-1} + \quad (1.17')$$
$$+ (-1)^{n-k+2} C_{2n}^{n-k+1} C_{2n+s-2}^{2n-1} + \cdots + (-1)^{2n+1} C_{2n}^{2n} C_{n+s-k-1}^{2n-1}$$

et où

$$C_{2n+s-h}^{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)!} (s+n+n-h)(s+n+n-h-1)\ldots(s+n-h-n+2)$$

qui est de degré $2n-1$ en $n+s$, mais le coefficient de $(n+s)^{2n-1}$ en $P_{n,k}(s+k)$ est

$$-C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1} - \ldots + C_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n}$$

qui est zéro. Le lemme est démontré.

Lemme 1.3.2. L'équation $P_{n,k}(s+n) = 0$ admet les zéros $s = -1$, $s = -2, \ldots, s = -k+1$, $s = -k-1, \ldots, s = -n$ et l'on a $P_{n,k}(k) = +1$.

Démonstration. En remplaçant, par exemple, $s = -n$ en (1.17) on doit avoir

$$C_{2n}^{2n} C_{2n+k}^{2n-1} - C_{2n}^{2n-1} C_{2n+k-1}^{2n-1} + \cdots + (-1)^{k+1} C_{2n}^{2n-k-1} C_{2n-1}^{2n-1} = 0$$

qui est justement la relation (1.8') où l'on pose $k+1$ au lieu de k. Pour $s+n=k$, donc $s=k-n$ on a en (1.17')

$$P_{n,k}(k) = C_{2n}^{2n} C_{2n-1}^{2n-1} = +1,$$

Le lemme est démontré.

Lemme 1.3.3. La polynôme $P_{n,k}(s+n)$ est pair

Demonstration. Conformément au lemme 1.3.2 le polynôme a les zéros, 0, $+1$, $+2$,..., $k-1$, $k+1$,..., $n-1$ et pour $s+n=k$ prend la valeur $+1$. On vérifie aisement qu'il admet également les zéros, -1, -2, $-k+1$, $-k-1$,..., $-n+1$ et pour $s+n=-k$ prend la valeur $+1$, donc $P_{n,k}(s+n)$ contient seulement les puissances paires de $s+n$.

Ces lemmes montrent que le coefficient de a_k est de la forme

$$\gamma_0\left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos mx + \ldots\right) +$$

$$+\gamma_2 (1^2 \cdot \cos x + 2^2 \cdot \cos 2x + \ldots + m^2 \cos mx + \ldots) + \qquad (1.18)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\gamma_{2n-2} (1^{2n-2} \cdot \cos x + 2^{2n-2} \cdot \cos 2x + \ldots + m^{2n-2} \cos mx + \ldots)$$

mais la série

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos mx + \cdots \qquad (1.19)$$

est sommable $(C, 1)$ vers zéro sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$ et les séries

$$1^{2k} \cdot \cos x + 2^{2k} \cos 2x + \ldots + m^{2k} \cos mx + \cdots \qquad (1.20)$$

étant des séries formées avec les dérivées d'ordre $2k$ des termes de (1.19) sont sommables $(C, 2k+1)$ avec zéro sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$.

Théorème 1.3.1. Les séries $S_k(x)$, $k=0,1,\ldots, n-1$, sont sommables $(C, 2n-1)$ vers zéro sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$.

1.4. Pour $n=1$, le coefficient de $\frac{a_0}{2}$ est

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos mx + \cdots$$

Pour $n=2$, les coefficients de a_0, a_1 sont respectivement

$$\frac{1}{2} + (1-1^2)\cos x + (1-2^2)\cos 2x + \ldots + (1-m^2)\cos mx + \cdots$$

et

$$1^2 \cos x + 2^2 \cos 2x + \ldots + m^2 \cos mx + \cdots$$

Pour $n = 3$ les coefficients de a_0, a_1, a_2 sont

$$\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \left(1 - \frac{5}{4} m^2 + \frac{1}{4} m^4\right) \cos mx,$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{4}{3} m^2 - \frac{1}{3} m^4\right) \cos mx,$$

et

$$\sum_1^\infty \frac{1}{12}(-m^2 + m^4) \cos mx.$$

4. La série $\widetilde{S}_k(x)$ est donnée par

$$\sin kx + \eta_1 \sin (n+1)x + \eta_2 \sin (n+2)x + \cdots + \eta_s \sin (n+s)x + \cdots$$

où η_s est le polynôme $Q_{n,k}(n+s)$

$$Q_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k} \sum_{h=1}^{s} (-1)^{h-1} C_{2n+s-2}^{s-h} \left(C_{2n}^{n-k+h} - C_{2n}^{n-k-h}\right) \quad (1.21)$$

Lemme 1.4.1. Le polynôme $Q_{n,k}(n+s)$ est de degré $2n-1$ en $n+s$.

Démonstration. Chaque terme qui intervient en 1.21 este de dégré $2n-1$ et le coefficient de $(n+s)^{2n-1}$ est

$$\sum_{h=1}^{s} (-1)^{h-1} \left(C_{2n}^{n-k+h} - C_{2n}^{n-k-h}\right) \neq 0$$

Lemme 1.4.2. L'équation $Q_{n,k}(n+s) = 0$ admet les zéros $s+n=0$, $s+n=1, \ldots, s+n=k-1$, $s+n=k+1, \ldots, s+n=n-1$, $s+n=n$ et $Q_{n,k}(k) = +1$.

Démonstration. Pour $s+n=0$, par exemple, la valeur de $Q_{n,s}$ est

$$C_{2n}^{2n} C_{2n+k-1}^{2n-1} - C_{2n}^{2n-1} C_{2n+k-2}^{2n-1} + \ldots + (-1)^k C_{2n}^{2n-k} C_{2n-1}^{2n-1}$$

qui est nulle. Pour $s+n=k$ la valeur de $Q_{n,s}$ est

$$Q_{n,s}(k) = C_{2n}^{2n} C_{2n-1}^{2n-1} = +1.$$

On observe que

$$Q_{n,s}(-k) = -C_{2n}^{0} C_{2n-1}^{2n-1} = -1$$

et que le polynôme $Q_{n,s}$ admet aussi les racines $s+n=-1$, $s+n=-2, \ldots, s+n=-k+1, s+n=-k-1, \ldots, s+n=-n$, donc

Lemme 1.4.3. Le polynôme $Q_{n,s}(s+n)$ est impair en $s+n$.

Ces lemmes montrent que le coefficient de a_k est de la forme

$$\gamma_1 (1^1 \sin x + 2 \sin 2x + \ldots + m \sin mx + \ldots) +$$

$$+ \gamma_3 (1^3 \sin x + 2^3 \sin 2x + \ldots + m^3 \sin mx + \ldots) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \gamma_{2n-1} (1^{2n-1} \sin x + 2^{2n-1} \sin 2x + \ldots + m^{2n-1} \sin mx + \ldots)$$

mais la série

$$1^k \sin x + 2^k \sin 2x + \ldots + m^k \sin kx + \ldots, k = 1, 3, 5, \ldots$$

est sommable $(C, k+1)$ vers zéro sur $[-\pi, \pi]$ pour $k = 1, 3, \ldots, 2n-1$; étant la série formée avec les dérivées d'ordre k des termes de la serie 1.19, qui est sommable $(C, 1)$ sur $[-\pi, \pi] - \{0\}$. Nous avons démontré le suivant

Théorème 1.4.1. Les séries $\widetilde{S}_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sont soumables $(C, 2n)$ vers zéro sur $[-\pi, \pi]$.

1.5.1. Pour $n = 1$, le coefficient de b_1 est

$$1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin 2x + \ldots + m \cdot \sin mx + \cdots$$

Pour $n = 2$ les coefficients de b_1 et b_2 sont respectivement

$$-\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} (m^3 - 4m) \sin mx,$$

et

$$\frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\infty} (m^3 - m) \sin mx,$$

Pour $n = 3$ les coefficients de b_1, b_2 et b_3 sont

$$\frac{1}{24} \sum_{1}^{\infty} (m^5 - 13m^3 + 36m) \sin mx,$$

$$-\frac{1}{30} \sum_{m=1}^{\infty} (m^5 - 10m^3 + 9m) \sin mx,$$

et

$$-\frac{1}{120} \sum_{1}^{\infty} (m^5 - 5m^3 + 4m) \sin mx.$$

II. $x^{2n-1} f(x)$ *intégrable sur* $[-\pi, \pi]$.

2.1. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π, définie sur $[-\pi, \pi]$, en déhors d'un ensemble $\mathfrak{M}$ de mesure nulle, telle que la fonction

$$x^{2n-1} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

Soit $T_n^*(x)$ le polynôme trigonométrique ([1], pag. 132).

$$T_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n}{}' (-1)^k \frac{(n+1)!\,(n-1)!}{(n+k)!\,(n-k)!} k \sin kx$$

on a

$$\frac{2(2n-1)}{n(n+1)} T_n^*(x) = \sin x \, T_{n-1}(x) \tag{2.1}$$

avec $T_{n-1}(x)$ donné par (1.2). On déduit de cette relation que la fonction

$$T_n^*(x)\cdot f(x),\ x\in[-\pi,\pi]$$

est intégrable sur $[-\pi,\pi]$.

Posons

$$T^*(x)f(x)\simeq T^*(x)\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos px+b_p\sin px)\right]\equiv \tag{2.2}$$

$$\equiv\frac{\alpha_0}{2}+\alpha_1\cos x+\beta_1\sin x+\ldots+\alpha_m\cos mx+\beta_m\sin mx+\ldots$$

la série

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{\infty}(a_p\cos px+b_p\sin px)$$

est la série de Fourier associée à la fonction non integrable $f(x)$

En vertu de la relation (2.1) on a

$$T_n^*(x)=\frac{2}{B}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(C_{2n-2}^{n-k}-C_{2n-2}^{n-k-2})\sin kx,$$

avec

$$B=-\frac{2(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

En identifiant en (2.2) on obtient le système infini

$$B\,\frac{\alpha_0}{2}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_k(C_{2n-2}^{n-k}-C_{2n-2}^{n-k-2})$$

$$B\,\alpha_p=\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p+k-1}b_k(C_{2n-2}^{n-p-k}-C_{2n-2}^{n-p-k-2}-C_{2n-2}^{n-p-k+2}+C_{2n-2}^{n-p-k})+$$

$$+(-1)^{2p-1}b_p(C_{2n-2}^{n-2p}-C_{2n-2}^{n-2p-2})+ \tag{2.3}$$

$$+\sum_{h=1}^{n-p}(-1)^{2p+h-1}b_{p+h}(C_{2n-2}^{n-h}-C_{2n-2}^{n-h-2}+C_{2n-2}^{n-2p-h}-C_{2n-2}^{n-2p-h-2})$$

et

$$B\,\beta_p=(-1)^{p+1}a_0(C_{2n-2}^{n-p}-C_{2n-2}^{n-p-2})+$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p+k+1}a_k(C_{2n-2}^{n-p-k}-C_{2n-2}^{n-p-k-2}+C_{2n-2}^{n-p+k}-C_{2n-2}^{n-p+k-2})+ \tag{2.4}$$

$$+(-1)^{2p+1}a_p(C_{2n-2}^{n-2p}-C_{2n-2}^{n-2p-2})+\sum_{k=1}^{n-p+1}(-1)^{2p+k+1}a_{p+k}(-C_{2n-2}^{n-k}+$$

$$+C_{2n-2}^{n-k-2}+C_{2n-2}^{n-2p-k}-C_{2n-2}^{n-2p-k-2})$$

$p = 1,2,3,\ldots$, où

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n^*(t) f(t) \cos kt\, dt,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_n^*(t) f(t) \sin kt\, dt, \tag{2.4'}$$

avec la solution

$$b_{n+p} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n+p+k-1} b_k \Big(\sum_{h=0}^{p} (-1)^h C_{2n-3+h}^{h} \big(C_{2n-2}^{n+p-k-h} - C_{2n-2}^{n-p-k+h-2} \big) \Big)$$

$$+ (-1)^{n+1} B \left(\alpha_p + C_{2n-2}^{1} \alpha_{p-1} + \ldots + C_{2n+p-4}^{p-1} \alpha_1 + C_{2n+p-3}^{p} \frac{\alpha_0}{2} \right) +$$

$$+ (-1)^{n+1} B \left[\alpha_{p-2} + C_{2n-2}^{1} \alpha_{p-3} + \ldots + C_{2n+p-6}^{p-3} \alpha_1 + C_{2n+p-5}^{p-2} \frac{\alpha_0}{2} \right] +$$

. . . . . .

. . . . . .

$$+ \begin{cases} (-1)^{n+1} B \left(\alpha_1 + C_{2n-2}^{1} \dfrac{\alpha_0}{2} \right), \text{ si } p \text{ est impair} \\ (-1)^{n+1} B \dfrac{\alpha_0}{2}, \text{ si } p \text{ est pair} \end{cases}$$

$p = 0, 1, 2,\ldots$, et

$$a_{n+p} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{n+k+p+1} C_{2n-3+2s}^{2s} \big(C_{2n-2}^{n-k+p-2s} - 2C_{2n}^{n-k-1} + \right.$$

$$+ C_{2n-2}^{n-k-p+2s-2} \big) +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\frac{p-3}{2}} (-1)^{n+k+p} C_{2n-3+2s+1}^{2s+1} \big(C_{2n-2}^{n-k+p-2s-1} - C_{2n-2}^{n-k} - C_{2n-2}^{n-k-2} + \tag{2.6}$$

$$\left. + C_{2n-2}^{n-k-p+2s-1} \big) \right] +$$

$$+ (-1)^n B (\beta_p + C_{2n-2}^{1} \beta_{p-1} + \ldots + C_{p+2n-4}^{p-1} \beta_1) +$$

$$+ (-1)^n B (\beta_{p-2} + C_{2n-2}^{1} \beta_{p-3} + \ldots + C_{p+2n-6}^{p-3} \beta_1) +$$

. . . . . .

$$+ (-1)^n B \beta_1$$

pour p impair, $(p = 1, 3, 5, \ldots)$, et

$$a_{n+p} = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{s=0}^{\frac{p-2}{2}} (-1)^{n+k+p+1} C_{2n-3+2s}^{2s} \left(C_{2n-2}^{n-k+p-2s} - C_{2n-2}^{n-k} - \right.\right.$$

$$- C_{2n-2}^{n-k-2} + C_{2n-2}^{n-k-p-2+2s} \Big) +$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{\frac{p-2}{2}} (-1)^{n+k+p} C_{2n-3+2s+1}^{2s+1} \left(C_{2n-2}^{n-k+p-2s-1} - 2C_{2n-2}^{n-k-1} + C_{2n-2}^{n-k-p+2s-1} \right) \right] +$$

$$+ (-1)^n B \left(\beta_p + C_{2n-2}^{1} \beta_{p-1} + \ldots + C_{p+2n-4}^{p-1} \beta_1 \right) + \qquad (2.7)$$

$$+ (-1)^n B \left[\beta_{p-2} + C_{2n-2}^{1} \beta_{p-3} + \ldots + C_{p+2n-6}^{p-3} \beta_1 \right] +$$

. . . . . .

. . . . . .

$+ (-1)^n B \left[\beta_2 + C_{2n-2}^{1} \beta_1 \right]$, si p est pair, $(p = 0, 2, 4, \ldots)$.

dans ces formules on remplace a_0 par $\dfrac{a_0}{2}$.

2.2. Utilisant (2.4') et (2.5) on a

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b_{n+2s}^{*} = \alpha_{2s} + C_{2n-2}^{1} \alpha_{2s-1} + \ldots + C_{2n+2s-3}^{2s} \frac{\alpha_0}{2} +$$

$$+ \alpha_{2s-2} + C_{2n-2}^{1} \alpha_{2s-3} + \ldots + C_{2n+2s-5}^{2s-2} \frac{\alpha_0}{2} +$$

. . . . . .

donc

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b_{n+2s}^{*} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{2s} \left[\sum_{r=0}^{\left[\frac{2s-k}{2}\right]} C_{2n+k-3}^{k} \cos (2s - k - 2r) t \right] T_n^{*}(t) f(t) \, dt$$

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b_{n+2s+1}^{*} = \alpha_{2b+1} + C_{2n-2}^{1} \alpha_{2s} + \ldots + C_{2n+2s-2}^{2s+1} \frac{\alpha_0}{2} +$$

$$+ \alpha_{2s-1} + C_{2n-2}^{1} \alpha_{2s-2} + \ldots + C_{2n+2s-4}^{2s-1} \frac{\alpha_0}{2} +$$

. . . . . .

$$+ \alpha_1 + C_{2n-2}^{1} \frac{\alpha_0}{2},$$

donc

$$\frac{(-1)^{n+1}}{B} b^*_{n+2s+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=0}^{2s+1} \sum_{r=0}^{\left[\frac{2s+1-k}{2}\right]} C^k_{2n+k-3} \cos (2s+1-k- \right.$$

$$\left. -2r)\, t \right] T^*_n(t) f(t)\, dt$$

mais ([1], pag. 140).

$$\sum_{k=0}^{2s} \sum_{r=0}^{\left[\frac{2s-k}{2}\right]} C^k_{2n+k-3} \cos (2s+1-k-2r)\, t =$$

$$= 1 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha-1} \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \left(C^{\alpha+1}_{2n-\alpha-1} + C^{\alpha+2}_{2n-\alpha} + \ldots + C^{2s+\alpha}_{2n+2s-\alpha-2}\right) \frac{1}{\sin^{2\alpha-2} \frac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \frac{1}{\sin^{2n-2} \frac{t}{2}} (\cos (n+1)\, t + \cos (n+3)\, t + \ldots + \cos (n+2s-1)\, t)$$

et en remplaçant $T^*_n(t)$ par

$$T^*_n(t) = A^{**} \sin t \sin^{2n-2} \frac{t}{2}, \quad A^{**} = -\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!}$$

on déduit que

$$b^*_{n+2s} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\, 2^{2n-2}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}_{n,\,2s}(t) f(t)\, dt, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

où $\mathfrak{B}_{n,\,2s}$ est le polynôme trigonométrique

$$\mathfrak{B}_{n,\,2s}(t) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha-1}\, 2^{2n-2\alpha} \left(C^{2s+\alpha+1}_{2n+2s-\alpha-1} - C^{\alpha+1}_{2n-\alpha-1}\right) \sin^{2n-2\alpha} \frac{t}{2} \sin t +$$

$$+ (-1)^{n-1} [\sin (n+2s)\, t - \sin nt] + 2^{2n-2} \sin t \sin^{2n-2} \frac{t}{2} \tag{2.10}$$

de la même manière on obtient

$$\sum_{k=0}^{2s+1} \sum_{r=0}^{\left[\frac{2s+1-k}{2}\right]} C^k_{2n+k-3} \cos (2s-k-2r+1)\, t =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n-1} (-1)^{\alpha-1} \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \left(C^{\alpha}_{2n-\alpha-2} + C^{\alpha+1}_{2n-\alpha-1} + \ldots + C^{2s+\alpha+1}_{2n+2s-\alpha-1}\right) \frac{1}{\sin^{2\alpha} \frac{t}{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} [\cos nt + \cos (n+2)\, t + \ldots + \cos (n+2s)\, t]$$

et en remplaçant $T_n^*(t)$ par son expression on a

$$b_{n+2s+1}^* = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi 2^{2n-2}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}_{n,\,2s+1}(t) f(t)\, dt, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

où $\mathfrak{B}_{n,\,2s+1}$ est le polynôme trigonométrique

$$\mathfrak{B}_{n,\,2s+1}^{(t)} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} 2^{2n-2\alpha} \left(C_{2n+2s-\alpha}^{2s+\alpha+2} - C_{2n-\alpha-2}^{\alpha}\right) \sin^{2n-2\alpha-2}\frac{t}{2} \sin t + \tag{2.12}$$

$$+ (-1)^{n-1} [\sin(n+2s+1)\, t - \sin(n-1)\, t]$$

2.3. Utilisant (2.4'), (2.6) et (2.7) on a

$$\frac{(-1)^n}{B} a_{n+2s}^* = \beta_{2s} + C_{2n-1}^1 \beta_{2s-1} + \ldots + C_{2n+2s-4}^{2s-1} \beta_1 +$$

$$+ \beta_{2s-2} + C_{2n-1}^1 \beta_{2s-3} + \ldots + C_{2n+2s-6}^{2s-3} \beta_1 +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \beta_2 + C_{2n-1}^1 \beta_1$$

donc

$$\frac{(-1)^n}{B} a_{n+2s}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{h=0}^{2s} \sum_{r=0}^{\left[\frac{2s-h}{2}\right]} C_{2n+h-3}^{h} \sin(2s-h-2r)\, t \right] T_n^*(t) f(t)\, dt$$

et

$$\frac{(-1)^n}{B} a_{n+2s+1}^* = \beta_{2s+1} + C_{2n-2}^1 \beta_{2s} + \ldots + C_{2n+2s-3}^{2s} \beta_1 +$$

$$+ \beta_{2s-1} + C_{2n-2}^1 \beta_{2s-2} + \ldots + C_{2n+2s-5}^{2s-2} \beta_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \beta_1$$

donc

$$\frac{(-1)^n}{B} a_{n+2s+1}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{h=0}^{2s+1} \sum_{r=0}^{\left[\frac{2s+1-h}{2}\right]} C_{2n+h-3}^{h} \sin(2s+1-h-2r) \right] T_n^*(t) f(t) dt$$

mais

$$T_n^*(t) = A^{**} \sin t \sin^{2n-2}\frac{t}{2}, \quad A^{**} = -\frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!}$$

d'où on obtient

$$a_{n+2s}^* = \frac{(-1)^n}{\pi 2^{2n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_{n,\,2s}(t) f(t)\, dt, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

$$a_{n+2s-1}^* = \frac{(-1)^n}{\pi 2^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{A}_{n,\,2s+1}(t) f(t)\, dt, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

$\mathcal{A}_{n,2s}$, $\mathcal{A}_{n,2s+1}$ étant les polynômes trigonométriques ([1], pag. 140).

$$\mathcal{A}_{n,2s}(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{\alpha} \left(\sum_{h=1}^{s} C_{2n+2h-\alpha-3}^{2n-2\alpha-3} \right) 2^{2n-2\alpha} \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \sin^{2n-2\alpha-2} \frac{t}{2} + \tag{2.15}$$

$$+ (-1)^n [\cos(n+2s)t - \cos nt], \quad s = 1, 2, 3, \ldots$$

et

$$\mathcal{A}_{n,2s+1}(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^{\alpha} \left(\sum_{h=0}^{s} C_{2n+2h-\alpha-2}^{2n-2\alpha-3} \right) 2^{2n-2\alpha} \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \sin^{2n-2\alpha-2} \frac{t}{2} + \tag{2.16}$$

$$+ (-1)^n [\cos(n+2s+1)t - \cos(n-1)t], \quad s = 0\ 1, 2, \ldots$$

Théorème 2.3.1. Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ en dehors d'un ensemble $\mathfrak{M}$ de mesure nulle, non intégrable sur $[-\pi, \pi]$, telle que la fonction

$$x^{2n-1} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M},$$

soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$.

La série de Fourier associée à la fonction $f(x)$ est donnée par

$$S^*(x) + \lambda_0 S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \ldots + \lambda_n S_n(x) +$$

$$+ \mu_1 \widetilde{S}_1(x) + \mu_2 \widetilde{S}_2(x) + \ldots \mu_{n-1} \widetilde{S}_{n-1}(x)$$

où $S^*(x)$ est la série trigonométrique

$$\frac{a_0^*}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_p^* \cos px + b_p^* \sin px)$$

avec a_p^*, b_p^* données par (2.9), (2.11), (2.13) et (2.14) et où $S_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\widetilde{S}_k(x)$, $k = 1, ,2, \ldots, n-1$ sont $2n$ séries trigonométriques indépendantes de $f(x)$, définies par (2.5, (2.6) et (2.7), λ_i, μ_j étant $2n$ nombres arbitraires.

2.4. La série $\widetilde{S}_k(x)$ est

$$\sin kx + \gamma_0 \sin nx + \gamma_1 \sin(n+1)x + \ldots + \gamma_s \sin(n+s)x + \ldots$$

où γ_s est le polynôme $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)$

$$\widetilde{P}_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+s+k-1} \sum_{h=0}^{s} (-1)^h C_{2n+h-3}^{h} \left(C_{2n=2}^{n+s-k-h} - C_{2n-2}^{n+h-k-s-2} \right)$$

Lemme 2.4.1. Le polynôme $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)$ est de degré $2n-3$ en $n+s$.

Démonstration. Pour $s + n > 1$ le polynôme peut être écrit

$$\widetilde{P}_{n,k}(n+s) = (-1)^{n+k-1} \left(C_{2n+s-3}^{2n-3} C_{2n-2}^{n-k} - C_{2n+s-4}^{2n-3} C_{2n-2}^{n-k+1} + \ldots \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^{n+k} C_{n+s-k-1}^{2n-3} C_{2n-2}^{2n-2} \right) +$$

$$+ (-1)^{n+k} \left(C_{2n+s-3}^{2n-3} C_{2n-2}^{n-k-2} - C_{2n+s-4}^{2n-3} C_{2n-2}^{n-k-3} + \ldots \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^{n+k} C_{n+s+k-1}^{2n-3} C_{2n-2}^{0} \right)$$

d'où l'on voit que le dégré de $\widetilde{P}$ est $2n-3$ et les coefficients de $(n+s)^s$ sont indépendants de s.

Lemme 2.4.2. L'équation $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)=0$ admet les zéros $s+n=0$, $s+n=1,\ldots, s+n=k-1, s+n=h+1,\ldots, s+n=n-1$ et on a $\widetilde{P}_{n,k}(k)=+1$.

Démonstration. Pour $s+n=0$, par exemple, on a

$$\widetilde{P}_{n,k}(0)=C^0_{2n-2}C^k_{2n+k-3}-C^1_{2n-2}C^{k-1}_{2n+k-4}+\ldots+(-1)^k C^k_{2n-2}C^0_{2n-3}$$

et conformément à la relation (1.8'), $\widetilde{P}_{n,k}(0)=0$. Pour $n+s=k$ on a

$$\widetilde{P}_{n,k}(k)=\frac{(2n-3)!}{(2n-3)!}=+1.$$

Lemme 2.4.3. Le polynôme $\widetilde{P}_{n,k}(n+s)$ est impair.

Démonstration. On vérifie aisement que le polynôme a également les zéros $s+n=-1$, $s+n=-2,\ldots,s+n=-k+1$, $s+n=-k-1,\ldots,s+n=-n+1$ et que $P_{n,k}(-k)=-1$, donc $P_{n,k}$ este impair.

Ces lemmes montrent que le coefficient de b_k a la forme

$$\gamma_1(\sin x+2\sin 2x+\ldots+m\sin mx+\ldots)+$$
$$+\gamma_3(1^3\sin x+2^3\sin 2x+\ldots+m^3\sin mx+\ldots)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\gamma_{2n-3}(1^{2n-3}\sin x+2^{2n-3}\sin 2x+\ldots+m^{2n-3}\sin mx+\ldots)$$

donc on a le théorème suivant

Théorème 2.4.1. Les série $\widetilde{S}_k(x)$, $k=1,\ldots, n-1$ sont sommables $(C, 2n-1)$ vers zéro sur $[\pi, \pi]$

2.5. Pour $n=2$ le coefficient de b_1 est

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+m\sin mx+\ldots$$

Pour $n=3$ les coefficients de b_1 et b_2 sont

$$\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}(4m-m^3)\sin mx,$$

et

$$\frac{1}{6}\sum_{m=1}^{\infty}(m^3-m)\sin mx$$

2.6. La série $S_k(x)$ est

$$\cos kx+\gamma_1\cos(n+1)x+\gamma_2\cos(n+2)x+\ldots+\gamma_p\cos(n+p)x+\ldots$$

où γ_p est le polynôme

$$Q_{n,k}(n+p)=(-1)^{n+k}\sum_{h=0}^{p-1}(-1)^h\left(C^{n-k+h+1}_{2n-2}-C^{n-k+h-1}_{2n-2}-C^{n-k-h-1}_{2n-2}+\right.$$
$$\left.+C^{n-k-h-3}_{2n-2}\right)\times\left(C^{2n-3}_{2n+p-h-4}+C^{2n-3}_{2n+p-h-6}+\ldots\right.$$
$$\left.+\ldots+\begin{cases}C^{2n-3}_{2n-2}, \text{ pour } p-h, \text{ pair}\\ C^{2n-3}_{2n-3}, \text{ pour } p-h, \text{ impair}\end{cases}\right)$$

pour $k=0$, l'expression de $Q_{n,0}$, se multiplie par $\frac{1}{2}$.

On peut démontrer sans difficulté les lemmes suivants.

Lemme 2.6.1. Le polynôme $Q_{n,k}$ est de degré $2n-2$, au plus, en $n+p$.

Lemme 2.6.2. Le polynôme $Q_{n,k}$ est pair en $n+p$, et les coefficients de $(n+p)^{\alpha}$ ne dépendent pas de p.

Lemme 2.6.3. L'équation $Q_{n,k}(n+p)=0$, pour $n+p$ impair, admet les zéros $n+p=-1$, $n+p=+1$, $n+p=-3$, $n+p=+3,\ldots, n+p=n$ ou $n+p=n-1$ (suivant que n est impair ou pair). Si k est impair $Q_{n,k}(k)=+1$,

Lemme 2.6.4. L'équation $Q_{n,k}(n+p)=0$, pour $n+p$ pair, admet les zéros, $n+p=-2$, $n+p=+2,\ldots, n+p=n$ ou $n+p=n-1$ (suivant que n est pair ou impair). Si k est pair $Q_{n,k}(k)=+1$.

Ces lemmes montrent que le coefficient de a_k a la forme

$$\eta_0\left(\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2mx+\ldots\right)+$$

$$+\gamma_0(\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2m+1)x+\ldots)+$$

$$+\eta_2(2^2\cos 2x+4^2\cos 4x+\ldots+(2m)^2\cos 2mx+\ldots)+$$

$$+\gamma_2(1^2\cos x+3^2\cos 3x+\ldots+(2m+1)^2\cos(2m+1)x+\ldots)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\eta_{2n-2}(2^{2n-2}\cos 2x+4^{2n-2}\cos 4x+\ldots+(2m)^{2n-2}\cos 2mx+\ldots.)+$$

$$+\gamma_{2n-2}(1^{2n-2}\cos x+3^{2n-2}\cos 3x+\ldots+(2m+1)^{2n-2}\cos(2m+1)x+\ldots)$$

Mais les séries

$$\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2mx+\ldots$$

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2m+1)x+\ldots$$

sont sommables $(C,1)$ vers zéro sur $[-\pi,\pi]-\{0\}$, donc les séries

$$2^{2k}\cos 2x+4^{2k}\cos 4x+\ldots+(2m)^{2k}\cos 2mx+\ldots$$

$$1^{2k}\cos x+3^{2k}\cos 3x+\ldots+(2m+1)^{2k}\cos(2m+1)x+\ldots$$

sont sommables $(C,2k+1)$ vers zéro sur $[-\pi,\pi]-\{0\}$. On peut donc énoncer le théorème suivant

Théorème 2.6.1. Les séries $S_k(x)$, $k=0,1,\ldots,n$ sont sommables $(C,2n-1)$ vers zéro sur $[-\pi,\pi]-\{0\}$.

2.7. Pour $n=1$, les coefficients de a_0, a_1 sont [2] (pag. 1266).

$$\frac{1}{2}+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2mx+\ldots$$

et

$$\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2m+1)x+\ldots$$

Pour $n = 2$, les coefficients de a_0, a_1, a_2 sont

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}[(2m+2)^2 - 4]\cos(2m+2)x -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}[(2m+1)^2 - 1]\cos(2m+1)x,$$

et

$$\sum_{0}^{\infty}\cos(2m+1)x,$$

et

$$\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+2)^2\cos(2m+2)x + \frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}[(2m+1)^2 - 1]\cos(2m+1)x.$$

La chaire de mathématique
Institut polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Marcel N. Roşculeţ*, Recherches sur les séries trigonométriques. IV. Sur la série de Fourier attachée à une fonction non intégrable Revue Roumaine de math. pures et appl. Tome XI, Nr. 2, 1966.

[2] *Marcel N. Roşculeţ*, Cercetări asupra seriilor trigonometrice. V. Sumabilitatea seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile. Studii şi cercetări matematice, tom. 18, nr. 9, 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

CHIMIE

C. Z.: 66.028 : 546.72 : 541.132 : 546.16

DOZAREA URMELOR DE FIER ÎN PREZENȚA IONILOR DE FLUOR *

A. IANU, ILEANA NICULESCU, ANA MARIA LUPU

La uz. Superfosfat și Acid sulfuric de la Năvodari, ca produs secundar de valorificarea fluorului se obțin cantități însemnate de fluosilicat de sodiu. Acest produs este destinat în cea mai mare parte exportului. Cum însă cantitățile de compuși ai fierului în fluosilicatul de sodiu sînt nedorite (depreciind calitatea printr-o coloratie gălbuie ce se marchează în timp,) s-a ridicat problema posibilităților de îndepărtare a conținutului de fier și printr-o dozare cît mai precisă a lui. Este cunoscut că în prezența cantităților mari de ioni de fluor, fierul este complexat și în acest fel dozarea lui este îngreunată.

În lucrarea de față, la sugestia M.I.P.C. și la cererea Uz. Năvodari, s-a urmărit și s-au stabilit condițiile și metoda de dozare a unor cantități mici de fier în prezența ionilor de fluor. Dintre toate metodele indicate de literatură pentru dozarea fierului în prezența fluorului, singura posibilă ne pare metoda colorimetrică complexometrică. În acest scop am întreprins lucrări preliminare pentru dozarea fierului atît în materiile prime folosite la fabricarea fluosilicatului de sodiu (clorură de sodiu și acid fluosilicic) cît și în produsul finit.

Pentru dozarea urmelor de fier în prezența cantităților mari de fluor, după cum arată și indicațiile de literatură (1, 2, 3, 4, 7) s-a ales ca reactiv de complexare acidul sulfosalicilic. Fierul cu acidul sulfosalicilic în raportul 1 :1 formează trei complexi — la pH 1,5 violet, pH—5 roșu, la pH—8,2 galben (1, 2, 7, 8).

În prezența ionilor de fluor coloratia violetă din domeniul acid este distrusă și se obține complexul galben (8,10) la pH-uri acide la care interesează metoda în condițiile de lucru ale uzinei.

Culoarea galbenă este indicată la lucrările colorimetrice, datorită sensibilității maxime a ochiului pentru această culoare (1, 5, 7).

* Manuscris predat la redacție la 1 martie 1967

Dozarea cu acidul sulfosalicilic este posibilă deoarece constantele de instabilitate ale complecşilor Fe-F sînt mai mari decît ale complecşilor Fe-Sal. Astfel A. G. Riss (6) calculează pentru :

$$Fe\ F_5 — 4.10^{-1}$$
$$Fe\ F_4 — 10^{-2}$$
$$Fe\ F_3 — 8{,}7.10^{-3}$$
$$Fe\ F_2 — 0{,}4.10^{-4}$$
$$Fe\ F — 5.10^{-6}$$

iar pentru complecşii fierului cu acidul sulfosalicilic Vareille (8,11) şi Babko (7,8) găsesc valorile :

$$Fe\ (HO_3S—C_6H_3(O)—CO_2)^+ — 10^{-15{,}9}$$

$$Fe\ (HO_3S—C_6H_3(O)—CO_2)^-_2 — 10^{-10{,}5}$$

$$Fe\ (HO_3S—C_6H_3(O)—CO_2)^{-3}_3 — 10^{-8}$$

Ionul FeF_2^+ are tendinţa de a disocia uşor (5,8) din care cauză poate fi uşor colorimetrat în prezenţa acidului sulfosalicilic.

Urmărirea diferiţilor factori care influenţează dozarea colorimetrică a Fe^{3+} cu acidul sulfosalicilic în prezenţa florului provenit de la acidul hexa fluosilicic.

Complexul fierului cu acidul sulfosalicilic este în prezenţa ionilor fluor la pH-uri acide de culoare galbenă ; se lucrează cu filtru de culoare complimentară verde, pentru care extincţia este maximă. Valorile extincţiei pentru aceiaşi soluţie lucrînd cu diferite filtre sînt :

Raportul Fe/Sal/ 1/1	*E*
fără filtru	0,212
filtru verde	0,325
filtru albastru	0,195
filtru roşu	0,042

Deoarece în producţie raportul Fe^{3+} /F^{-1} variază între 1/600 şi 1/800, rapoartele Fe^{3+} /F^{-1} luate în lucru au fost variate între 1/200 la 1/2000.

În primul rînd s-a urmărit variaţia culorii fierului cu acidul sulfosalicilic fără ioni de fluor.

În tabela I, s-a urmărit variația culorii la mărirea concentrației în fier și menținerea constantă a raportului Fe/Sal. (fără prezența ionilor de fluor.).

Tabela nr. 1.

g Fe	E	E'
0,00932	0,151	0,146
0,02332	0,330	0,324
0,03031	0,432	0,425
0,03731	0,510	0,501

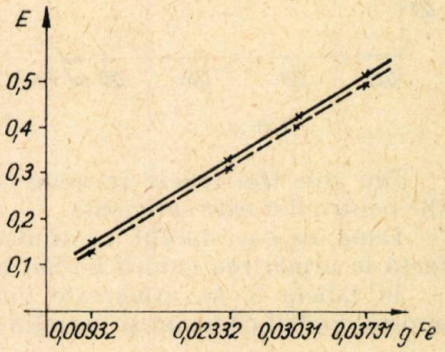


Fig. 1

În următoarele trei tabele s-a urmărit variația culorii fierului cu acidul sulfosalicilic la diferite rapoarte Fe/Sal. Concentrațiile în fier sînt diferite pentru cele trei tabele, din această cauză, nu s-a putut urmări variația culorii într-un singur tabel.

Tabela nr. 2.
(gFe = 0,04664)

Fe/Sal	E
1/0,01	0,021
1/0,02	0,028
1/0,1	0,051
1/0,2	0,482

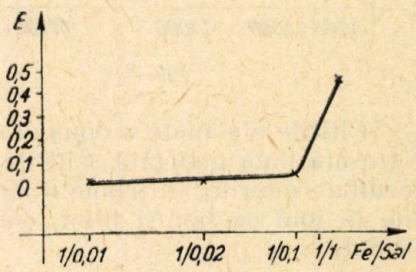


Fig. 2

Tabela nr. 3
(g Fe=0,01166)

Fe/Sal	E
1/1	0,020
1/2	0,150
1/5	0,151
1/10	0,152

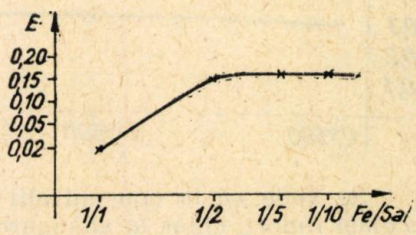


Fig. 3

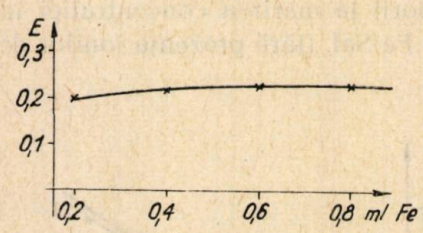


Fig. 4

Tabela nr. 4
(g Fe = 0,02332)

Fe/Sal	E
1/25	0,325
1/250	0,330
1/2500	0,318
1/7500	0,320

Din cele trei tabele se vede că o cantitate dublă de acid sulfosalicilic pentru fier este suficientă.

După ce s-a stabilit cantitatea necesară de acid sulfosalicilic s-a trecut la urmărirea culorii Fe/Sal în prezența ionilor de fluor.

În tabela 5, se urmărește variația culorii complexului menținînd raportul Fe/Sal constant și variația rapoartelor Fe/F deci și F/Sal variabil.

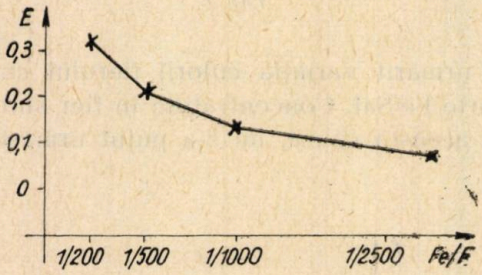


Fig. 5

Tabela nr. 5

Fe/F	E
1/200	0,328
1/500	0,205
1/1000	0,131
1/2000	0,075

Citirile efectuate a doua zi sînt date în tabela nr. 1 la E′ și în grafic e trasată linia punctată. Citirile din aceiași zi la ore diferite nu au dat rezultate diferite. În tabela 6 sînt date valorile pentru concentrații diferite în ioni de fier și fluor, dar raport Fe/F constant, variind raportul Fe/Sal.

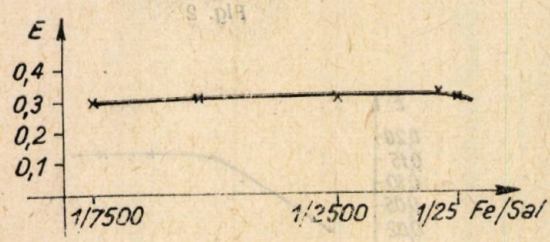


Tabela nr. 6

Fe/F	ml Fe/ml F	Fe/Sal	E
1/500	0,2/6	1/25	0,192
	0,4/12	1/12,5	0,222
	0,6/18	1/8,5	0,232
	0,8/24	1/6,5	0,232

Se vede că la concentrații diferite în ioni de fier și fluori dar la același raport, chiar la adăugarea de concentrații diferite de acid sulfosalicilic, culoarea se menține.

În tabela 7, sînt cuprinse datele la rapoarte variabile între fier și fluor, rapoarte variabile de Fe/Sal menținînd constant raportul Fe/Sal.

Tabela nr. 7

Fe/F	E
1/200	0,456
1/500	0,225
1/1000	0,132
1/2000	0,053

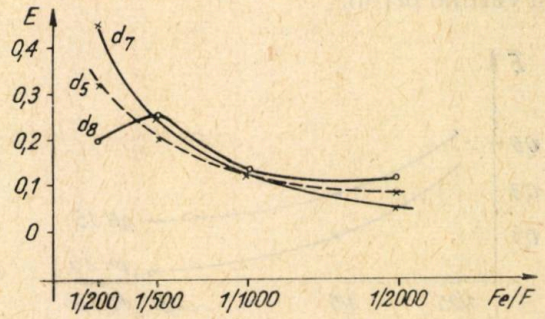


Fig. 7

În tabela 5, s-au urmărit aceleași rapoarte Fe/F, raportul F/Sal fiind însă variabil. Spre comparație, în diagrama de mai sus, punctat s-au trecut datele din tabela 5. În tabela VIII sînt date rezultatele atunci cînd s-au variat cele trei rapoarte Fe/F, Fe/Sal și F/Sal.

Tabela nr. 8

Fe/F	E
1/200	0,099
1/500	0,231
1/1000	0,138
1/2000	0,110

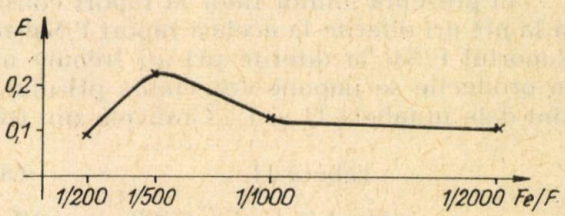


Fig. 8

Trasînd curba și pe diagrama nr. 7 pe curba d 7 se vede că între raportul 1/500 și 1/1500 valorile citite pentru E sînt relativ apropiate Între aceste limite, indiferent care din cele trei rapoarte se variază Fe/I Fe/Sal, F/Sal rezultatele sînt apropiate.

Variația raportului Fe/Sal menținut constant în funcție de temperatură este dat în tabela 9.

Tabela nr. 9

T°C	E
29	0,330
34	0,329
39	0,331
48	0,330
56	0,331
63	0,332
75	0,335

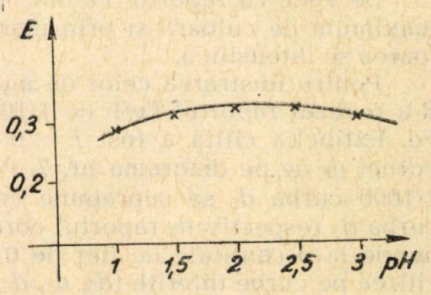


Fig. 9

Valorile fiind apropiate nu mai este necesară diagrama.

În tabela 10 se urmărește variația culorii la raport constant Fe/Sal și variind pH-ul.

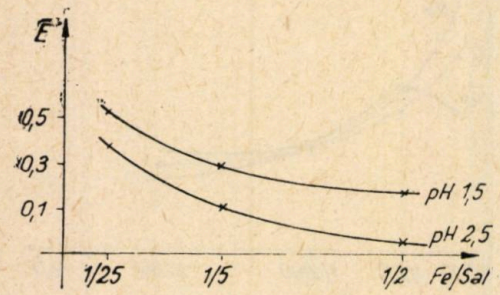


Fig. 10

Tabela nr. 10

pH	E
1	0,300
1,5	0,315
2	0,320
2,5	0,326
3	0,322

Sub pH — 0,5 soluția se decolorează, iar peste pH 5 trece în portocaliu. S-a variat pH-ul între 1 și 3 deoarece în producție pH-ul variază aproximativ între 1,5 și 2,5. Se vede din diagrama nr. 9 că la raportul, constant Fe/Sal culoarea nu este influențată de pH.

În prezența ionilor fluor la raport constant Fe/F dar diferit F/Sal ca și la pH-uri diferite la același raport F/Sal rezultatele sînt foarte diferite. Raportul F/Sal la diferite pH-uri trebuie urmărit și pentru determinări în producție se impune corectarea pH-ului. Rezultatele la pH 1,5 și 2,5 sînt date în tabela 11 și 12. Graficele sînt trasate pe diagrama nr. 10.

Tabela 11,
pH = 1,5; Fe/F = 1/500

Fe/Sal	E
1/2	0,049
1/5	0,112
1/25	0,395

Tabela 12,
Fe/F = 1/500, pH = 2,5

Fe/Sal	E
1/2	0,151
1/5	0,330
1/25	0,520

Se vede că raportul Fe/Sal de 1/2 nu este suficient pentru a asigura maximum de culoare și prin mărirea cantității de acid sulfosalicilic culoarea se intensifică.

Pentru ilustrarea celor de mai sus se ia următorul exemplu :
S-a realizat raportul Fe/F de 1/1000 și s-au luat în acest scop 0,000235 g Fe. Extincția citită a fost $E = 0{,}136$ iar datele corespund întru totul curbei d_8 de pe diagrama nr. 7. Pe aceiași diagramă, la raportul Fe/F de 1/1000 curba d_5 se suprapune cu d_7, deci se obțin aceleași valori. Pe curba d_7 respectiv d_5 raportul corespunzător este de 1/950 ceea ce corespunde la o cantitate de fier de 0,000223 g. Eroarea care ar proveni prin citirea pe curbe diferite (d_5, d_7, d_8, din diagrama nr. 7) ar fi de 5%, admisibilă în metodele calorimetrice.

Modul de lucru

S-au întreprins lucrări preliminare pentru dozarea fierului în materiile prime.

1. Fier în materiile prime :

NaCl

a) Partea solubilă 0,0010 g%
b) Partea insolubilă 0,0736 g%

H_2SiF_6 0,0550 g%

2. Fierul în produs finit

a) Fier în Na_2SiF_6 0,0330 g% — 0,0432 g% Fe_2O_3

Pentru punerea la punct a metodei de analiză s-au făcut soluții cu conținut de fluor și fier în proporții care să cuprindă cantitățile de fier găsite în practică.

S-au lucrat cu calorimetrul tip. Lange.

S-au pregătit probe de soluții în rapoartele specificate mai sus în așa fel ca raportul Fe/F găsit în producție să fie cuprins între aceste cifre. S-a lucrat cu soluții de acid hexafluosilicic 0,14 M cu care se lucrează și în producție și cu clorură ferică 0,07 M.

Metoda de dozare

Dozarea Fe^{3+}

Pentru control fierul s-a dozat și gravimetric ca Fe_2O_3 prin precipitare cu amoniac în prezența clorurii de amoniu.

Dozarea H_2SiF_6

Acidul hexafluosilicic s-a dozat cu hidroxid de sodiu în prezență de fenolftaleină pînă la slab roz.

Concluzii.

Se constată că între rapoartele date fiind rezultatele obținute cu acidul sulfosalicilic la dozarea colorimetrică a Fe^{3+} prin complexare, 1/500 și 1/1000, indiferent dacă se mențin rapoartele Fe/Sal, F/Sal, Fe/F constant, sau se variază, rezultatele sînt destul de apropiate (între aceste rapoarte sînt cuprinse și raportate 1/600-1/800, existente în producție.

Metoda poate fi folosită în bune condiții pentru determinarea urmelor de Fe^{3+} în prezența F^-.

Catedra de chimie anorganică
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Sandell E. B.* Colorimetri determination of traces of metals — pag. 524.
2. *Banks C. V., Patterson I. H.* I. Am. Chem. Soc. 73,3062—1951
3. *Kuznețov V. I.* Chem. Abtr. vol. 40,7053, 1946.
4. *Babko A. K.* Chem. Abstr. vol 40,7042, 1946.
5. *Babko A. K.* Analiza fizico-chimică a compușilor complexi în soluție.
6. *Riss I. G.*, Chimia fluorului și a compușilor săi anorganici pag. 591.
7. *Babko A. K.* Analiza colorimetrică.
8. *Pascal Paul.* Nouveau taite de Chimie minerale Tome XVI, Tome XVIII pag. 370.
9. *Schwauzenbach G.* Titrarea complexonometrică.
10. *Foley, Anderson.* J. Am, Soc. 70,1195, 1948.
11. *Vareille.* Bull. Soc. Chimie. 1493, 1496, 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

C. Z. : 66.028 : 547.415.1 : 545.81 : 547.513 : 547.288.15

METODE DE DOZARE A N-N'-TETRAMETIL HEXAMETILEN 1—6 DIAMINA *

GR. TEODORESCU, ILEANA NICULESCU

În nota de faţă s-a instituit metodă de dozare argentometrică şi metodă de dozare colorimetrică pentru N-N'tetrametil hexametilen 1-6 diamină.

NOTA I

Metoda argentometrică

Dozarea s-a făcut indirect cu azotat de argint, folosind ca reactiv de precipitare sarea lui Reinecke (tetratiocianato-diaminocromatul de amoniu $[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4$. Reacţia este următoarea :

$$(CH_3)_2\ddot{N}(CH_2)_6\ddot{N}(CH_3)_2 + {}_2[Cr(SCN)_4NH_3)_2]NH_4 + H_2SO_4 = (NH_4)_2SO_4 +$$
$$+ {}_2[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\underset{\substack{|\\(CH_3)_2}}{HN}(CH_2)_6\underset{\substack{|\\(CH_3)_2}}{NH}[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]$$

S-a obţinut o combinaţie complexă liliachie insolubilă în apă şi foarte solubilă în acetonă. După separarea şi solubilizarea complexului în acetonă se adaugă un exces de azotat de argint 0,1n, cînd are loc reacţia :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\underset{\substack{|\\(CH_3)_2}}{HN}(CH_2)_6\underset{\substack{|\\(CH_3)_2}}{NH}[Cr(SCN)_4(NH_3)_2] + {}_2AgNO_3 = {}_2HNO_3 +$$
$$+ {}_2[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]Ag + (CH_3)_2N(CH_2)_6N(CH_3)_2$$

Titrarea excesului de soluţie de azotat de argint cu soluţie 0,1n de tiocianat de amoniu în prezenţă de alaun feric ca indicator, se face după filtrarea precipitatului format.

---

* Manuscris predat la redacţie la 28 mai 1967

Mod de lucru

Se iau în pahare de 50 cc cu o microbiuretă, între 2→13 cc soluție conținînd 0,0400→0,2200 g, substanță se acidulează cu acid sulfuric și se adaugă prin agitare picătură cu picătură dintr-o soluție sare Reinecke 2% proaspăt preparată, astfel ca soluția de deasupra precipitatului să rămînă intens colorată. După precipitare completă se lasă să se depună precipitatul format și se filtrează apoi pe creuzet filtrant G_4. Se antrenează cantitativ precipitatul în creuzet, se spală cu 3→5 cc soluție Reinecke 1% de 3→4 ori și apoi de 2→3 ori cu 2→3 cc apă distilată.

Se dizolvă apoi precipitatul în acetonă direct pe creuzet filtrant prinzînd cantitativ filtratul în balon cotat de 100 cc după care se adaugă 10→20 cc azotat de argint 0,1n, cîteva picături de acid azotic și se aduce la semn cu apă distilată. Se filtrează pe filtru cantitativ uscat prinzînd filtratul în sticlă brună uscată din care se iau cote parte de cîte 10 cc în flacoane de titrare. Se adaugă soluției 2→3 picături de acid azotic, 1→2 cc alaun feric și se titrează cu soluție de tiocianat de amoniu cu factor cunoscut.

Din ecuație rezultă că diferența dintre numărul de cc de azotat de argint 0,1n adăugat în exces și numărul de cc de tiocianat de amoniu 0,1 n cu care s-a titrat, reprezintă numărul de cc de azotat de argint 0,1 n care s-a legat de substanță. Deoarece o moleculă de substanță leagă două molecule sare Reinecke 1 cc de azotat de argint 0,1 n corespunde la 0,01661/2 g de N-N'tetrametil hexametilen 1-6 diamină.

Rezultatele sînt concretizate în tabela nr. 1

Tabela nr. 1

cc. sol. analizat.	g subst. analiz.	cc $AgNO_3$ 0,1 n	cc NH_4SCN 0,1 n	g subst. doz.	g subst/cc	Diferența
2,50	0,0431	10,00	7,40	0,0431	0,0172	0,0000
3,75	0,0646	10,00	6,10	0,0647	0,0172	0,0001
5,00	0,0862	10,00	4,80	0,0863	0,0172	0,0001
6,25	0,1077	15,00	8,50	0,1079	0,0172	0,0002
7,50	0,1294	15,00	7,20	0,1295	0,0172	0,0001
8,75	0,1498	15,00	6,00	0,1494	0,0170	0,0004
10	0,1709	20,00	9,70	0,1709	0,0171	0,0000
11,25	0,1939	20,00	8,30	0,1942	0,0172	0,0003
12,50	0,2155	20,00	7,00	0,2158	0,0172	0,0003

Reactivi folosiţi :
Soluţie de N–N'– tetrametilhexametilen 1—6 diamină
Soluţie 2% sare Reinecke
Soluţie de spălare Reinecke 1%
Soluţie de azotat de argint 0,1 n
Soluţie de tiocianat de amoniu 0,1 n
Soluţie de alaun feric
Acid azotic diluat
Acid sulfuric diluat

NOTA II.

Metoda colorimetrică

Bazat pe faptul că produsul este foarte solubil în acetonă, s-a putut institui o metodă colorimetrică de dozare a acestei substanţe.

Mod de lucru

Se iau cu o microbiuretă probe de soluţie ce conţin 0,0400→0,2200 g substanţă, se diluează, se adaugă în picătură soluţie de sare Reinecke 2% pînă la completa precipitare. Se lasă precipitatul să se depună după care se filtrează imediat pe creuzet G_4. Se antrenează cantitativ precipitatul în creuzet, se spală de 3→4 ori cu 2→3 cc soluţie de reactiv 1% iar la sfîrşit de 2→3 ori cu 1→3 cc apă distilată. Se trage apoi bine la trompă, se şterge fundul creuzetului cu hîrtie de filtru, se dizolvă precipitatul direct pe creuzet cu acetonă prinzînd cantitativ soluţia în balon cotat de 100 cc şi se completează la semn cu apă distilată. Se colorimetrează apoi soluţia la fotocolorimetru tip B. Lange.

S-a lucrat prin metoda curbelor etalon. În acest scop s-a preparat soluţie de sare Reinecke care să aibă titru T=0,0320 g/cc, solventul folosit fiind acetona.

Din soluţie s-au luat cantităţi corespunzătoare cu o semimicrobiuretă şi s-au diluat cu acetonă în baloane cotate în aşa fel ca să se obţină soluţii de concentraţiile T = 0,00050 ; 0,00100 ; 0,00200 g/cc obţinînd extincţiile E = 0,038 ; 0,105 ; 0,145 După omogenizare s-a trecut la colorimetrarea soluţiilor şi s-a trasat curba. În aceiaşi zi s-au colorimetrat şi soluţiile de analizat, iar rezultatele obţinute sînt concretizate în tabela nr. 2.

Tabela nr. 2

Grame substanţă luată g/cc	Grame substanţă găsită g/cc	Eroare
0,000130	0,000128	—1,5%
0,000195	0,000199	+2,0%
0,000260	0,000256	—1,5%
0,000325	0,000330	+1,5%
0,000384	0,000392	+2,0%

Laboratorul de chimie anorganică şi analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Spacu, P., Teodorescu, Gr.* Metodă volumetrică de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului politehnic București, Tomul XVIII, fasc. 1/1956.

2. *Spacu, P., Teodorescu, Gr., Găvănescu, D.*, O nouă metodă volumetrică de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului politehnic București, Tomul XVIII fasc. 1/1956.

3. *Spacu, P., Teodorescu, Gr.*, O nouă metodă volumetrică de dozarea hidrazidei acidului izonicotinic. Revista de chimie nr. 1, 1967.

4. *Teodorescu Gr., Dinescu A.* Metodă colorimetrică pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului politechnic București Tomul XXVI fasc. 1/1964.

5. *Teodorescu Gr., Niculescu Il.* Metode pentru dozarea 2 — dietilamino 1 — cloretan. Buletinul Institutului politehnic Gheorghe Gheorghiu-Dej București Tomul XXIX fasc. 1/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

C. Z.: 548 : 66.065.58 : 546 : 661.18 : 541.182

ON THE THEORY OF THE EQUILIBRIUM OF SOLID-LIQUID HETEROGENOUS REACTIONS *

B. MELEGA, I. GH. CONSTATINESCU

The paper deals with the theoretical justification of a new experimental method used in checking Thomas-Kelvin relation for solids, a problem on which there is no agreement at present.

Let us consider the double exchange heterogenous reaction

$$AB_{(s)} + CD_{(aq)} \rightleftarrows AC_{(s)} + BD_{(aq)} \tag{1}$$

where **AB,AC** are slightly soluble solid compounds of the same cation **A.**

The reaction equilibrium is reached when

$$\sum \mu i = 0 \tag{2}$$

where μi is the chemical potentials of the compounds participating in the reaction.

As generally, bi vertue of the dependency of the activity coefficient on the concentration

$$\mu i = f\,(T, C_i)$$

the classical equilibrium constant **) in terms of concentration is :

$$K_c = \frac{[AC]\ [BD]}{[AB]\ [CD]} = f\,(T, C_i) \tag{3}$$

where C_i is the molar concentration of all participants in the reaction.

The value of K_c which varies with temperature and concentration is hard to be determined since the concentrations of the slightly soluble compounds $[AB]$ *and* $[AC]$ are very low. These concentrations are practically equal to the solubilities of these compounds $\int AB$, $\int AC$ hence,

$$K_c = \frac{\int AC \cdot [BD]}{\int AB \cdot [CD]} \tag{3'}$$

---

* Paper presented at the Third Republican Conference of Chemistry Timișoara 1966.

** Different form the thermodinamic constant as defined by the ratio

$$\Delta G = -RT\ ln\ K$$

To make it easier, the reaction equilibrium (1) is expressed by means of the ratio

$$\frac{[BD]}{[CD]} = \Re = f(T, C_i) \tag{4}$$

By comparing the relations (3') and (4) it may be seen that C_i in the relation (4) imcludes $\int AB$, $\int AC$ as well.

In general, $\int AB$ and $\int AC$ depend upon the constant T, superficial tension of the solution and size of solid particles.

According to Thomas-Kelvin equation in the total humectation of particle surface [1]

$$\frac{RT}{M} \ln \frac{\int^{(r)}}{\int^{(\infty)}} = \frac{2\sigma}{r \cdot \varrho} \tag{5}$$

where σ = superficial tension, erg/cm^2

M = molecular weight, g

r = equivalent ray of solid particles

ϱ = density

$\int^{(r)}$ $\int^{(\infty)}$ = solubilities for r ray particles and macrocrystals R and T keep their common meaning.

By means ot this equation a relation between the value of the equilibrium ratio and the magnitudes σ and r is obtained.

In case that the superficial tension is kept constant and the ray of the particle (considered at the first approximation to be spherical) is equal to r, it follows from the relation (5) for the difficultly soluble compounds AC and AB :

$$\int_{AC}^{(r)} = \int_{AC}^{(\infty)} \exp \left[\frac{^2M_{AC}}{RT} \frac{\sigma}{r_{AC}\, \varrho_{AC}} \right] \tag{6}$$

$$\int_{AB}^{(r)} = \int_{AB}^{(\infty)} \exp \left[\frac{^2M_{AB}}{RT} \frac{\sigma}{r_{AB}\, \varrho_{AB}} \right]$$

Replacing in the equilibrium constant expression (3') the expressions (4) and (6) and taking into account that $\frac{M}{\varrho} = V$ i.e. the molar volume of the compounds, one obtaintes :

$$\frac{\Re^{(r)}}{\Re^{(\infty)}} = \exp \left[-\frac{2\sigma}{KT} \left(\frac{\not\lambda AC}{r_{AC}} - \frac{\not\lambda AB}{r_{AB}} \right) \right] \tag{7}$$

or by logazithmation :

$$\ln \frac{\Re^{(r)}}{\Re^{(\infty)}} = \frac{2\sigma}{RT} \left(\frac{\not\lambda AB}{r_{AB}} - \frac{\not\lambda AC}{r_{AC}} \right) \tag{7'}$$

The magnitude r_{AB} and r_{AC} require critical examination. The „equivalent rays" or „effective rays" of the crystals are strictly speaking neither equal to the ray of the volume spheres equal to the crystals nor to those with equal lateral surface.

In deducting Kelvin's equation, the relation between the curvation ray of the particle surface ϱc and the equivalent ray r is given by the relation [1]: $r = 2\,\varrho c \cos\Theta$ where Θ is the surface humectation angle. For total humectation $\cos\Theta = 1$, $r = 2\,\varrho e$.

Taking into account the real shape of the crystals as well as the different reactivity of the crystalographic edges and sides, it is easy to understand that the identification of their shape to a sphere is not perfectly justified. In case that the transformation of r_{AB} sized crystals into r_{AC} ones takes place without the mechanical destruction of the crystal one can use the relation

$$r_{AC} = \frac{\nu AC}{\nu AB} r_{AB}$$

and the relations (7) and (7') become

$$\ln \frac{\mathcal{R}^{(r)}}{\mathcal{R}^{(\infty)}} = 0 \quad \mathcal{R}^{(r)} = \mathcal{R}^{(\infty)}$$

It is likely that in reality this fact occurs very rearely, particularly when shaking.

The values r_{AB}, r_{AC} are not characteristic to the initial size of the particles but to their size when approaching the equilibrium status. As a matter of fact, the relations (7) and (7') represent the relation of 4 variables. Since practically only one of them can be rigorously controlled (δ) the other three (r_{AB}, r_{AC}, $\mathcal{R}$) may have a very large number of values within which the relations (7) and (7') can be satisfied.

In case that the superficial properties of the solution change, it will follow from the equation (5) for the compound AC:

$$\frac{\int_{AC}^{(\delta_1)}}{\int_{AC}^{(\delta_2)}} = \exp\left[\frac{^2\nu AC}{RT_{r_{AC}}}(\sigma_1 - \sigma_2)\right] \tag{8}$$

or for the compound AB:

$$\frac{\int_{AB}^{(\delta_1)}}{\int_{AB}^{(\delta_2)}} = \exp\left[\frac{^2\nu AB}{RT_{r_{AB}}}(\sigma_1 - \sigma_2)\right] \tag{8'}$$

where the index in paranthesis stands for the value of the superficial tension in that given system.

By introducing these relation in (3') and relating the constants to the equilibrium for the two superficial tension values σ_1 and σ_2 one obtains :

$$\frac{\mathcal{R}^{(\sigma_2)}}{\mathcal{R}^{(\sigma_1)}} = \exp\left[\frac{2\Delta\sigma}{RT}\left(\frac{\forall AB}{r_{AB}} - \frac{\forall AC}{r_{AC}}\right)\right] \tag{9}$$

of after logarithmation

$$\ln\frac{\mathcal{R}^{(\sigma_2)}}{\mathcal{R}^{(\sigma_1)}} = \frac{2\Delta\sigma}{RT}\left(\frac{\forall AB}{r_{AB}} - \frac{\forall AC}{r_{AC}}\right) \tag{9'}$$

where $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ is the variation of the superficial tension in the two solutions in equilibrium with the crystals of the compounds *AB* and *AC*.

The magnitudes $\frac{\forall}{r}$ may be considered in all above relations as „the specific molar surface" of compounds *AB* and *AC*.

Thus, it appears that the equilibrium for the same chemical co-ordonate will be reached only in the case in which the specific molar surface is the same for either of the difficultly soluble compounds participating in the reaction.

The result is that from theoretical point of wiew the change of equilibrium in a homogenous reaction of the above mentioned type is made possible by changing the shape of the crystallin particles taking part in the reaction or by changing the superficial tension of the solution in equilibrium with those crystallin particles or better said, the conditions of the interface.

There are contradictory views as to the possibility of making use of Thomas-Kelvin relation (5) in calculating microcrystal solubility (2, 3, 4, 5, 6,) since the attempts made on experimental determination of different solubilities with various sized crystals have not led to realiable results. Furthermore, the recent data (4,5 6) have invalidated those obtained in the past (2,3)

Tht experimental control of the relations (7) and (9), beit under peculiar conditions, makes it possible to find out whether Thomas-Kelvin's relation may be used in microcrystal solubility and so to elucidate its validity in solids.

Laboratory of Anorganic Industries Tehnology
Politehnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Buckarest

LITERATURE

1. *Adamson A. W.* — Physical chemistry of surfaces, New York-N.Y, 1960
2. *Dundon, M. L.* e.a. — J. Am. Chem Soc. 45 ; 2479 (1923)
3. *Dundon, M. L.* — J. Am Chem. Soc. 45 ; 2659 (1923)
4. *Baralew, D.* — Kolloid, Z. ; 96 ; 19 (1941)
5. *Baralew, D.,* — Kolloid, Z ; 97 ; 300 (1942)
6. *Cohen, E.,* — Blekkingh J. J. ; J. Phys. Chem, 186 ; 257 (1940).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

NOTĂ

C. Z.: 667.6/.7 : 678.744 : 547.361

PELICULE EXFOLIABILE PE BAZA DE ALCOOL POLIVINILIC PENTRU PROTECȚIA SUPRAFEȚELOR FINISATE CU POLIESTERI *

I. CRISTEA, GH. IONIȚĂ, IULIANA LUPU

1. *Prezentarea problemei*

În procesul tehnologic a unor produse din întreprinderile de industrializare a lemnului, reperele finisate cu lacuri poliesterice trebuie acoperite cu o folie de protecție pentru a permite ulterior finisarea lor cu nitrolac. Deseori această folie nu corespunde procesului tehnologic, ea se desprinde de pe suprafețele lăcuite, fiind necesar aplicarea unui alt strat de protecție. Pentru a se remedia acest impediment s-a pus problema elaborării unei folii de protecție dintr-un material peliculogen cu o putere adezivă suficient de mare, rezistentă la nitrolac și solvenții acestuia. Pentru rezolvarea problemei în cadrul lucrării, colectivul de cercetare a luat în studiu posibilitatea folosirii alcoolului polivinilic obținut din acetat de polivinil și care poate să corespundă acestui scop.

2. *Alcoolul polivinilic ca substanță policulogenă.*

Alcoolul polivinilic este un polimer care nu se poate obține direct din monomerul lui, alcoolul vinilic fiind instabil. Esterii alcoolului vinilic, cum sînt formiatul, acetatul sau propionatul de vinil sînt stabili și pot fi polimerizați radicalic, formînd esterii respectivi ai alcoolului polivinilic. Alcoolul polivinilic este o substanță macromoleculară a cărei proprietăți depind atît de masă *moleculară* a acetatului de vinil din care s-a obținut cît și de *numărul de grupe esterice* rămase nesaponificate. Greutatea moleculară medie a alcoolului polivinilic se caracterizează în tehnică prin valoarea K după Fikentacher (1), sau prin indicarea vîscozității unei soluții apoase de 4/ (2). Conținutul în grupe esterice se indică în procente molare sau prin indicele de saponificare al substanței în mg KOH/g.

Alcoolul polivinilic se prezintă sub formă de praf alb pînă la slab gălbui. Proprietatea principală a alcoolului polivinilic (3) este solubili-

* Manuscris predat la redacție la 20 martie 1967.

tatea în apă și insolubilitatea în solvenți organici. Unele substanțe polihidroxilate cum sînt glicolul, glicerina ș.a. au un efect de umflare, fapt pentru care pot fi utilizați ca plastifianți.

Soluțiile apoase de alcool polivinilic se obțin prin introducerea alcoolului polivinilic praf în mod treptat în apă rece sub agitare și încălzire la 70—80°C pînă la dizolvarea completă. Se obțin soluții coloidale reversibile, care prin uscare nu suferă o modificare de stare ; fără separare în fază lichidă și solidă soluțiile devin din ce în ce mai vîscoase, pînă cînd la urmă formează o masă solidă. Aplicarea acestor soluții în straturi pe diverse suprafețe generează o peliculă.

Tabel

Proprietățile filmelor de alcool polivinilic cu 1—12% grupe acetil

Proprietățile peliculei	APV Vîscozitate		
	mică	medie	mare
Aspect	Film incolor, transparent, rezistent la lumină		
Indice de refracție 20°C	în funcție de conținutul în apă 1,50—153		
Rezistența la rupere în Kg f/cm² la 20°C			
— cu 2% apă	400—500	550—950	700—1200
— cu 10% apă	200—250	250—300	300—400
Alungire la rupere în % la 20°C			
— cu 2% apă	2	5—10	10—15
— cu 10% apă	100—200	150—200	250

Pentru aplicarea peliculelor de alcool polivinilic este importantă cunoașterea vîscozității soluțiilor în funcție de greutatea moleculară și de concentrația acestuia. În literatură se indică această variație pentru alcooli polivinilici cu 1—12% grupe acetil și grupe acetil și masă moleculară mică, medie și mare (2)

3. *Modul de preparare al soluției și caracteristicile acesteia.*

Într-o autoclavă prevăzută cu agitator și manta de încălzire-răcire s-a încărcat 700 l apă distilată și 90 Kg. alcool polivinilic cu valoare *K* minimum 70 și indicele de saponificare 50—80 mg KOH/g. Autoclava s-a încălzit prin admisia aburului în manta. Dizolvarea alcoolului polivinilic s-a făcut la temperatura de 65—75°C (măsurată în interior) și a durat aproximativ 8 ore. Conținutul autoclavei s-a răcit o durată de 2—4 ore prin introducerea apei de răcire în manta, la 30—40°C. S-a introdus un

amestec constituit din 158 l. apă distilată, 2 Kg glicerină și 62 l alcool etilic. Adăugarea s-a făcut încet pentru a se evita precipitarea produsului și a se omogeniza soluția (timp de o oră).

Produsul s-a descărcat în butoaie de polietilenă printr-un filtru de pîslă, avînd în final următoarele caracteristici :

— aspect : lichid limpede sau slab translucid fără părți nedizolvate ;
— vîscozitatea la 20°C ; 400—600 cP
— conținut în solide : minimum 8%
— produsul trebuie să ude perfect emailul poliesteric.

4. *Rezultatele încercărilor de laborator.*

S-a preparat și încercat în laborator soluții cu concentrații diferite de alcool polivinilic din producție indigenă plastifiate cu glicerină. În urma acestor încercări s-au obținut rezultatele cele mai bune cu o soluție în concentrație de cca. 9% cu un adaos de glicerină de 0,2% față de soluție sau cca. 2% față de polimer.

Graficul încercărilor de „adeziune al peliculei de A.P.V. (alcool polivinilic) la suport lac poliesteric (email) se arată în fig. 1. Încercarea s-a

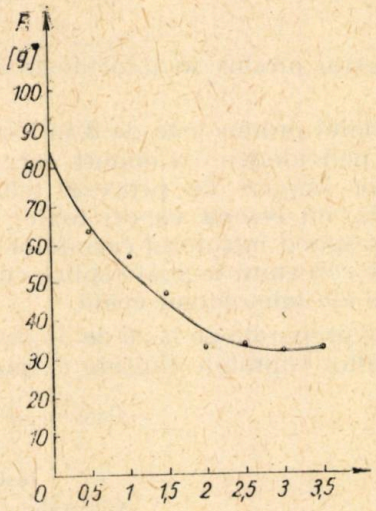


Fig. 1. Diagrama rezistenței la desprindere a peliculei exfoliabile.

făcut cu ajutorul unui dispozitiv de „Încercarea rezistenței (adeziunea) peliculei". Proba eprubetei peliculei a avut : lungimea 130 mm ; lățimea 30 mm ; grosimea 0,05 mm.

Pînă la 2‰ glicerină față de soluție în aceeași măsură a scăzut și adeziunea maximă față de suport. Pînă la 2‰ nu se poate exfolia, rezistența (adeziunea) este mare și pelicula se rupe la întindere foarte ușor Peste 2‰ cîștigă în elasticitate, scade rezistența la suport și se poate exfolia foarte ușor.

Rezultatele experimentale au arătat că aplicarea peliculei de protecție pe părțile produselor lemnoase finisate cu email poliesteric este perfect posibilă.

Pelicula este compactă, nu prezintă goluri și este rezistentă și elastică. Pe de altă parte aderența peliculei față de lacul poliesteric nu este prea mare, ceea ce îi conferă calitatea de a se desprinde ușor și în folie aproape completă la sfîrșitul operațiilor. Pelicula aplicată are aspect frumos, asemănător unei folii de celofan. Piesele trecute la operațiuni de tăiere, frezare etc., s-au comportat perfect fără cea mai mică urmă de desprindere. La pulverizare cu lac de nitroceluloză a subansamblurilor produselor lemnoase s-a demonstrat că pelicula este complet impermeabilă pentru acest lac, dovedind incompatibilitatea acestor pelicule (pelicula protectoare și pelicula de nitrolac) protejînd emailul poliesteric de nitrolac. Rezultatele experimentale au fost verificate pe fază industrială unde în cazul aplicării peliculei de protecție pe unele produse finite consumul de soluție a fost de cca. 75 g pentru un reper. Temperatura optimă în tunelul de uscare a fost de 80—90°C, iar timpul de parcurs a benzii transportoare 13—16 minute.

5. *Concluzii.*

Prin elaborarea acestui produs se înlocuiește cu succes un produs din import.

Prețul de cost al noului produs este de 8,44 lei/Kg față de 19,60 lei/Kg, cît costă materialul peliculogen din import, care pe de altă parte nici nu corespunde cerințelor impuse de procesul tehnologic. Noua peliculă nu este inflamabilă, nu emană vapori toxici, solventul fiind apa. Rezultatele obținute corespund întrutotul cerințelor industriale. Produsul preparat de colectivul de cercetare se poate aplica cu instalațiile existente fără modificări esențiale ale tehnologiei vechi.

Pelicula de protecție preparată pe bază de alcool polivinilic, se poate extinde și la protecția altor suprafețe finisate cu poliesteri.

Catedra de tehnologia substanțelor anorganice

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" București
Laboratorul Fabricii Chimice Rîșnov

BIBLIOGRAFIE

1 *Filcentscher H, Mark H.*, Kollvid Z. 49, 135 (1930)

2. *Mowiol.* Prospect al firmei Farbwerke Hoechst AG.

3 Ullmanns Encyklopädie der techninhen Chemie, ed. III, vol. 14, pag. 239.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

FIZICA

C. Z. : 549.3 : 546.221 : 541.451 : 535 : 547.55 : 537.7

CONTRIBUȚII LA STUDIUL FORMĂRII STRATURILOR SUBȚIRI DE SULFURĂ DE ARGINT *)

ARIANA ICHIMESCU, G. TEODORESCU

Introducere

Formarea straturilor subțiri metalice și semiconductoare este o problemă extrem de complexă. Ea a fost studiată în amănunțime în ultimii 15 ani și rezultatul general la care au ajuns toți cercetătorii este faptul că structura și proprietățile lor ca și reproductibilitatea rezultatelor obținute depind în mod esențial de mai mulți factori printre care citățm :

— viteza de evaporare
— presiunea gazelor reziduale din incintă
— tratamentul termic al suportului înainte și în timpul depunerii
— tratamentul termic al stratului după depunere
— grosimea stratului.

Toți acești factori acționează într-un fel sau în altul asupra structurii, astfel că pentru obținerea unor straturi subțiri pe care să se poată face determinări optice sau electrice concludente, trebuie să se țină seama de condițiile în care s-au format.

La straturile subțiri semiconductoare, printre care ne interesează în special sulfurile și oxizii, formați prin acțiunea fazei gasoase asupra depunerii metalice, pe lîngă condițiile de mai sus, structura mai depinde și de :

— starea în care se găsește suprafața stratului metalic
— presiunea gazului folosit
— temperatura la care are loc reacția.

În ultimii ani, studiul a fost extins în special asupra formării straturilor epitaxiale care ridică o serie de probleme foarte interesante. Datorită gradului mare de perfecțiune strucurală stratele epitaxiale se apropie mult de stratul ideal folosit de fizicienii teoreticieni. Avantajul acestor straturi constă în faptul că proprietățile lor optice, depind mai puțin de structură decît straturile policristaline, iar în ceea ce privește pro-

*) Lucrare comunicată la sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București 27—29 mai 1966.

prietățile electrice, acestea pot fi studiate după direcții specifice, obținîndu-se rezultate deosebit de interesante. Perfecționarea metodei microscopiei electronice, mărirea puterii de rezoluție, a permis observarea detaliilor foarte fine ale straturilor epitaxiale. S-a constatat că în formarea acestor straturi un rol esențial îl joacă germenii de nucleație pe care se face creșterea epitaxială. Abia la o grosime mai mare de 500 Å și chiar mai mult stratul poate fi considerat continuu. Cercetările efectuate pe oxizi, sulfuri și halogenuri metalice duc la concluzia că formarea acestor straturi prin nucleație și creșterea nucleilor inițiali, este un fenomen general. În formarea germenilor de nucleație un rol foarte important revine defectelor structurale și imperfecțiunilor suprafeței suportului.

Lucrarea de față constituie o primă etapă în studiul proprietăților straturilor subțiri de sulfură de argint și anume este vorba de un studiu asupra condițiilor de formare a straturilor mono și policristaline de Ag_2S; grosimea stratului inițial de Ag este de aproximativ 500 Å. Pentru identificarea structurii probelor am folosit metoda difracției electronice prin transmisie.

Date existente în literatură

În mod natural sulfura de argint se prezintă sub forma β—Ag_2S numită acanthită. La 179°C are loc o transformare destul de bruscă a formei cristalografice și a proprietăților substanței, faza superioară α—Ag_2S fiind cunoscută sub denumirea de argentită.

Forma α—Ag_2S a fost studiată de Rahles (1) pe pulbere presată și încălzită la 250°C. El găsește o structură cubică cu volum centrat cu parametrul de rețea $a = 4{,}88$ Å, valoare confirmată și de alți autori.

În ceea ce privește structura fazei de temperatură joasă β—Ag_2S problema e puțin cam neclară. Plecînd de la datele lui Palacios și Salvia (2) obținute prin difracție de raze X, o serie de cercetători printre care Miwa și Watanabe (3), Boettcher (4), studiind structura straturilor subțiri de Ag_2S prin metoda difracției de electroni pun la baza structurii acanthitei o celulă elementară ortorombică, cu constantele de rețea $a = 4{,}77$ Å; $b = 6{,}92$ Å; $c = 6{,}88$ Å sau $c = 6{,}99$ Å. Există însă unele date care infirmă aceste rezultate : Ramsdell (5) a fost primul care a arătat că celula elementară a acanthitei ar aparține sistemului monoclinic. Frueh (6), studiind un cristal natural de acanthită tot prin difracție de raze X, găsește aceeași structură monoclinică și dă pentru celula elementară constantele $a = 4{,}23$ Å; $b = 6{,}91$ Å; $c = 7{,}87$ Å și $\beta = 99°35'$ care sînt folosite și în tabelele internaționale de raxe X. Mai recent, Schlötterer (7), studiind creșterea epitaxială a sulfurii de argint pe straturi subțiri de argint cu ajutorul microscopiei și difracției electronice, a confirmat faptul că celula elementară a acanthitei este monoclinică cu constantele rețelei date de Frueh (6).

Într-o lucrare anterioară (8) am observat că proprietățile optice și electrice depind de condițiile de formare ale straturilor. De aceea am căutat să facem un studiu sistematic al formării straturilor subțiri de

Ag_2S și să stabilim condițiile în care s-ar putea obține straturi reproductibile și cît mai perfecte ca structură, urmînd ca într-o a doua etapă să corelăm structura straturilor cu proprietățile optice și electrice.

Prepararea probelor

Studiul formării straturilor subțiri de sulfură de argint, cu luarea în considerare a tuturor factorilor care ar putea influența structura este practic imposibil. De aceea am ales următoarea cale : toate probele au fost obținute prin sulfurarea straturilor subțiri de argint obținute prin evaporare termică în vid. Ca suport am folosit lame de sticlă de miscroscop și plăcuțe de NaCl proaspăt clivate. Instalația și modul de preparare al probelor a fost descris în amănunțime în lucrarea (8). Evaporarea argintului s-a făcut în mod identic pentru toate probele sub o presiune reziduală de $2—3.10^{-5}$ mmHg, cu o viteză de evaporare de 7—10 Å/sec. În funcție de modul de sulfurare al straturilor de argint și de tratamentul termic aplicat am realizat următoarele probe :

1) Straturi sulfurate în atmosferă de hidrogen sulfurat la presiune atmosferică.

2) Straturi sulfurate în instalația de depunere, fără expunere la aer. prin evaporarea sulfului cristalin.

Rezultate obținute

Fig. 1 reprezintă imaginea obținută prin difracție de electroni pe un strat de sulfură de argint obținut prin sulfgurare în hidrogen sulfurat pe suport de NaCl. Se vede clar că stratul este texturat la temperatura me-

Fig. 1. — Difracție electronică pe un strat de Ag_2S pe suport de NaCl. Sulfurare în hidrogen sulfurat.

diului ambiant. În general însă straturile obținute prin sulfurare în hidrogen sulfurat la temperatura camerii și presiune atmosferică diferă ca structură de cele sulfurate în vid pe suport neîncălzit (plecînd de la evaporarea sulfului cristalin). Fig. 2 reprezintă un asemenea strat obținut în vid. În ambele cazuri argintul a fost depus pe suport de NaCl menținut

la temperatura camerei. Phillips (9) arată că asemenea cristale orientate apar pe straturi subțiri epitaxiale de argint chiar prin sulfurarea lentă a argintului în aer. În electronogramele noastre n-am putut identifica structura acestor straturi din cauza condițiilor tehnice în care s-a lucrat.

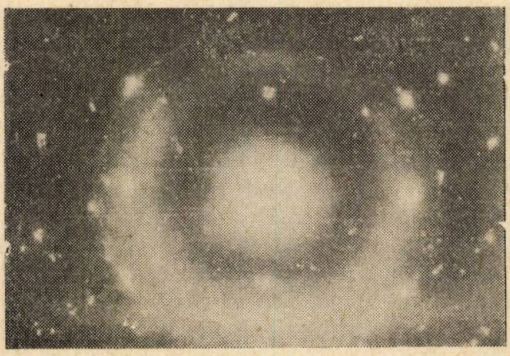


Fig. 2. — Difracție electronică pe un strat de Ag_2S pe suport de NaCl. Sulfurare în instalația de vid prin evaporarea sulfului cristalin.

Fig. 3 reprezintă stratul obținut în aer după încălzire la 260°C. Aici se vede că a avut loc o dezordonare a stratului și prin comparație cu alte figuri de difracție despre care va fi vorba în cele ce urmează, se poate

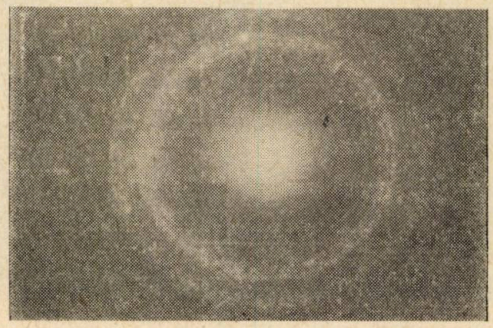


Fig. 3. — Stratul de Ag_2S din fig. 1. după încălzire la 260°C.

vorbi de o structură monoclinică. Sub forma aceasta însă, straturile sînt foarte nereproductibile, atît din cauza faptului că sulfurarea inițială se face doar superficial cît și din cauza difuziei ionilor de argint, ceea ce face ca proprietățile stratului să se modifice în timp.

În general, din cauza temperaturii diferite de evaporare și din cauza tensiunii de vapori extrem de diferite a sulfului (la 20°C, 10^{-4} mmHg) și a argintului, evaporarea termică în vid a compusului Ag_2S nu conduce la straturi de sulfură de argint bine formate. Mai întîi se evaporă sulful, la o temperatură mai joasă a evaporatorului care însă la temperatura obișnuită nu aderă bine de suport, și pe urmă începe evaporarea argintului. În realitate este vorba de o evaporare a argintului în vapori de sulf care nu formează straturi reproductibile. Procedeul cel mai folosit pentru obținerea straturilor de sulfuri metalice este sulfurarea straturilor metalice în vid, fără expunerea la aer, urmată de un tratament termic adecvat.

În experiențele noastre am evaporat mai întîi argint în condițiile standard indicate mai sus, după care am evaporat sulf dintr-un creuzet de cuarț. Cantitatea de sulf era aceiași în fiecare experiență iar presiunea sulfului din incintă în timpul evaporării nu depășea 10^{-4} mmHg. Stratul de sulfură de argint format este inițial amorf, dar în decurs de cîteva minute cristalizează și aderența față de suport devine mai mică. Sulfurarea nu se produce însă în toată grosimea stratului deși culoarea lui se schimbă. În timp ce la suprafață aspectul devine mat, pe partea dinspre suport păstrează luciul metalic. Dacă se încălzește suportul împreună cu depunerea timp de 15 minute la 150°C se obține un strat uniform și lucios, care aderă extrem de puternic de suport. Măsurătorile electrice pe straturi neîncălzite și încălzite arată că primele au o rezis-

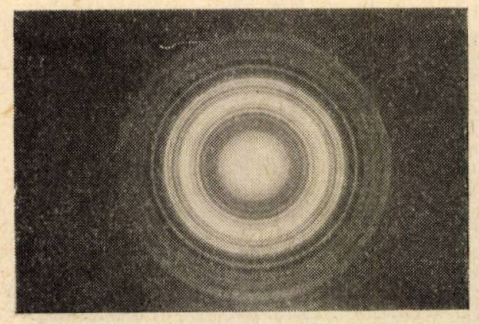


Fig. 4. — Difracție electronică pe un strat de Ag_2C pe suport de sticlă.

tență mult mai mică cu toată neomogenitatea aparentă a stratului ; probabil că la contactul cu suportul rămîne un strat metalic, cu bună conductibilitate electrică. Fig. 4 reprezintă o imagine de difracție de electroni pe un asemenea strat depus pe suport de sticlă. Pe această electronogramă se poate identifica cu mare precizie structura monoclinică a acanthitei, cu constantele rețelei date de Frueh (6) și de tabelele ASTM

de raze X. În tabelul de mai jos sînt date comparativ d_{hke} din tabele și cele obținute de noi :

Nr.	hkl	I/I 1	d_{hkl} din tabele.	d_{hkl} măsurat de noi	
1	111	60	3,080	3,06	
2	112	70	2,836	2,81	
3	$\bar{1}21$	100	2,606	2,59	cele mai
4	013	60	2,421	2,42	intense
5	031	45	2,213	2,21	
6	200	45	2,083	2,07	
7	123	20	1,963	1,96	
8	$\bar{2}13$	20	1,718	1,71	

Acestea sînt inelele cele mai intense. În afară de inelul 7 unde raportul de intensitate nu se potrivește cu cel din tabele, celelalte dau o concordanță satisfăcătoare. În ceea ce privește precizia măsurătorilor, Schlötterer (7) arată că erorile față de măsurătorile efectuate prin difracție de raze X sînt mai mici de $\pm$ 0,3%, iar erorile măsurătorilor noastre sînt de ordinul miimilor de angströmi astfel că rezultatele sînt în destul de bună concordanță. Straturile preparate în felul acesta sînt cele mai reproductibile cu condiția ca sulfurarea să se facă mereu la aceiași presiune, să se evapore aceiași cantitate de sulf și tratamentul termic să fie identic în toate cazurile.

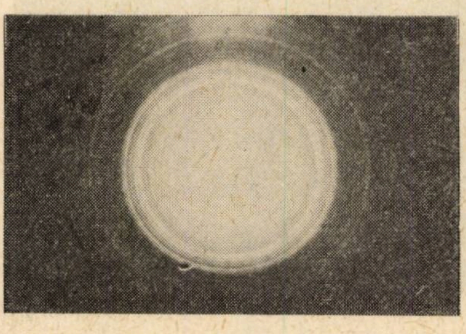


Fig. 5. — Stratul de Ag_2S din fig. 4 supus bombardamentului electronic în microscop

Dacă se bombardează stratul din fig. 4 timp mai îndelungat cu un fascicol electronic intens, structura lui se modifică foarte mult, după cum se vede în fig. 5. Această structură, care nu a fost identificată ar putea să reprezinte o formă de trecere de la celula elementară monoclinică la celula elementară cubică. Încălzirea stratului pînă la aprox. 178°C necesară acestei treceri s-a obținut probabil prin bombardament electronic.

Boettcher (4) menționează o structură tetragonală a formei de trecere căreia ar putea să-i corespundă această electronogramă.

Am urmărit formarea unui asemenea strat pe cale electrică măsurînd rezistența probei în diferitele etape ale formării. Pe un suport de sticlă curățit cu cea mai mare grijă am depus tot prin evaporare termică electrozi de aur, de care s-au fixat fire de cupru ce erau scoase din instalație și legate la bornele aparatului de măsură. S-a depus inițial un strat mai gros de argint de 1 000 Å, a cărui rezistență era de 2 ohmi. Am introdus în instalația de depunere creuzetul cu sulf și am început vidarea

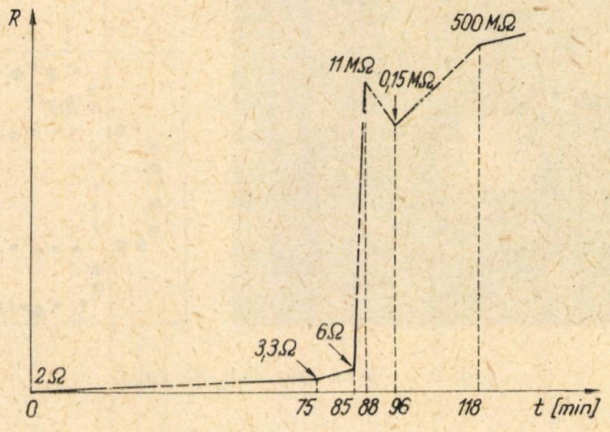


Fig. 6. — Variația rezistenței în timpul formării stratului de Ag_2S. Electrozi de aur.

instalației. În prezența sulfului rezistența stratului începe să crească foarte lent, de la 2 ohmi la 3,3 ohmi ceea ce se explică prin începerea sulfurării. Timp de 10 min. cît a durat evaporarea sulfului, rezistența stratului crește foarte încet pînă la 6 ohmi și abia în momentul încălzirii suportului la 160°C rezistența crește rapid la 11 MΩ. Variația rezistenței stratului în timpul evaporării sulfului este reprezentată în fig. 6. După atingerea rezistenței de 11 MΩ are loc o ușoară scădere a rezistenței, pînă la 0,15 MΩ apoi din nou o creștere lentă pînă la stabilirea rezistenței finale de ordinul zecilor sau sutelor de megohmi.

Această experiență completează în mod util studiul formării straturilor subțiri de sulfură de argint. Încălzirea suportului în special după depunere are un rol esențial. Inițial sulfurarea stratului se face numai superficial chiar dacă culoarea lui se schimbă. Scăderea rezistenței de la 11 MΩ la 0,15 MΩ se poate explica prin faptul că sulfura de argint odată formată în toată grosimea stratului prezintă, ca oricare semiconductor, o scădere a rezistenței cu creșterea temperaturii. Rezistența finală

a stratului depinde în general de distanța dintre electrozi și de felul cum se realizează contactele.

Pe suport de NaCl am obținut straturi epitaxiale de sulfură de argint. Ele au fost obținute prin evaporare simultană a argintului și sulfului pe suport încălzit la 350°C (8). Depunerile sînt monocristaline cu mai multe orientări posibile. Figura 7 arată una din orientări și anume orientarea (110), cristale a căror față a fost paralelă cu direcția (110) a rețelei argintului. Nu am găsit pe nici o probă cercetată cristale (100) ceea ce pare

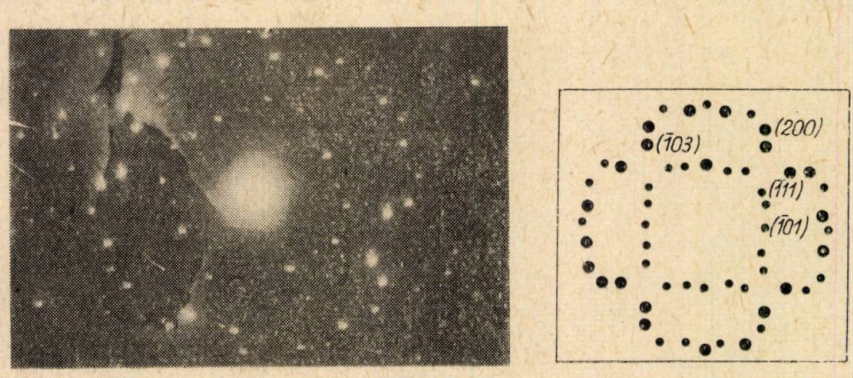


Fig. 7. — Strat epitaxial de Ag_2S.

să confirme afirmația lui Schlötterer (7), că aceste cristale apar pe strate epitaxiale de argint numai la temperatura camerii. Și pe această electronogramă se pot identifica planurile (1̄03) (200) (1̄11) (1̄01) corespunzătoare structurii monoclinice.

hkl	d_{hkl} măsurate	d_{hkl} din tabelă	I/I 1 tabele
1̄03	2,383	2,383	75
200	2,083	2,083	45
1̄11	3,451	3,437	35
1̄01	3,961	3,960	10

Dacă aceste straturi de sulfură de argint monocristaline rămîn pe suport un timp mai îndelungat, apare o dezorientare foarte pronunțată. Figura 8 reprezintă stratul epitaxial cu orientarea (110) după o perioadă de aprox. 5 luni, timp în care stratul pe suport a fost păstrat într-un exicator deschis periodic. Această dezorientare se datorește probabil

unei pelicule de apă adsorbită pe suport, care modifică structura lui cristalină.

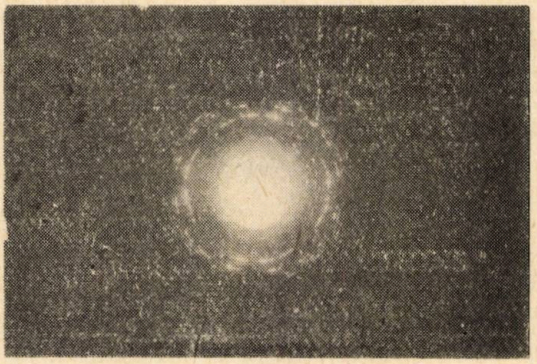


Fig. 8. — Stratul epitaxial de Ag_2S din fig. 7 după 5 luni.

În încheiere, aducem mulțumirile noastre tov. șef de lucrări, dr. Ion Teodorescu, pentru ajutorul dat în interpretarea electronogramelor.

Catedra de fizică I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Rahles, P.* Z. Physik. Chem. *B 31*, 157, 1936.
2. *Palacios, J., Salvia, R.* An. Soc. Esp. Fis. Quim. *29*, 269, 1931.
3. *Miwa, J., Watanabe, Y.* J. Phys. Soc. Japan. *3*, 52, 1948.
4. *Boettcher, A.* Ztschr. fur angew. Physik ; *7*, 478, 1955.
5. *Ramsdell, L. S.* The Amer. Mineral : *28*, 404, 1943.
6. *Frueh, A. J.* Zeitschr. fur Kristallographie *110*, 136, 1958.
7. *Schlöterer, H.* Phys. Status Solidi *11*, 219, 1965.
8. *Ichimescu A.* Rev. Roumaine de Phys. Bukarest : *10*, 985, 1965.
9. *Phillips, V. A.* J. Appl. Phys. : *33*, nr. 2, 712, 1962.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

MECANICĂ

C. Z. : 629.13 : 621—135 : 621—22

SCURGEREA SPAȚIALĂ PRIN REȚELELE DE PROFILE ALE TURBOMAȘINILOR *

CRĂCIUN GUȚĂ

Calculul paletajelor turbomașinilor moderne, care în general sînt de puteri mari, trebuie să ia în considerale alungirea paletelor, care schimbă condițiile de scurgere, parametri la periferie diferind esențial de cei de la raza medie. Astfel, datorită grosimii paletelor, a fenomenelor de frecare, care duc la formarea stratului limită atît la periferie, pe carcase, cît și pe palete, scurgerea nu mai este axial simetrică ci spațială (tridimensională), liniile de curent transformîndu-se din linii drepte în ondulatorii, avînd o rază de curbură finită [7].

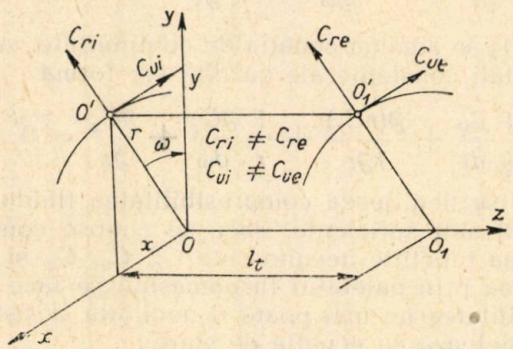


Fig. 1. Definirea coordonatelor cilindrice utilizate în studiul mișcării axial-simetrice în turbomașini.
C_{ri}, C_{ui} — Componentele radială și tangențială ale vitezii la intrarea în treaptă ;
C_{re}, C_{ue} — Idem la ieșirea din treaptă.

În cazul turbomașinilor mai frecvent se utilizează sistemul cilindric de coordonate (vezi fig. 1) unde s-au notat componentele vitezei curentului prin C_r, după direcția radială, C_u tangențială sau C_z axială. Afectînd aceiași indici și forțelor masice unitare obținem componentele f_r, f_u, f_z

* Manuscris predat la redacție la 30 martie 1967.

după cele trei axe. Cu acestea ecuațiile de mișcare în coordonate cilindrice se scriu :

$$\begin{aligned}
&\frac{dC_r}{dt} - \frac{C_u^2}{r} = f_r - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \\
&\frac{dC_u}{dt} + \frac{C_r C_u}{r} = f_u - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{r\partial u} \\
&\frac{dC_z}{dt} = f_z - \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1}$$

Derivatele substanțiale $\frac{dC_r}{dt}$, $\frac{dC_u}{dt}$, $\frac{dC_z}{dt}$ se pot scrie astfel :

$$\begin{aligned}
&\frac{dC_r}{dt} = \frac{\partial C_r}{\partial t} + C_r\frac{\partial C_r}{\partial r} + C_u\frac{\partial C_r}{r\partial\omega} + C_z\frac{\partial C_r}{\partial z} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\frac{dC_z}{dt} = \frac{\partial C_z}{\partial t} + C_r\frac{\partial C_z}{\partial r} + C_u\frac{\partial C_z}{r\partial\omega} + C_z\frac{\partial C_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2}$$

La ecuațiile (1) se adaugă ecuația de continuitate, care după cum se știe, pentru densități constante ale gazului are forma :

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt} + \frac{\partial(rC_r)}{r\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_z}{\partial\omega} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

În cazul cînd se neglijează compresibilitatea fluidului, (ϱ = const) ecuațiile (1) și (3) sînt suficiente, dacă se cunosc condițiile la limită, pentru a determina funcțiile necunoscute C_r, C_u, C_z și p.

Dacă scurgerea prin paletajul turbomașinii se face cu viteză mare, atunci compresibilitatea nu mai poate fi neglijată și sistemul de ecuații (1) și (3) se completează cu ecuația de stare :

$$\frac{p}{\varrho} = gRT \tag{4}$$

Deoarece prin ecuația (4) se introduce o altă funcție necunoscută (temperatura T) se completează sistemul, cu ecuația conservării energiei [2]

$$\text{div}\ (p\bar{c}) = \varrho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\varrho}\right) \text{ sau } C_pT + \frac{1}{2}C^2 = \text{const} \tag{5}$$

unde : $C^2 = C_r^2 + C_u^2 + C_z^2$ iar C_p, este căldura specifică la presiune constantă.

Pentru paletele cu dispunere radială, în cazul mișcării staționare, păstrînd încă proprietăți axial-simetrice, neglijînd schimbul de căldură și forțele masice în prima ecuație din (1). obținem :

$$C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} \tag{6}$$

Ecuația conservării energiei pentru un volum elementar ce se deplasează între secțiunile 0—0 și 1—1 este :

$$\frac{1}{A} C_p T_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\varrho_0} + \frac{C_0^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{C_1^2}{2} \tag{7}$$

Notînd prin r_b raza la butuc, prin r_e raza la periferie iar r fiind o rază curentă oarecare vom putea scrie ecuația de continuitate astfel :

$$G = 2 \pi g \int_{r_b}^{r} \varrho C_z r dr \tag{8}$$

Considerînd scurgerea adiabată, ecuația procesului se scrie :

$$\frac{p}{\varrho^k} = \frac{p_0}{\varrho_0^k} \tag{9}$$

În ecuațiile (6), (7), (8) și (9) funcțiile necunoscute sînt C_z, p, ϱ și C_r care se pot determina univoc prin rezolvarea ecuațiilor amintite.

1. *Profilarea în cazul cînd se cunoaște unghiul de incidență la intrarea în ajutaj*

În cazul cînd se dă viteza tangențială de intrare și ieșire a curentului și în funcție de aceasta se determină toți parametri necesari pentru profilare, rezultă paletaje greu de executat cu o tehnologie de ecuație com-

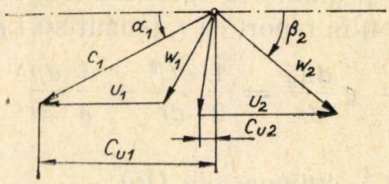


Fig. 2. — Triunghiul de viteze al unei trepte

plicată. Problema inversă, aceea de a se alege unghiul de intrare și ieșire prezintă interes, cunoscîndu-se în acest caz triunghiurile vitezelor (vezi fig. 3).

Din figură rezultă relațiile :

$$C_{u1} = C_{r1} \operatorname{ctg} \alpha_1 ; C_{u2} = u_2 - Cr_2 \operatorname{ctg} \beta_2 \tag{10}$$

Ecuația conservării energiei integrată se poate scrie în final sub forma :

$$h - h_m = \frac{C_r^2 - C_{rm}^2}{2} + \frac{C_u^2 - C_{um}^2}{2} - \sum_{i=1}^{3} F_i \tag{11}$$

$$\text{unde : } F_1 = -E\int_{rm}^{r} \frac{C_u^2}{r}\varphi \; ; \; F_2 = -E\int_{rm}^{r} \frac{C_r^2}{r_o}\cos\varphi \, dr \text{ și}$$

$$F_3 = E\int_{rm}^{r}\left(C_r \frac{\partial C_r}{\partial \tau}\sin\varphi - f_r\right) d_r \tag{12}$$

Revenind la ecuația (6) se observă că se obține în cazul scurgerii după suprafețe cilindrice ($Cr = 0$), ecuația :

$$\frac{C_u^2}{r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{13}$$

iar celelalte două ecuații din (1) devin identic nule (vezi relația (2)). În această formă, ecuația (13) se folosește pentru studierea mișcării în jocul dintre paletaje și ne indică unele procese ce au loc la scurgerea fluidelor prin paletaje. După cum rezultă din (30) forțele de inerție ce apar datorită variației componentei C_u se echilibrează de forțele provenite din presiunea hidrodinamică, care acționează în direcția radială. Presiunea va trebui să crească de la butuc spre periferie și conform formulei lui Bernoulli viteza va trebui să scadă.

Ecuația (13) nu este suficientă pentru determinarea parametrilor mișcării și se asociază cu ecuația energiei, care are forma :

$$-L_u = \frac{C^2 - C_0^2}{2g} + \int \frac{dp}{\gamma} + L_f \tag{14}$$

L_u este lucrul mecanic util pe care-l face paletajul ; L_f lucrul mecanic consumat prin frecări ; γ, greutatea specifică a agentului de lucru.

Derivînd ecuația (14) în raport cu r, (admițînd $L_f = \text{const.}$) obținem :

$$-g\frac{dL_u}{dr} = \frac{1}{2}\frac{dC^2}{dr} + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dr} \tag{15}$$

știind că $C^2 = C_u^2 + C_z^2$, obținem din (15).

$$\frac{1}{2}\frac{dC_z^2}{dr} + \frac{1}{2r^2}\frac{d(C_u \cdot r)^2}{dr} = -g\frac{dL_u}{dr} \tag{16}$$

$$\text{sau : } \frac{1}{2}\frac{dC_z^2}{dr} + \frac{1}{8\pi^2 r^2}\frac{d\Gamma^2}{dr} = -g\frac{dL_u}{dr} \tag{17}$$

Relațiile (14)—(17) sînt valabile atît pentru fluide compresibile cît și incompresibile.

Este interesant de determinat legea de profilare în cazul paletajelor conice, cînd diametrul exterior sau interior al părții de trecere crește succesiv. Este ușor în acest caz să se folosească sisteme intriseci de axe, ca în fig. 3, adică se raportează mișcarea la tangenta la liniile de curent și la normala pe acestea în punctul considerat.

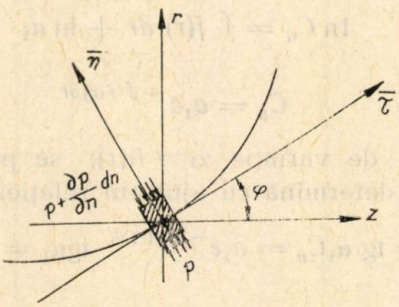


Fig. 3. — Sistem intrisec de axe pentru studiul mișcării în turbomașini

Proiectînd toate forțele după normala la traiectoria particulelor și considerînd că parametrii variază numai în raport cu această axă se deduce :

$$\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dn} = -\frac{C_m^2}{R_m} + \frac{C_u^2}{r}\cos\varphi_m \tag{18}$$

Folosind ecuația energiei (14) deducem :

$$\frac{1}{2}\frac{dC^2}{dn} + \frac{C_u^2}{r}\cos\varphi_m - \frac{C_m^2}{R_m} = -g\frac{dL_u}{dn} \tag{19}$$

Dacă avem o scurgere conică cu generatoare paralele, $r = n\cos\varphi_m$, $R_m = \infty$ (linii de curent rectilinii) și $\varphi_m = \text{const.}$, ecuația de mai sus, devine :

$$\frac{1}{2}\frac{dC^2}{dr} + \frac{C_u^2}{r} = -g\frac{dL_u}{dr} \tag{20}$$

adică este identică cu ecuația (15).

Considerînd lucrul mecanic util cedat de gaz ca independent de r se obține :

$$\frac{1}{2}\frac{dC^2}{dr} + \frac{C_u^2}{r} = 0 \tag{21}$$

în care înlocuind :

$$\frac{dC}{dr} = \frac{d\left(\frac{C_u}{\cos\alpha_1}\right)}{dr} = \frac{1}{\cos\alpha_1}\frac{dC_u}{dr} + C_u\frac{\sin\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dr}$$

și

$$-\frac{dC_u}{C_u} = -\left(\frac{\cos^2\alpha_1}{r} + \operatorname{tg}\alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dr}\right) dr = -f(r)dr \qquad (22)$$

Soluția ecuației diferențiale (22) este :

$$\ln C_u = \int f(r)\, dr + \ln a_1$$

sau

$$C_u = a_1 e^{-\int f(r)dr} \qquad (23)$$

Dîndu-ne legea de variație $\alpha_1 = f_1(r)$, se poate calcula $\int f(r)\, dr$. Constanta α_1 se determină cu ajutorul relației de debit :

$$C_z = \operatorname{tg}\alpha_1 C_u = a_1 e^{-\int f(r)\, dr} \operatorname{tg}\alpha_1 = a_1 f_2(r)$$

deci :

$G = \int_{rb}^{re} \gamma a_1 f_2(r)\, 2\pi\, r dr$ de unde, știind debitul G și $f_2(r)$ determinăm pe a_1

Ecuația (21) se poate rezolva și în raport cu C. Pentru aceasta o transcriem astfel :

$$\frac{1}{2}\frac{dC^2}{dr} + \frac{C^2\cos^2\alpha_1}{r} = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{dC}{C} = -\cos^2\alpha_1 \frac{dr}{r}, \text{ care integrată, ne dă :}$$

$$\ln C = -\int \frac{\cos^2\alpha_1}{r}\, dr + \ln a_2$$

a_2, fiind o constantă de integrare.

$$\text{Deci : } C = a_2 \exp\left[-\int \frac{\cos^2\alpha_1}{r}\, dr\right] \qquad (24)$$

Pentru cazul profilării după legea circulației constante notînd secțiunea din fața aparatului director din O, secțiunea din fața roții active prin „1" iar cea de ieșire din treapta considerată prin „2", avem :

$$C_{u1b}^2 - C_{u1e}^2 = (C_{1b}^2 - C_{z1b}^2) - (C_{1e}^2 - C_{z1e}^2)$$

Întrucît prin condițiile fixate $C_{z1b} = C_{z1e}$ și $C_{u1}r = C$ se obține ($C^2 = K$).

$$C_{1b}^2 - C_{1e}^2 = K\left(\frac{1}{r_b^2} - \frac{1}{r_e^2}\right) \qquad (25)$$

Din (25) se vede că viteza de scurgere din aparatul director scade spre periferie și odată cu aceasta trebuie să crească presiunea.

Este interesant să se determine căderea de entalpie în aparatul director. Pentru diametrul mediu se obține :

$$h_m = \frac{k}{k-1} ART_0 \left[1 - \left(\frac{p_{1m}}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = A \frac{C_m^2 - C_0^2}{2g}$$

iar pentru o rază oarecare va fi :

$$h = \frac{k}{k-1} ART_0 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] = A \frac{C_1^2 - C_0^2}{2g}$$

Scăzînd cele două relații obținem :

$$h_m - h = A \frac{C_m^2 - C_1^2}{2g} = \frac{A}{2g} K \left(\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r^2}\right) \tag{26}$$

sau

$$\frac{h}{h_m} = 1 - \cos^2 \alpha_{1m} \left(1 - \frac{r_m^2}{r^2}\right) \tag{27}$$

Din (27) se vede că variația relativă a căderii de entalpie în aparatul director nu depinde de mărimea absolută a acestei căderi. Presiunea fluidului în jocul axial din secțiunile alese se poate determina cu ajutorul diagramei T—S, pentru valorile determinate ale căderii de entalpie h.

Variația unghiului de intrare și ieșire din paletaj se poate deduce din relațiile.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{C_{z1}}{C_{u1}} \text{ însă } C_{u1} = C_{u1m} \frac{r_m}{r} = C_{u1m} \bar{r}_m$$

$$\text{iar } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{C_{z1}}{C_{u1m} \bar{r}_m} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1m}}{\bar{r}_m} \text{ sau } \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{r} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1m}}{r_m}$$

Odată cu creșterea lui α_1, crește și unghiul de ieșire β_1, conform relației :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{C_{z1}}{C_{u1} - u} = \frac{C_{z1}}{C_{u1m} \bar{r}_m - \frac{U_m}{\bar{r}_m}} \tag{28}$$

care ne dă :

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{r_m \sin \alpha_{1m}}{r_m \cos \alpha_{1m} - \frac{U_m}{C_{m1}} \frac{1}{\bar{r}_m}} \tag{29}$$

Pentru secțiunea de ieșire se poate scrie :

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{C_{z2}}{C_{u2} + u} = \frac{C_{z2}}{C_{uzm}\,\bar{r}_m + \dfrac{U_m}{\bar{r}_m}} \tag{30}$$

care după înlocuiri, devine :

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{r_m}{\bar{r}_m^2 \operatorname{cotg} \alpha_{2m} + \dfrac{u_m}{C_{1m}} (\sin \alpha_{1m})^{-1} \dfrac{C_{z1}}{C_{z2}}} \tag{31}$$

Unghiul β_2 se micșorează spre periferie.

În fig. 4 se arată schimbarea relativă a parametrilor în aparatul director. Toate mărimile sînt raportate la valorile aceloraşi parametri la raza medie.

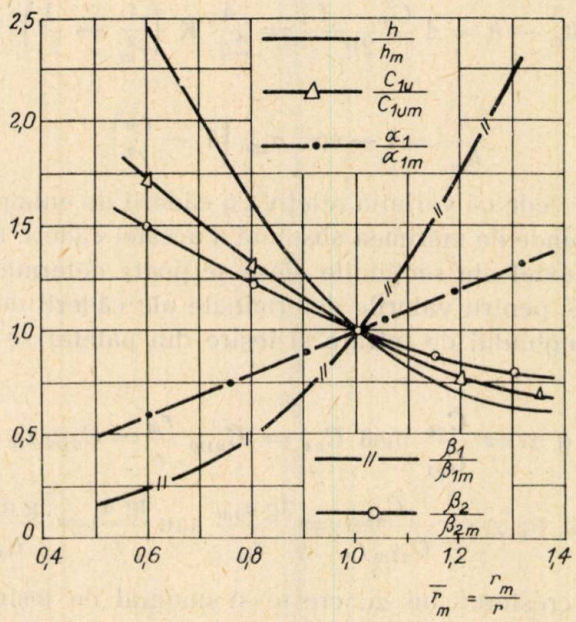


Fig. 4. — Variația parametrilor $\frac{h}{h_m}, \frac{C_{u1}}{C_{u1m}}, \frac{\alpha_1}{\alpha_{1m}}, \frac{\beta_1}{\beta_{1m}}, \frac{\beta_2}{\beta_{2m}}$ în funcție de raportul $\frac{r_m}{r} = \bar{r}_m$ pentru profilarea după lege $C_u r = \text{const}$.

În determinarea distribuției parametrilor în lungul razei, pînă acum nu s-a ținut seama de pierderile prin frecare, Acestea pot fi considerate folosind relațiile :

$$C_{u1}^2 = \xi^2 C_{1iz}^2 \cos^2 \alpha_1$$

și (32)

$$\varrho_{ad} = \varrho_{1z} \frac{T_{1iz}}{T_{ad}}$$

unde ξ este un coeficient de viteză ; C_{1iz}, ϱ_{1iz} viteza, respectiv densitatea gazului la sfîrșitul procesului izentropic iar ϱ_{ad}, T_{ad} aceeași parametri, corespunzători procesului adiabatic.

Ecuația echilibrului radial se scrie :

$$\frac{dp}{dr} = \varrho_{1z} \frac{T_{1iz}}{T_{1ad}} \frac{\xi^2 C_{1iz}^2 \cos^2 \alpha_1}{r} \tag{33}$$

Putem scrie, de asemenea, ecuația conservării energiei (13) sub forma ·

$$-\frac{1}{\varrho_{1z}} \frac{dp}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{C_1^2}{\xi^2}\right)}{dr} \tag{34}$$

Rezolvînd ecuațiile (33) și (34) se obține :

$$\frac{dC_{1iz}}{C_{1iz}} + \frac{T_{1iz}}{T_{1ad}} \xi^2 \cos^2 \alpha_1 \frac{dr}{r} = 0 \tag{35}$$

Trecînd peste unele calcule algebrice ecuația (35) se poate scrie în definitiv :

$$\frac{dM_{iz}}{M_{1z}} \left(\frac{1 - \xi^2}{1 - M_{iz}^2 \frac{k-1}{2}} + \xi^2 \right) + \xi^2 \cos^2 \alpha_1 \frac{d\bar{r}_m}{\bar{r}_m} = 0 \tag{36}$$

unde M_{iz} este numărul Mach, corespunzător procesului izentropic.

Putem încă scrie relația :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = K_a \bar{r}_m \tag{37}$$

unde K_a este o constantă.

Cu acestea ecuația (36) devine :

$$\frac{dM_{iz}}{M_{1z}} + \frac{\xi^2 \cos^2 1}{K_{1z}} \frac{d\bar{r}_m}{\bar{r}_m} = 0 \tag{38}$$

Din compararea relației (38) cu (36) rezultă expresia pentru K_{iz}.

2. *Calculul paletajului în cazul cînd circulația variază în lungul razei*

Vom porni de la ecuația (36), considerînd $\alpha_1 = \text{const.}$ și $\xi = \text{const.}$ Obținem prin integrare :

$$\frac{M_{iz}\,\bar{r}_m\,\xi^{2\cos^2\alpha_1}}{\left(1-\frac{k-1}{2}M_{iz}^2\right)^{\frac{1-\xi^2}{2}}} = \text{const.} \tag{39}$$

Ecuația (39) este transcendentă relativ la M_{iz} și de aceea ea se rezolvă printr-o metodă combinată, grafo-analitică.

Se construiește funcția $\dfrac{M_{iz}}{\left(1-\frac{k-1}{2}M_{iz}^2\right)^{\frac{1-\xi^2}{2}}} = f\,(M_{iz})$.

după care rezolvarea ecuației (39) nu mai prezintă dificultăți.

Fără a se face erori prea mari se poate admite în ecuația (36) $K_{iz} = \text{const.}$ Soluția ecuației (38) este de forma :

$$M_{iz}\,\bar{r}_m^{\,n} = \text{const.} \tag{40}$$

$$\text{unde } n = \frac{\xi^2\cos^2\alpha_1}{K_{iz}}$$

Dacă în momentul inițial temperatura o considerăm constantă, rezultă că și viteza sunetului este constantă deci ecuația (39) se poate scrie :

$$C_{1iz}\,\bar{r}_m^{\,n} = \text{const. sau } C_{u1}\,\bar{r}_m^{\,n} = \text{const. și } C_{z1}\,\bar{r}_m^{\,n} = \text{const.} \tag{41}$$

Se observă variația în lungul razei a circulației. În lipsa pierderilor prin frecare $\xi = 1$ și $K_{iz} = 1$, rezultă :

$$C_{u1}\,\bar{r}_m^{\cos^2\alpha} = \text{const.} \tag{42}$$

Putem scrie explicit cîțiva din parametrii care intervin. — Căderea termică pe înălțimea paletei :

$$h_b - h = \frac{A}{2g}\left(C_{1izb}^2 - C_{1iz}^2\right) = \frac{AK_u^2}{2g\,\xi^2\cos^2\alpha_1}\left(\frac{1}{\bar{r}_{mb}^{2n}} - \frac{1}{\bar{r}_m^{2n}}\right) \tag{43}$$

unde $K_u = C_{1u}\,\bar{r}_m^{\,n}$

— Legea de variație a unghiului de ieșire din aparatul director :

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{C_{z1}}{C_{u1} - u} = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1 - \dfrac{u_m}{C_{1m}}\,\bar{r}_m^{\,1+n}} \tag{44}$$

În fig. 5 sînt redate curbele de variație a căderii termice relative $\frac{h}{h_m} = f_1(r)$, deduse din ((43) și a vitezei tangențiale relative $\frac{C_{u1}}{C_{u1m}} = f_2(r)$, atît considerînd pierderile prin frecare cît și fără acestea. Se observă o variație mare a căderilor termice în jocul axial.

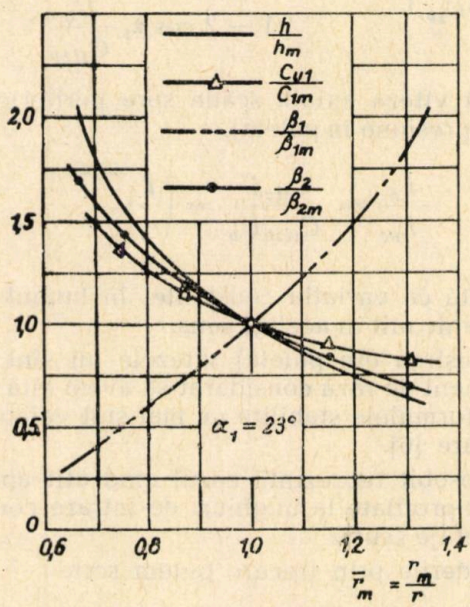


Fig. 5. — Variația rapoartelor $\frac{h}{h_m}$, $\frac{C_{ul}}{C_{ulm}}$, $\frac{\beta_1}{\beta_{1m}}$, $\frac{\beta_1}{\beta_{1m}}$ pentru trealta profilată la unghi de intrare constant

Pentru a preciza parametrii procesului la ieșirea din paletajul activ trebuie cunoscută variația lui C_{u2} în lungul razei, iar mai departe folosind ecuația echilibrului radial se pot calcula vitezele, unghiurile etc. la ieșirea din treapta considerată.

Dacă vom considera presiunea constantă la ieșirea din treaptă va trebui să avem $C_{u2} = 0$, adică $C_{z2} = C_2$. În acest caz căderea termică în trepte va fi constantă în lungul razei. Lucrul mecanic rezultat va fi :

$$L_u = \frac{C_{u1} \cdot U}{g} \tag{45}$$

care în lipsa pierderilor prin frecare ne dă :

$$\frac{C_z^2}{2g} = \frac{C_{z2}^2}{2g} = \frac{1}{A} h_m + \frac{C_0^2}{2g} - \frac{C_{u1} U}{g} \tag{46}$$

C_0, este viteza la intrare în treaptă.

Presupunînd gradul de reacțiune la butuc egal cu zero și trecînd peste unele calcule algebrice se deduce :

$$\left(\frac{C_z}{C_{zb}}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cos \alpha_1 \dfrac{U_b}{C_{1tzb}} \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\sin^2 \alpha_1}}{1 - 2 \cos \alpha_1 \dfrac{U_b}{C_{1tzb}}} \tag{47}$$

Se observă că viteza axială scade spre periferie. Din (48) rezultă variația căderii de presiune în paletaj.

$$\frac{L_u}{L_{uc}} = \frac{C_{1tz} U}{C_{1tzb} U_b} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sin^2 \alpha_1} \tag{48}$$

De unde rezultă că variația constantei în lungul razei duce la variația lucrului mecanic util în același sens.

Faptul că la ieșirea din paletaj vitezele nu sînt uniforme face ca pentru fiecare element de rază considerat să avem altă constantă în ecuația Bernoulli, deci formulele stabilite nu mai sînt valabile pentru intrarea în treapta următoare [6].

Un interes deosebit reprezintă cazul cînd atît aparatul director cît și roata activă sînt profilate la unghiuri de intrare constante, metodă ce se întîlnește la paletaje scurte.

Neglijînd pierderile prin frecare putem scrie :

$$\frac{C_0^2}{2g} + \frac{1}{A} h_m = L_u + \frac{C_2^2}{2g} = \frac{u}{g} \left(C_{u1} - C_{u2}\right) + \frac{C_2^2}{2g} = - \int \frac{dp}{\gamma}$$

care, diferențiată după rază ne dă :

$$- \frac{1}{\gamma} \frac{dp_2}{dr} = \frac{1}{2g} \frac{dC_2^2}{dr} + \frac{1}{g} \frac{d}{dr} (C_{u1} u - C_{u2} u) \tag{49}$$

Deoarece căderea de presiunea nu rămîne constantă pe înălțimea paletei, mărimea acestei căderi se determină din relația :

$$\frac{C_0^2}{2g} + \frac{1}{A} h_m = L_u + \frac{C_2^2}{2g} \tag{50}$$

Pentru a obține o distribuție mai uniformă a lucrului mecanic util L_u se recomandă a alege viteza de ieșire axială din treaptă.

O distribuție satisfăcătoare pentru C_2 pe înălțimea paletei se obține presupunînd în primă aproximație gradul de reacțiune la butuc egal cu zero ($\rho_0 = 0$). Astfel :

$$\frac{C_2^2}{2g} = \frac{C_{1izb}^2}{2g} - \left(\frac{C_{u1}u}{g} + \frac{C_{u2}u}{g}\right) \tag{51}$$

Dar din triunghiul de viteze deducem :

$$C_{u2} = w_2^2 + u_2 - 2uw_2 \cos \beta_2 \tag{52}$$

deci : $\frac{C_{1izb}^2}{2g} = \frac{C_{1uz}}{2g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} = \frac{C_{1iz}^2}{2g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{C_{1iz}^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} + \frac{2C_{u1}u}{2g}$

care în final devine [3].

$$\frac{C_2^2}{C_{1iz}^2} = 1 - 2\frac{u_b}{C_{1izb}} \cos \alpha_1 \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\sin^2 \alpha_1} - 2\frac{u_b}{C_{1izb}} \cos \beta \frac{r}{2r_b} \left[1 - 2\frac{u_b}{C_{1b}} \cos \alpha_1 \left(\frac{r}{r_b}\right)^{\sin^2 \alpha_1} + \frac{u_b^2}{C_{1izb}^2} \frac{r^2}{r_b^2}\right]^{1/2} + 2\frac{u_b^2}{C_{1izb}^2} \frac{r_2}{r_b^2} \tag{53}$$

În fig. 6 se arată variația raportului $\frac{C_{u1}}{C_{u1m}}$ și $\frac{\beta_1}{\beta}$ și $\frac{\alpha_1}{\alpha_{1m}}$ în lungul razei.

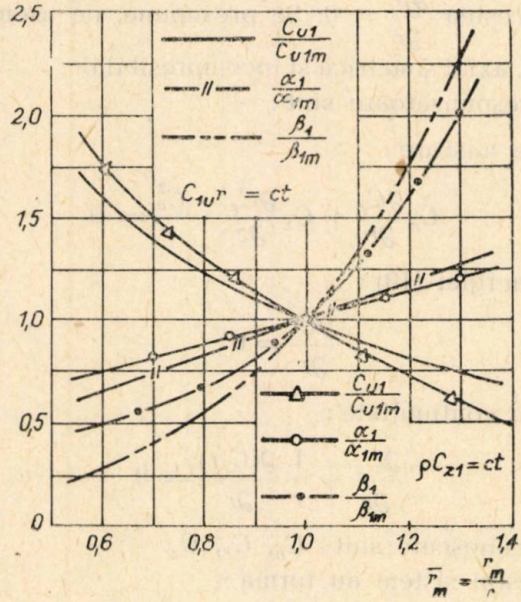


Fig. 6. — Variația parametrilor $\frac{C_{1m}}{C_{ulm}}$, $\frac{\beta_1}{\beta_{1m}}$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_{1m}}$, $\frac{C_{zl}}{C_{zlm}}$ în funcție de $\bar{r}_m$ pentru trei legi de profilare.

Se observă o ușoară variație a vitezelor tangențiale și unghiurilor de intrare în paletaj. Deci cîmpul de viteze are caracteristici apropiate indiferent de legea de profilare. Se observă (comparînd și cu fig. 5) că variația vitezelor în cazul profilării la circulație constantă este undeva în mijloc în raport cu profilarea la unghi de intrare constant (α_1 = const.) și debit constant (ρC_{z1} = const.). Toate metodele de profilare au pornit de la condiția egalității parametrilor la raza medie. O diferență mult mai mare se observă pentru unghiurile de intrare și vitezele axiale în cazul profilării după metodele enunțate. Variația vitezelor axiale este cu atît mai mică la butuc cu cît numărul Mach al procesului izentropic în același punct este mai mic, pentru legea de profilare la debit constant (ρC_{z1} = const.).

3. *Profilarea paletajelor cu grad de reacțiune constant*

Este interesant de profilat paletajul după legi în care gradientul de presiune în lungul paletelor să aibe valori minime sau chiar să lipsească. Aceasta este recomandabil atît în cazul paletelor lungi cît și a celor scurte.

Tratarea acestei probleme se face plecînd tot de la ecuațiile generale și anume ecuația de mișcare, ecuația energiei și ecuația de continuitate, considerînd în acestea $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$. Se presupune, de asemenea, mișcarea ideală, staționară, axial simetrică și incompresibilă.

Ecuațiile corespunzătoare sînt :

1. Ecuația de mișcare :

$$C_r \frac{\partial C_r}{\partial r} + C_z \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{C_u^2}{r} = 0 \tag{54}$$

2. Ecuația energiei (13) :

$$\frac{\partial C^2}{\partial r} = 0 \tag{55}$$

3. Ecuația de continuitate :

$$\frac{\partial C_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (C_r r)}{\partial r} = 0 \tag{56}$$

Funcțiile necunoscute sînt : C_u, C_r, C_z.

Soluțiile acestui sistem au forma :

$$\frac{\partial C_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial C_z}{\partial r} 0 \tag{57}$$

$$\frac{\partial (C_r r)}{\partial r} = 0 \text{ sau } C_r r = \text{const.}$$

Aceasta înseamnă că C_z componenta axială a vitezei este constantă în tot volumul de fluid iar produsul $C_r r$ este constant în lungul razei. În relația (55), C reprezintă viteza totală din care se poate deduce viteza tangențială a fluidului conform relației :

$$C_u^2 = C^2 - (C_z^2 + C_r^2) \tag{58}$$

Formula (58) se mai poate scrie :

$$C_u^2 = C_{um}^2 + C_{zm}^2 = C_{rm}^2 - C_z^2 - C_r^2$$

Dar, conform ipotezelor : $C_z = C_{zm}$ și $C_r = C_{rm}\bar{r}_m$

Prin urmare :

$$C_u^2 = C_{um}^2 + C_{rm}^2(1 - \bar{r}_m^2) \tag{59}$$

Distribuția unghiului de intrare α_1 în lungul razei va fi :

$$\text{ctg.}^2\ \alpha_1 = \frac{C_u^2}{C_z^2} = \frac{C_{um}^2}{C_z^2} + \frac{C_{rm}^2}{C_z^2}(1 - \bar{r}_m^2)$$

$$\text{sau : } \text{ctg}^2\ \alpha_1 = \text{ctg}^2\,\alpha_{1m} + \text{tg}^2\ \varphi_m\ (1 - \bar{r}_m^2) \tag{60}$$

$$\text{unde s-a notat : } \text{tg}\ \varphi_m = \frac{C_{rm}}{C_z}$$

Se poate obține în primă aproximație :

$$C_u \simeq C_{um} \text{ și } \text{ctg}\ \alpha_1 \simeq \text{ctg}\ \alpha_{1m} \tag{61}$$

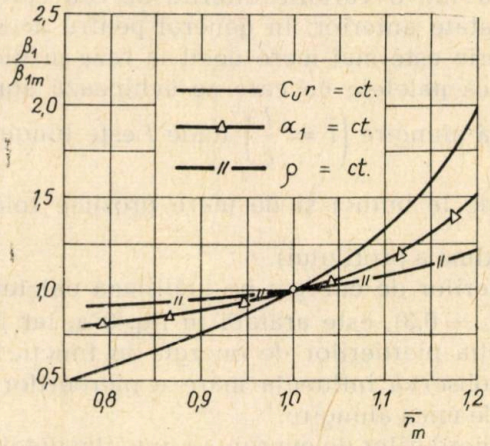


Fig. 7. — Variația unghiului β_1 în funcție de legea de profilare.

Relația (61) ne indică faptul că în absența gradientului de presiune în lungul razei, viteza tangențială și unghiul de intrare diferă puțin de valorile corespunzătoare de la raza medie însă există o componentă radială a vitezei, ceea ce face ca liniile de curent să nu mai fie drepte.

Determinarea vitezei radiale se face cu formula :

$$C_r = C_z \frac{\int_0^z \operatorname{ctg}^2 \alpha_1 dz}{r} + C_{ro} \qquad (62)$$

unde C_{ro} este componenta radială a vitezei la intrarea în treaptă.

În fig. 8 se arată comparativ variația raportului $\frac{\beta_1}{\beta_{1m}} = f(\bar{r}_m)$ pentru trei legi de profilare.

Se observă cea mai mare variație în cazul profilării după legea circulației constante iar cea mai mică variație în cazul profilării după legea reacțiunii constante. Unghiul constant de ieșire din aparatul director, dă variații intermediare în funcție de raportul $\left(\frac{r}{r_m}\right)$.

4. *Profilarea paletajelor după legi speciale*

Tendința existentă astăzi în construcția de turbomașini este bine conturată și direcționată spre obținerea unor agregate de puteri unitare mari în care energia termică a curentului de gaze să fie folosită mai complet. O astfel de lege de profilare, care se deosebește esențial de cele precedente [5] în care se ține seama de pierderile de energie în apropierea pereților turbinei, prin formarea stratului limită, este tot mai des utilizată în prezent, obținîndu-se așa cum se vede din [4] pag. 113, fig. 2 palete cu coarda avînd o variație diferită de cea care se întîlnește în cazurile clasice tratate anterior. În general pentru aceste palete coarda profilului la periferie este mai mare decît la raza medie a paletajului.

De remarcat, că paletele cu care se echipează agregatele de mare putere sînt de mică alungire $\left(\bar{l} = \frac{l}{c}\right)$ unde l este lungimea paletei iar c, coarda profilului de la butuc) și de mare grosime relativă $\left(\bar{e} = \frac{e}{c}\right.$; e, fiind grosimea maximă a profilului).

Variația pierderilor de energie pe înălțimea paletei, pentru alungiri mici ($\bar{l}_1 = 0{,}50$ și $\bar{l}_2 = 0{,}3$), este arătată în fig. 8 a, iar în figura 8 b este reprezentată variația pierderilor de energie în funcție de alungire. Din această figură se observă influența mare a pierderilor în stratul limită în cazul paletelor de mică alungire.

În distribuția pierderilor de energie în lungul paletei se observă unele particularități și anume :

1. În apropierea pereților o zonă care de obicei coincide cu grosimea stratului limită unde pierderile au o valoare ridicată.

2. O altă zonă caracteristică este aceea a interațiunii dintre stratul limită format pe pereți și pe palete, unde valoarea pierderilor se apropie de cea minimă existentă de obicei către mijlocul paletelor lungi.

3. Zona următoarea situată spre extremitățile paletei coincide de obicei cu nucleul șnurului de vîrtejuri ce părăsește paleta analog cu pînza de vîrtejuri ce se observă în cazul aripii de avion de anvergură finită.

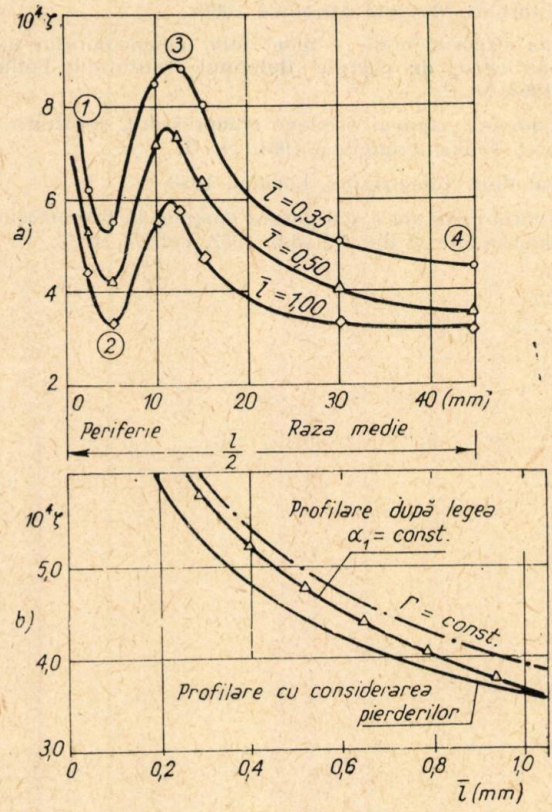


Fig. 8. — Variația pierderilor de energie pentru palete de mică alungire

a. Variația în lungul paletei.

b Variația în funcție de alungire.

4. Ultima zonă caracteristică de variație a pierderilor de energie este aceea situată spre nucleul părții de trecere spre raza medie a paletajului. Aici se observă că pierderile au o valoare minimă, ceea ce se explică prin slaba influență a frontierelor asupra parametrilor caracteristici din nucleul de scurgere.

Catedra de construcții aeronautice
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Traupel, W.* Thermische Turbomaschinen, Springer, 1958 Berlin.

2. *Carafoli, E.* Aerodinamica fluidelor compresibile.

3. *Snee, Ia, I.* Gazovîe turbinî, Maşghiz, Moscova 1960.

4. *Guță C.* Cercetarea experimentală a paletajului compresorului axial, profilat cu considerarea pierderilor de energie Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, Tom. XXVI — 1964, Nr. 2.

5. *Becnev V. S.* Issledovanie stupeni osevogo compressora, sprofilirovannoi s ucetom poteri po radiusu, Teploenerghetica, 1961, Nr. 1.

6. *Horlock, J. V.* Axial Flow Compresors, London, 1958.

7. *Wu Chung-Hua,* Teoria generală a scurgerilor spațiale în turbomașini axiale, radiale și combinate, Transaction of the A.S.M.E. 1952, vol. 74, nr. 8.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

CENTRALE ELECTRICE

C. Z.: 621.311 : 621.3.011 : 621.3.018 : 621.314

METODĂ PENTRU STABILIREA RELAŢIILOR DE CALCUL AL DURATELOR MEDII DE FUNCŢIONARE ÎN STUDIUL SIGURANŢEI STRUCTURILOR COMPLEXE CU ELEMENTE DE REZERVĂ *)

C. DINCULESCU, P. BUHUŞ

Prezentarea problemei

Într-o instalaţie tehnică fiecare element component este prevăzut pentru a îndeplini anumite funcţii bine precizate. În timp, este posibil ca, din cauza defecţiunilor, unele elemente să nu mai fie capabile să-şi îndeplinească funcţiile pentru care au fost prevăzute.

Elementul ajuns în această situaţie în cele ce urmează se va considera că se află în stare de insucces. Prin reparare sau înlocuire, elementul poate fi readus în stare de succes.

Aceleaşi consideraţii se pot face şi cu privire la un întreg ansamblu de elemente prevăzute să concure la realizarea unui scop comun. În cele ce urmează un astfel de ansamblu se va lua în considerare sub denumirea de *sistem*.

Analizînd un singur element sau un întreg sistem sub aspectul capacităţii sale de a putea sau nu să realizeze funcţiile pentru care este prevăzut, se poate deci considera că în orice moment el se poate găsi numai într-una din următoarele două stări incompatibile :

— *stare de succes* în care elementul sau sistemul îşi îndeplineşte toate funcţiile pentru care este prevăzut sau, dacă momentan nu este folosit, el este capabil să-şi îndeplinească toate aceste funcţii ;

— *stare de insucces* în care elementul sau sistemul şi-a pierdut parţial sau total capacitatea de a-şi îndeplini funcţiile pentru care este prevăzut.

La aprecierea stării în care se găseşte elementul sau sistemul pot fi avute în vedere fie totalitatea funcţiilor pentru care acesta a fost conceput şi realizat, fie numai o parte dintre acestea, pentru care el este efectiv folosit.

În cele ce urmează se va folosi denumirea de *cădere* pentru evenimentul în urma căruia se produce o trecere dintr-o stare de succes într-o stare de insucces.

*) Manuscris predat la redacţie la 15 aprilie 1967.

Pentru evenimentul contrar, de trecere dintr-o stare de insucces într-o stare de succes se va folosi denumirea de *restabilire*.

Prin urmare viața unui element sau al unui sistem poate fi considerată ca o succesiune în timp de stări de succes și de insucces, trecerile dintr-o stare în alta avînd loc în urma căderilor sau respectiv a restabilirilor.

În accepțiunea actuală *siguranța* unui element sau a unui sistem se consideră ca fiind una dintre însușirile acestuia și anume acea însușire datorită căreia elementul sau sistemul respectiv își îndeplinește corect funcțiile pentru care a fost prevăzut.

Măsura în care, în timp elementul sau sistemul considerat se găsește în stare de succes îndeplinindu-și corect funcțiile pentru care a fost prevăzut, poate servi la aprecierea cantitativă a siguranței sale. Prin urmare analiza siguranței unui element sau al unui sistem se face studiind evoluția în timp a acestuia între cele două stări în care s-ar putea găsi, în stare de succes sau în stare de insucces.

Evoluția în timp dintre cele două stări a unui element sau a unui întreg sistem este un proces aleator deoarece schimbările de stare care au loc o dată cu producerea căderilor sau terminarea restabilirilor se produc în practică în momente întîmplătoare. Studiul acestei evoluții poate fi deci făcut folosind aparatul matematic al teoriei probabilităților.

Elementele inițiale pentru un calcul pe baza cărui să se poată caracteriza *aprioric* siguranța în funcționarea ulterioară a unui sistem, pot fi împărțite în două categorii.

În primul rînd trebuie cunoscută schema tehnologică a instalației, respectiv a sistemului a cărui siguranță urmează a se studia, precizîndu-se legăturile dintre elemente precum și rolul fiecărui element în asigurarea funcțiilor pe care trebuie să le îndeplinească sistemul.

Pe baza schemei tehnologice, se pot stabili condițiile de frontieră dintre starea de succes și starea de insucces a sistemului.

O a doua categorie de date inițial necesare o constituie parametrii ce caracterizează siguranța fiecăruia din elementele componente ale sistemului. Aceste date pot fi obținute numai *aposteriori*, în urma unor experiențe făcute special în acest scop sau a folosirii în exploatarea a mai multor elemente identice cu cele ce vor intra în componența sistemului în cauză.

Este vorba deci despre date statistice care, pentru a putea fi apoi folosite pentru obținerea unor rezultate corecte, trebuie să se refere la un număr suficient de mare de elemente identice cu cele ce urmează a fi folosite și care au funcționat în condiții cît mai apropiate de cele în care va fi pus să funcționeze sistemul studiat.

În principiu un element sau un sistem poate fi considerat cu atît mai sigur cu cît duratele stărilor de succes sînt mai mari iar numărul și duratele stărilor de insucces sînt mai mici.

Indicatorii care se obișnuiește a fi folosiți în caracterizarea cantitativă a siguranței elementelor și în final pentru caracterizarea siguranței sistemului, pot fi grupați în cîteva categorii.

Într-o categorie pot fi luate în considerare duratele medii ale celor două stări posibile sau inversele lor, frecvențele medii ale evenimentelor de cădere și respectiv de restabilire.

O altă categorie de indicatori o constitue diverse funcţii de repartiţie ale probabilităţilor. Ca variabile aleatoare se consideră duratele de rămînere într-una din cele două stări posibile.

Într-o a treia categorie se pot lua în considerare diverşi coeficienţi. Dintre aceştia o importanţă deosebită în caracterizarea siguranţei o are coeficientul de utilizabilitate.

Valoarea acestui coeficient reprezintă fracţiunea dintr-un interval de timp destul de îndelungat în care, în medie, elementul sau sistemul respectiv se va afla în stare de succes. Relaţia pentru calculul acestui coeficient este

$$C_u = \frac{T_s}{T_s + T_{ts}} \tag{1}$$

în care :

T_s — durata medie a unei stări de succes

T_{is} — durata medie a unei stări de insucces.

Uneori se foloseşte şi coeficientul de inutilizabilitate a cărui expresie este

$$C_i = 1 - C_u = \frac{T_{is}}{T_s + T_{is}} \tag{2}$$

valoarea lui reprezentînd fracţiunea dintr-un interval de timp destul de îndelungat în care, în medie, elementul sau sistemul se va găsi în stare de insucces.

Importanţa acestor doi coeficienţi constă în faptul că, cu ajutorul lor se poate face o caracterizare globală a siguranţei pentru un interval destul de lung de timp, ţinîndu-se seama atît de duratele stărilor de succes cît şi de duratele stărilor de insucces.

În lucrarea de faţă se studiază cazul unui sistem compus dintr-un număr total de N elemente avînd aceeaşi siguranţă în funcţionare. Din examinarea schemei tehnologice se stabileşte că succesul sistemului este asigurat în cazul cînd cel puţin m dintre elementele sale se găseşte în stare de succes.

Restul de $N - m = n - 1$ elemente au rolul de rezervă. Rezultă deci :

$$N = m + (n - 1) \tag{3}$$

Ca date iniţiale se mai consideră că se cunosc următoarele mărimi ce caracterizează siguranţa fiecărui element din sistem :

— durata medie a unei stări de succes t_s sau inversul ei, frecvenţa medie a căderilor

$$\lambda = \frac{1}{t_s} \tag{4}$$

— durata medie a unei stări de insucces t_{is} sau inversul ei, frecvenţa medie a restabilirilor

$$\mu = \frac{1}{t_{is}} \tag{5}$$

Se consideră că atît probabilitățile duratelor stărilor de succes τ_s cît și probabilitățile duratelor stărilor de insucces τ_{is} se caracterizează prin legi de repartiție exponențiale :

$$P(\tau_s < t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{6}$$

iar

$$P(\tau_{is} < t) = 1 - e^{-\mu t} \tag{7}$$

Deoarece elementele se presupun identice numărul de stări între care poate evolua sistemul este egal cu $n + 1$, adică cu două unități mai mare decît numărul elementelor de rezervă. Fiecare din stările posibile se caracterizează printr-un număr diferite de elemente aflate în stare de insucces.

Schema tranzițiilor care pot avea loc între cele $n + 1$ stări posibile este prezentată în fig. 1.

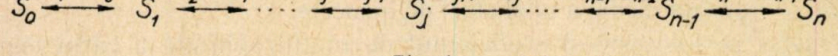


Fig. 1

În această schemă s-au făcut următoarele notații :

S_j — starea în care sînt căzute j elemente.

L_j — intensitatea de trecere a sistemului din starea j în starea $j+1$ prin căderea unui dintre cele $N - j$ elemente aflate în stare de succes.

M_j — intensitatea de trecere a sistemului din starea j în starea $j-1$ prin restabilirea unuia dintre cele j elemente aflate în stare de insucces.

Intensitățile de trecere se presupun că sînt constante în timp. Se consideră că ele depind numai de starea în care se găsește sistemul, adică de numărul de elemente care se găsesc în stare de succes.

În primele n stări în care numărul de elemente căzute nu depășește numărul de elemente de rezervă $(0 \leqslant j \leqslant n - 1)$ sistemul se găsește în stare de succes. Dacă după consumarea celor $n - 1$ elemente de rezervă, mai cade încă un element, se ajunge în starea S_n cînd lipsește un element pentru asigurarea succesului sistemului, deci sistemul cu $m - 1$ elemente în funcțiune este în stare de insucces, iar n elemente sînt căzute și în restabilire. Se admite ipoteza că pînă la restabilirea unui din cele n elemente căzute nu se mai produce căderea vreunuia dintre cele $m - 1$ elemente care au mai rămas în stare de succes.

În lucrarea de față se prezintă o metodă de stabilire a relațiilor de calcul pentru duratele medii de funcționare a sistemului în stare de succes.

Problema se studiază în două cazuri distincte.

Într-un prim caz se stabilește relația de calcul a duratei medii de funcționare din momentul primei puneri în funcțiune, cînd sistemul se află în starea S_0, pînă la prima sa cădere, adică pînă în momentul cînd pentru prima dată sistemul ajunge în starea S_n, deci cu $m - 1$ elemente în stare de succes.

Într-un al doilea caz se stabilește relația de calcul a duratei medii de funcționare dintre momentul unei restabiliri a sistemului, cînd acesta trece din starea S_n în starea S_{n-1}, și momentul căderii următoare cînd sistemul revine în starea S_n.

Problema este relativ nou tratată în literatură de specialitate [1, 2].

În lucrarea de față se prezintă o metodă originală pentru deducerea celor două relații de calcul al duratelor medii de funcționare, cu mult mai simplă și mai expeditivă față de metoda întîlnită pînă acum în literatură.

Stabilirea sistemului de ecuații cu ajutorul căruia se studiază evoluția sistemului pînă în starea de insucces.

După cum s-a mai menționat, în lucrarea de față se consideră că probabilitățile duratelor stărilor de succes precum și probabilitățile stărilor de insucces ale elementelor sistemului se caracterizează prin legi de repartiție exponențiale. Chiar dacă această ipoteză nu reflectă întotdeauna fidel realitatea, ea stă în prezent la baza tuturor lucrărilor din teoria servirii de masă sau din teoria siguranței atunci cînd se studiază procese în care intervin două fluxuri de evenimente: cereri și terminări de serviri, respectiv căderi și restabiliri.

În această ipoteză, a unor reparații exponențiale, atît fluxul căderilor cît și fluxul restabilirilor elementelor componente ale sistemului sînt fluxuri simple, de tip Poisson.

În consecință, dacă la un moment t se cunoaște starea în care se găsește sistemul atunci informații suplimentare cu privire la evoluția anterioară momentului t nu prezintă interes pentru prognoza evoluției ulterioare a sistemului. Aceasta înseamnă că evoluția sistemului poate fi considerată ca un proces Marcov. Șirul celor $n + 1$ stări între care poate evolua sistemul constituie un lanț Marcov.

Este de menționat că procesele de tip Marcov sînt ergodice. Aceasta înseamnă că după trecerea unui interval destul de lung de timp probabilitățile stărilor în care va ajunge sistemul practic nu depind de starea în care se găsește sistemul la începutul intervalului considerat.

Sistemul de ecuații diferențiale cu ajutorul căruia poate fi descrisă evoluția sistemului între stările lanțului Marcov se scrie sub următoarea formă matricială:

$$\| p'_{(t)} \| = \| p_{(t)} \| \cdot \| B \| \tag{8}$$

în care notînd prin $p\ (t)$ probabilitatea ca la momentul t sistemul să se găsească în starea j.

$$\| p_{(t)} \| = \| p_0(t)\, p_1(t) \dots p_n(t) \|$$

$$\| p'_{(t)} \| = \| p'_0(t)\, p'_1(t) \dots p'_n(t) \|$$

$\| B \|$ — este matricea intensităților de trecere.

Matricea $\| B \|$ este patratică și se obține din matricea probabilităților de trecere dintre stări $\| A \|$, prin eliminarea atît a tuturor termenilor unitari din elementele diagonalei principale cît și a termenului Δt cu care sînt amplificate toate intensitățile de trecere.

Matricea probabilităților de trecere $\| A \|$ este o matrice stocastică, suma elementelor fiecărei linii fiind egală cu unitatea. La matricea intensităților de trecere $\| B \|$ această sumă este nulă.

Ținînd seama de notațiile din fig. 1, se poate scrie următoarea matrice a probabilităților de trecere [3] :

$$\| A \| = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & n \\ 0 & 1-L_0\Delta t & L_0\Delta t & 0 & 0 & \ldots & \\ 1 & M_1\Delta t & 1-(L_1+M_1)\Delta t & L_2\Delta t & 0 & \ldots & \\ 2 & 0 & M_2\Delta t & 1-(L_2+M_2)\Delta t & L_2\Delta t & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1-(L_{n-1}+M_{n-1})\Delta t & L_{n-1}\Delta t \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 \end{array} \quad (9)$$

Scrierea și interpretarea acestei matrici este foarte simplă. Astfel elementul aparținînd liniei 0 și coloanei 1 reprezintă probabilitatea de trecere a sistemului din starea 0 în starea 1, într-un interval de timp Δt. Orice termen de pe diagonala principală reprezintă probabilitatea ca după trecerea unui interval de timp Δt sistemul să rămînă în starea în care se găsea inițial.

Deoarece scopul urmărit în această lucrare este determinarea duratei medii a evoluției sistemului pînă la momentul cînd se ajunge în starea n, scrierea ultimei linii s-a făcut în ipoteza că evoluția sistemului se întrerupe în momentul în care acesta ajunge în starea de insucces. Probabilitatea de ieșire din starea n s-a considerat nulă ($M_n = 0$), admițîndu-se că sistemul rămîne cu certitudine în această stare.

Cu ajutorul relației (8) și al matricei (9) se obține imediat sistemul de ecuații diferențiale (10) cu ajutorul căruia se poate studia evoluția sistemului pînă în starea de insucces.

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -L_0 p_0(t) + M_1 p_1(t) \\ p_1'(t) &= L_0 p_0(t) - (L_1 + M_1)\, p_1(t) + M_2 p_2(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_j'(t) &= L_{j-1} p_{j-1}(t) - (L_j + M_j)\, p_j(t) + M_{j+1} p_{j+1}(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-1}'(t) &= L_{n-2} p_{n-2}(t) - (L_{n-1} + M_{n-1})\, p_{n-1}(t) \\ p_n'(t) &= L_{n-1} p_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

În plus știindu-se cu certitudine că în orice moment sistemul se găsește într-una din cele $n + 1$ stări posibile se mai poate scrie că

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(t) = 1 \quad (11)$$

Stabilirea relaţiei de calcul a duratei medii T_{s1} pînă la prima cădere a sistemului.

În momentul iniţial sistemul se consideră pus pentru prima dată în funcţiune, deci în starea S_0. Prin urmare condiţiile iniţiale de integrare ale sistemului de ecuaţii (10) vor fi :

$$p_0(o) = 1 \quad \text{şi} \quad p_j(o) = 0 \quad \text{pentru} \quad 1 \leqslant j \leqslant n \tag{12}$$

Dacă se consideră ca variabilă aleatoare momentul t_n în care se ajunge pentru prima dată în starea n, atunci se poate scrie că :

$$P(t_n < t) = p_n(t)$$

Prin urmare probabilitatea $p_n(t)$ din sistemul de ecuaţii (10) poate fi interpretată ca funcţie de repartiţie a variabilei aleatoare t_n. Valoarea medie a acestei variabile aleatoare reprezintă tocmai durata medie T_{s1} a evoluţiei sistemului pînă la prima sa cădere.

Din teoria probabilităţilor se ştie că prin definiţie :

$$T_{s1} = \int_0^\infty t p_n'(t)\, dt \tag{13}$$

Diferenţiind relaţia (11) rezultă :

$$p_n'(t) = -\sum_{j=0}^{n-1} p_j'(t)$$

Înlocuind în relaţia (13) se obţine :

$$T_{s1} = -\sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\infty t p_j'(t)\, dt$$

Integrînd prin părţi fiecare din termenii sumei de mai sus se obţine :

$$T_{s1} = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\infty p_j(t)\, dt$$

Făcînd notaţia

$$t_j = \int_0^\infty p_j(t)\, dt \tag{14}$$

se poate scrie în final

$$T_{s1} = \sum_{j=0}^{n-1} t_j \tag{15}$$

În relaţia (14) t_j reprezintă durata medie sumară a tuturor intervalelor de timp cît sistemul se va găsi în starea S_j în cadrul evoluţiei sale pînă la primul său insucces. În lumina acestei interpretări semnificaţia relaţiei (15) este evidentă.

Avînd în vedere condiţiile iniţiale (12) rezultă că

$$\int_0^\infty p_0'(t)\, dt = -1 \tag{16}$$

iar pentru $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\int_0^\infty p'_j(t)\,dt = 0 \tag{17}$$

Ținînd seama de relațiile (14), (16) și (17) primele n ecuații corespunzătoare stărilor de succes din sistemul de ecuații (10) devin

$$\begin{aligned}
&-L_0 t_0 + M_1 t_1 = 0\\
&L_0 t_0 - (L_1 + M_1)\,t_1 + M_2 t_2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_{j-1}\,t_{j-1} - (L_j + M_j)\,t_j + M_{j+1}\,t_{j+1} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_{n-2}\,t_{n-2} - (L_{n-1} + M_{n-1})\,t_{n-1} = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

În acest mod rezolvarea problemei propuse este substanțial simplificată, nemai fiind necesar a se opera cu un sistem de ecuații diferențiale. După rezolvarea sistemului de ecuații algebrice (18), conform relației (15), durata medie T_{s1} pînă la cădere a sistemului se obține imediat prin însumarea valorilor celor n necunoscute $t_j (0 \leqslant j \leqslant n-1)$.

În cele ce urmează se merge pe această cale urmărindu-se totodată a se pune relația finală sub o formă mai concentrată.

Făcînd notația

$$W_j = -L_{j-1}\,t_{j-1} + M_j t_j \tag{19}$$

sistemul de ecuații (18) devine

$$\begin{aligned}
&W_0 = -1\\
&-W_0 + W_1 = 0\\
&-W_j + W_j + 1 = 0\\
&-W_{n-2} - L_{n-1}\,t_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

Se observă imediat că

$$W_0 = W_1 = \ldots = W_{n-2} = -1 \tag{20}$$

iar

$$t_{n-1} = \frac{1}{L_{n-1}}$$

Folosind apoi relațiile (19) și (20) se obțin pe rînd

$$\begin{aligned}
t_{n-2} &= \frac{M_{n-1}}{L_{n-1}\,L_{n-2}} + \frac{1}{L_{n-2}}\\
t_{n-3} &= \frac{M_{n-1}\,M_{n-2}}{L_{n-1}\,L_{n-2}\,L_{n-3}} + \frac{M_{n-2}}{L_{n-2}\,L_{n-3}} + \frac{1}{L_{n-3}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
t_0 &= \frac{M_{n-1}\,M_{n-2}\ldots M_1}{L_{n-1}\,L_{n-2}\ldots L_0} + \ldots + \frac{M_1}{L_1\,L_0} + \frac{1}{L_0}
\end{aligned}$$

Făcînd în continuare notația

$$Z_k = \frac{L_0 L_1 \dots L_{k-1}}{M_1 M_2 \dots M_k} \tag{21}$$

soluțiile obținute mai pot fi scrise sub următoarele forme :

$$t_0 = \frac{1}{L_0}\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{k} \frac{M_j}{L_j}\right] = \frac{1}{L_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Z_0}{L_k Z_k}$$

$$t_1 = \frac{1}{L_1}\left[1 + \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{j=2}^{k} \frac{M_j}{L_j}\right] = \frac{1}{L_1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{Z_1}{L_k Z_k}$$

.....

$$t_{n-2} = \frac{1}{L_{n-2}}\left[1 + \frac{M_{n-1}}{L_{n-1}}\right] = \frac{1}{L_{n-2}} + \frac{Z_{n-2}}{L_{n-1} Z_{n-1}}$$

$$t_{n-1} = \frac{1}{L_{n-1}}$$

Pentru a simetriza relațiile obținute, în expresia lui t_0 s-a făcut notația

$$Z_0 = 1 \tag{21'}$$

Ținînd seama de relația (15)

$$T_{s1} = \sum_{j=0}^{n-1} t_j = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1}\left(\frac{Z_0}{Z_1} + 1\right) + \frac{1}{L_2}\left(\frac{Z_0}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_2} + 1\right) + \dots$$

sau

$$T_{s1} = \frac{Z_0}{L_0 Z_0} + \frac{\sum_{j=0}^{1} Z_j}{L_1 Z_1} + \frac{\sum_{j=0}^{2} Z_j}{L_2 Z_2} + \dots + \frac{\sum_{j=0}^{n-1} Z_j}{L_{n-1} Z_{n-1}}$$

În final relația de calcul a duratei medii pînă la prima cădere a sistemului se poate pune sub forma :

$$T_{s1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{j=0}^{k} Z_j}{L_k Z_k} \tag{23}$$

Stabilirea relației de calcul a duratei medii T_{s2} dintre momentul unei restabiliri a sistemului și momentul căderii următoare.

În acest caz se consideră că în momentul inițial sistemul a ieșit din starea de insucces S_n și se găsește în starea S_{n-1}. Prin urmare condițiile inițiale de integrare ale sistemului de ecuații (10) sînt :

$$p_{n-1}(o) = 1 \quad \text{și} \quad p_j(o) = 0 \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant j \leqslant n-2 \tag{24}$$

Avînd în vedere aceste condiții inițiale rezultă că

$$\int_0^\infty p_{n-1}(t)\,dt = -1 \tag{25}$$

iar pentru $0 \leqslant j \leqslant n-2$.

$$\int_0^\infty p_j(t)\,dt = 0 \tag{26}$$

Ținînd seama de relațiile (14), (25) și (26), ca și în paragraful precedent, primele n ecuații diferențiale din sistemul (10) se transformă în sistemul de ecuații algebrice de mai jos :

$$\begin{aligned}
&-L_0 t_0 + M_1 t_1 = 0\\
&L_0 t_0 - (L_1 + M_1) t_1 + M_2 t_2 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_{j-1} t_{j-1} - (L_j + M_j) t_j + M_{j+1} t_{j+1} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_{n-2} t_{n-2} - (L_{n-1} + M_{n-1}) t_{n-1} = -1
\end{aligned} \tag{27}$$

După rezolvarea acestui sistem, pe baza aceloraşi considerații care au condus la relația (15), durata medie T_{s2} se obține imediat prin însumarea valorilor celor n necunoscute $t_j\,(0 \leqslant j \leqslant n-1)$.

Folosind aceeași notație (19), sistemul de ecuații (27) mai poate fi scris sub forma :

$$\begin{aligned}
&W_0 = 0\\
&-W_0 + W_1 = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-W_j + W_{j+1} = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-W_{n-2} - L_{n-1} t_{n-1} = -1
\end{aligned}$$

Din aceste ultime relații se deduce imediat că

$$W_0 = W_1 = \ldots = W_{n-2} = 0$$

și de asemenea

$$t_{n-1} = \frac{1}{L_{n+1}}$$

Din relațiile (28), ținînd seama de notație (19) se obține următoarea relație de recurență :

$$t_{j-1} = \frac{M_j}{L_{j-1}}\,t_j \quad \text{pentru} \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1$$

Cu ajutorul acestei relații de recurență, adoptînd și în acest caz notațiile (21) și (22), se obțin pe rînd :

$$t_{n-2} = \frac{M_{n-1}}{L_{n-1} L_{n-2}} = \frac{Z_{n-2}}{L_{n-1} Z_{n-1}}$$

$$t_j = \frac{M_{n-1} M_{n-2} \dots M_{j+1}}{L_{n-1} L_{n-2} \dots L_j} = \frac{Z_j}{L_{n-1} Z_{n-1}}$$

$$t_0 = \frac{M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1}{L_{n-1} L_{n-2} \dots L_0} = \frac{Z_0}{L_{n-1} Z_{n-1}}$$

Relația pentru calculul duratei medii dintre momentul unei restabiliri a sistemului și momentul căderii următoare rezultă :

$$T_{s2} = \sum_{j=0}^{n-1} t_j = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} Z_j}{L_{n-1} Z_{n-1}} \tag{29}$$

Coeficientul de utilizabilitate.

Ca o aplicație a relațiilor obținute, pentru sistemul studiat se poate determina ușor expresia coeficientului de utilizabilitate definit prin relația (1).

Ca durată medie a unei stări de succes se va lua în considerare durata medie T_{s2} dintre momentul unei restabiliri a sistemului și momentul căderii următoare.

Avînd în vedere că intensitățile de restabilire M_j s-au considerat constante în timp, rezultă că M_n poate fi interpretat ca reprezentînd numărul mediu de restabiliri al sistemului în unitatea de timp, dacă acesta s-ar găsi continuu în stare de insucces. În consecință, ca durată medie a unei stări de insucces a sistemului se poate lua în considerare inversul intensității de restabilire M_n.

Ținînd seama de notația (21) se mai poate scrie

$$T_{is} = \frac{1}{M_n} = \frac{Z_n}{L_{n-1} Z_{n-1}} \tag{30}$$

Deoarece

$$C_u = \frac{T_{s2}}{T_{s2} + T_{is}}$$

folosind expresiile (29) și (30) se obține imediat :

$$C_u = 1 - \frac{Z_n}{\sum_{j=0}^{n} Z_j} \tag{31}$$

Pe baza relației (2) expresia coeficientului de inutilizabilitate va fi

$$C_i = \frac{Z_n}{\sum_{j=0}^{n} Z_j} \tag{32}$$

După cum s-a mai arătat, valoarea acestui coeficient reprezintă fracțiunea dintr-un interval de timp destul de îndelungat în care, în medie, sistemul se va găsi în stare de insucces.

Exprimarea relațiilor stabilite în funcție de mărimile ce caracterizează siguranța elementelor.

Pentru a se putea folosi relațiile obținute, trebuie cunoscute cele două mărimi ce caracterizează siguranța elementelor sistemului: frecvența medie a căderilor λ și frecvența medie a restabilirilor μ. Cu ajutorul acestor mărimi, în cele ce urmează se vor exprima intensitățile de trecere dintre stări L_j și M_j precum și coeficientul Z_j.

Se admite ipoteza că nu există elemente în rezervă rece la care frecvența medie a căderilor ar fi mai mică. Considerînd deci că toate elementele care se află la un moment dat în stare de succes sînt în funcțiune și siguranța lor se caracterizează prin aceeași frecvență λ se poate scrie că

$$L_j = m\lambda + (n - 1 - j)\lambda$$

Ținînd seama de relația (3) rezultă

$$L_j = (N - j)\lambda \quad \text{pentru} \quad 0 \leqslant j \leqslant n - 1$$

intensitatea căderilor în oricare din stările posibile fiind proporțională cu numărul de elemente care se găsesc în stare de succes în situația respectivă a sistemului.

Considerînd că frecvența medie a restabilirilor a fost determinată din practică pentru cazul cînd numărul echipelor de reparație este mai mare sau cel puțin egal cu n, adică cu numărul maxim de elemente ce se pot afla simultan în stare de insucces:

$$M_j = j\mu \quad \text{pentru} \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Coeficientul Z_k definit prin relația (21) va avea deci următoarea expresie:

$$Z_k = \frac{\prod_{k=0}^{k-1} (N - k)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{\mu^k}$$

sau făcînd notația

$$X = \frac{\lambda}{\mu} \tag{33}$$

se obține

$$Z_k = C_N^k X^k$$

De asemenea se mai obţine imediat că :

$$L_k Z_k = (k+1)\lambda C_N^{k+1} X^k$$

Înlocuind în (23), relaţia pentru calculul duratei medii pînă la prima cădere a sistemului va fi :

$$T_{s1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{k=0}^{k} C_N^j X^j}{(k+1)\lambda C_N^{k+1} X^k} \tag{34}$$

Înlocuind în (29), relaţia de calcul a duratei medii dintre momentul unei restabiliri a sistemului şi momentul căderii următoare rezultă :

$$T_{s2} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} C_N^j X^j}{n\lambda C_N^n X^{n-1}} \tag{35}$$

Se observă uşor că $T_{s1} > T_{s2}$. În adevăr :

$$T_{s1} = T_{s2} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\sum_{j=0}^{n-2} C_N^j X^j}{(k+1)\lambda C_N^{k+1} X^k}$$

Ţinînd seama de (30), durata medie a unei stări de insucces a sistemului se va putea calcula cu ajutorul relaţiei :

$$T_{is} = \frac{1}{n\mu} \tag{36}$$

Înlocuind în (32), expresia coeficientului de inutilizabilitate devine :

$$C_i = \frac{C_N^n X^n}{\sum_{j=0}^{n} C_N^j X^j} \tag{37}$$

Adeseori în cazul instalaţiilor energetice cît şi în cazul multor instalaţii din alte ramuri ale tehnicii, durata medie a stărilor de insucces este mult mai mică decît durata medie a stărilor de succes. În aceste cazuri valorile coeficienţilor

$$X = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{t_{is}}{t_s}$$

rezultă mult mai mici decît unitatea. Indicatorii siguranţei unor astfel de instalaţii pot fi calculaţi cu relaţii mult mai simple.

Dacă $NX \ll 1$, cu o foarte mică aproximaţie în minus, se poate considera că

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_N^j X^j = 1$$

Atunci durata medie a stării de succes a sistemului poate fi calculată cu relaţia :

$$T_s = \frac{1}{n\lambda C_N^n X^{n-1}} \tag{38}$$

Duratele ce se vor obține cu această relație vor fi cu puțin mai mici decît în cazul în care s-ar folosi relațiile (35) sau (34).

Ținînd seama de relația (3) se observă că

$$nC_N^n = mC_N^m$$

Relația (38) mai poate fi scrisă deci și sub forma :

$$T_s = \frac{1}{m\lambda C_N^m X^{n-1}} \tag{39}$$

prin care se exprimă durata medie a stării de succes a sistemului în funcție de numărul m de elemente necesare pentru asigurarea succesului.

Relația pentru calculul coeficientului de inutilizabilitate

$$C_i = C_N^n X^n \tag{40}$$

conduce de asemeni la rezultate acoperitoare, diferențele față de rezultatele obținute cu relația (37) fiind practic neglijabile.

Exemple de calcul.

În cazul unui sistem compus dintr-un singur element, $N = 1$ și $(m - 1) = 0$, iar relațiile (38), (36) și respectiv (40) devin :

$$T_s = \frac{1}{\lambda} \quad T_{is} = \frac{1}{\mu} \quad C_i = X \tag{41}$$

În cazul unui sistem compus din două elemente care pot fiecare în parte să asigure succesul, $N = 2$, $m = 1$ iar $n - 1 = 1$ și deci

$$T_s = \frac{1}{2\lambda X} \quad T_{is} = \frac{1}{2\mu} \quad C_i = X^2 \tag{42}$$

Cu ajutorul relațiilor de mai sus și al datelor din tabela 1, în cele ce urmează se va studia siguranța pentru cîteva cazuri simple ce se pot întîlni în sistemele electroenergetice.

Tabela 1

Denumirea elementului	λ 10^{-2} căderi/an	t_{is} ore	$X = \lambda t_{is}$ 10^6
Transformator de forță de 110/6—10 kV	4,0	360	1643,8
Întreruptor de 110 kV	5,0	8	45,7
Separator de 110 kV	0,5	5	2,9
Reductor de curent de 110 kV	0,5	4	2,3
Întreruptor de 6—10 kV	0,3	6	2,1
Separator de 6—10 kV	0,3	4	1,4
Reductor de curent de 10 kV	0,2	4	0,9
Linie de 110 kV, 75 km	150,0	10	1712,3

Durata medie în ore a întreruperilor anuale din cauza avariilor, care prezintă interes pentru calculele economice, se determină cu ajutorul relației :

$$t_{an} = 8760\ C_i$$

Se vor lua în considerare numai întreruperile datorite avariilor care se pot produce în mod independent la diferitele elemente ale schemei. Este de menționat că în practică mai pot avea loc întreruperi și datorită scoaterilor în revizie.

1. Într-o primă etapă se studiază siguranța etajului transformatorilor dintr-o stație coborîtoare.

Luînd în considerare numai căderile transformatorilor, pentru schema din fig. 2, a, aplicînd relațiile (41), se obțin :

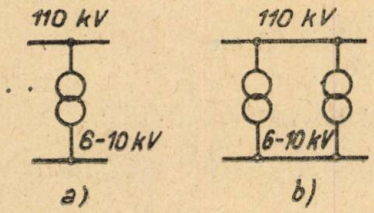


Fig. 2

— durata medie a stării de succes

$$T_s = \frac{1}{0{,}04} = 25 \text{ ani}$$

— durata medie a unei stări de insucces $T_{is} = 360$ ore

— $t_{an} = 8760 \times 1{,}6438 \times 10^{-3} = 14{,}4$ ore/an.

Pentru schema din fig. 2, b, aplicînd relațiile (42) rezultă

$$T_s = \frac{1}{2 \times 0{,}04 \times 1{,}6438.10^{-3}} = 7\,600 \text{ ani}$$

$$T_{is} = 360/2 = 180 \text{ ore}$$

$$C_i = 1{,}6438^2 \cdot 10^{-6} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}$$

$$t_{an} = 8760 \times 2{,}7 \cdot 10^{-6} = 0{,}0236 \text{ ore/an}$$

Luînd în considerare și căderile tuturor aparatelor intercalate în circuitul unui transformator (fig. 3, a) se obțin :

$$\lambda_c = \Sigma \lambda_j = 0{,}113$$

$$X_c = \Sigma X_j = 1{,}701.10^{-6}$$

și deci

$$T_s = \frac{1}{0{,}113} = 8{,}85 \text{ ani}$$

$$T_{ts} = \frac{X_c}{\lambda_c} = 0{,}0151 \text{ ani} = 132 \text{ ore}$$

$$t_{an} = 8730 \times 1{,}701 \cdot 10^{-3} = 14{,}9 \text{ ore}$$

In cazul a două circuite de transformatoare în paralel (fig. 3, b), fiecare dintre acestea putînd asigura tranzitul necesar la vîrful de sarcină:

$$T_s = \frac{1}{2 \times 0{,}113 \times 1{,}701 \cdot 10^{-3}} = 2600 \text{ ani}$$

$$T_{ts} = \frac{132}{2} = 66 \text{ ore}$$

$$C_t = 1{,}701^2 \cdot 10^{-6} = 2{,}0 \cdot 10^{-6}$$

$$t_{an} = 8760 \times 2{,}9 \cdot 10^{-6} = 0{,}0254 \text{ ore/an}$$

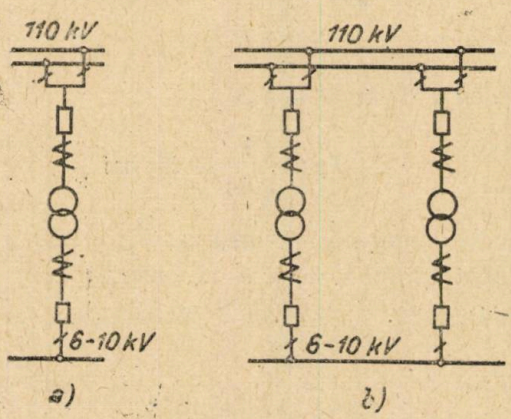


Fig. 3

Rezultatele de mai sus pun în evidență faptul că aparatajul intercalat în circuitul transformatorilor și în special întreruptorii de pe partea de 110 kV, conduc la o micșorare apreciabilă a duratei medii a stării de succes.

Rezultatele obținute mai pun de asemenea în evidență gradul înalt de siguranță care se obține în practică la nivelul etajului transformatorilor, prin folosirea în stațiile importante a cîte doi transformatori, fiecare dintre aceștia, supraîncărcat în limite admisibile, putînd asigura vîrful de sarcină.

2. In continuare se studiază siguranța în cazul alimentării printr-o schemă bloc linie-transformator (fig. 4, a).

Pentru un bloc :

$$\lambda_B = \Sigma \lambda_j = 1{,}623$$

$$X_B = \Sigma X_j = 3{,}42 \cdot 10^{-3}$$

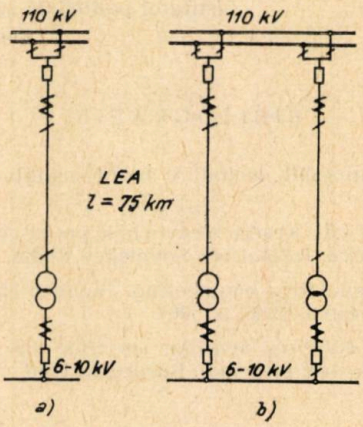


Fig. 4

și deci

$$T_s = 0{,}615 \text{ ani}$$

$$T_{is} = \frac{X_B}{\lambda_B'} = 2{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ ani} = 18{,}4 \text{ ore}$$

$$t_{an} = 29{,}2 \text{ ore/an}$$

În cazul prevederii unui al doilea bloc (fig. 4, b)

$$T_s = \frac{1}{2 \times 1{,}623 \times 3{,}42 \cdot 10^{-3}} = 90 \text{ ani}$$

$$T_{is} = \frac{18{,}4}{2} = 9{,}2 \text{ ore}$$

$$C_i = 3{,}42^2 \cdot 10^{-6} = 11{,}7 \cdot 10^{-6}$$

$$t_{an} = 0{,}103 \text{ ore/an}$$

Soluția de alimentare printr-un singur bloc se caracterizează printr-un nivel de siguranță destul de scăzut, durata medie a întreruperilor anuale ridicîndu-se la circa 30 ore. În proiectare trebuie verificat dacă mărirea investițiilor prin prevederea unui al doilea bloc este justificată de reducerea pagubelor probabile care vor fi aduse economiei naționale în urma întreruperilor în alimentarea printr-un singur bloc. Un calcul sumar făcut pentru o sarcină medie întreruptă de cca. 20 MW și o pagubă medie de

3 lei/kWh nelivrată arată că s-ar justifica investițiile suplimentare de circa 13 milioane lei necesare pentru prevederea celui de al doilea bloc, durata lor de recuperare rezultînd de ordinul a 8 ani.

Catedra de centrale electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Gnedenco, B. V.*, Matematiceskie metodî v teorii nadiojnosti. Moscova, Izdatelstvo Nauka, 1965, 524 p.
2. *Kozlov, B. A.* și *Ușakov, I. A.*, Kratki spravocinik po rasciotu nadiojnosti radioelektronoi aparaturî. Moscova, Izdatelstvo Sovetskoe Radio, 1966, 432 p.
3. *Sandler, H. G.*, System reliability engineering. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey, 1963 (Moscova, 1966, p. 300).
4. *I.S.P.E.* — Studiu privind stabilirea avariilor specifice din anii 1963 și 1964 pe categorii de echipament electric principal. București, 1966.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

REŢELE ELECTRICE

C. Z.: 621.316 : 621.317.3 : 621.3.025.3 : 621.372.6 : 621.3.011

ASPECTE PRIVIND APLICAREA TEORIEI COMPONENTELOR SIMETRICE ÎN ANALIZA REGIMURILOR NESIMETRICE A REŢELELOR ELECTRICE*)

M. BERCOVICI, A. ARIE, MARIA TUDOSE

I. Prezentarea problemei

Pentru determinarea regimurilor nesimetrice a reţelelor electrice se aplică, în scopul reducerii calculului unei reţele multifilare la o reţea monofilară, teoria componentelor simetrice.

Aplicarea acestei teorii a condus uneori la nepreciziuni, atît în ceea ce priveşte mărimile fizice folosite, cît şi în ce priveşte sensul fizic al operaţiilor matematice, care se aplică acestor mărimi.

Astfel, în numeroase lucrări de specialitate [1], [2], [3], se definesc impedanţele directe, inverse şi homopolare numai pe baza operaţiilor matematice din care ele rezultă.

Din această cauză, este oportună aducerea unor precizări, atît asupra mărimilor ce se folosesc în calculele cu componentele simetrice, cît şi asupra operaţiilor matematice utilizate. Pentru aceasta, în prezenta lucrare (cap. II) se accentuează asupra neidentităţii care există între noţiunile de secvenţă directă, inversă şi homopolară ataşate mărimilor electrice ce se bucură de proprietatea de a avea succesiune în timp — curenţi şi tensiuni (fazori) — şi tipul de operaţie folosit pentru obţinerea acestor mărimi, acelaşi tip de operaţie putînd fi aplicat şi unor mărimi care nu sînt funcţie de timp, ca de exemplu, impedanţe şi admitanţe.

Pentru a putea face distincţia amintită, în lucrare se introduc — pentru indicarea tipului de operaţie folosit asupra unei mărimi date — notaţiile 0, 1 şi 2, iar pentru indicarea secvenţei de succesiune în timp a mărimilor care admit acest lucru, notaţiile *d*, *i* şi *h*, corespunzătoare secvenţelor directe, inverse şi homopolare.

---

*) Lucrare comunicată le sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej, Bucureşti, 27—29 mai 1966.

Se arată apoi, sensul în care notațiile *d*, *i* și *h* pot fi extinse și atașate și mărimilor care nu sînt funcție de timp.

Pe baza prezentărilor efectuate, atît asupra aspectului fizic al mărimilor folosite în calcule, cît și asupra aspectului matematic, se precizează sensul noțiunii de simetrie folosită în teoria rețelelor electrice, atît asupra mărimilor care posedă proprietatea de succesiune în timp, cît și pentru mărimi care nu au această proprietate.

În continuare — cap. III și IV din lucrare — se definesc și se introduc matricele de „simetrie" corespunzătoare elementelor rețelelor simetrice ale sistemului electric studiat și matricele de „abatere de la sisteme" corespunzătoare elementelor — impedanțe sau admitanțe — care introduc nesimetria în sistem.

Se arată că elementele acestor matrici au sensul fizic al unor operatori de transformare de secvență și, în consecință, sînt denumite în lucrare „transformatori de secvență".

În cap. V din lucrare, pe baza precizărilor și a noțiunilor introduse în primele două capitole, se stabilește o ecuație generală matricială, în cazul unei rețele complexe cu multiple nesimetrii, calculul fiind analog unui calcul în scalar efectuat asupra unei rețele monofazice.

Pentru aceasta, în funcție de numărul de noduri din sistem, în care apar elemente nesimetrice, rețeaua în totalitatea ei — în care s-a considerat și rețeaua de nul — denumită în lucrare „rețea degenerată" — este subdivizată în rețele simetrice cărora le corespund matrticele „de simetrie", interconectate prin elemente care introduc nesimetria și cărora le corespund matrici „de abatere de la simetrie". Este de remarcat că prin considerarea în calcul a rețelei de nul, de impedanța nulă și cu forțe electromotoare nule, se obține o simetrizare a rețelelor din punct de vedere al interconectării lor, astfel încît nu mai apare necesară folosirea noțiunilor de nesimetrii longitudinale și transversale.

Pe baza rețelei generale unitare obținute, rețea care cuprinde un ansamblu de subrețele simetrice — reduse în raport cu nodurile în care apar nesimetriile — și descrise cu ajutorul „matricelor de simetrie' — și un ansamblu de subrețele nesimetrice, descrise cu ajutorul „matricelor de abatere de la simetrie" și introducînd în calcul vectorii coloană $\underline{E}_k$, $\underline{U}_k$ și $\underline{I}_k$, conținînd componentele simetrice ale tensiunilor electromotoare, tensiunilor de sarcină și curenților corespunzînd nodurilor *k*, în care apare nesimetria, se obține o ecuație matricială unitară asemănătoare unei ecuații scalare stabilită pentru o rețea monofazică. Mărimilor tensiuni și curenți din ecuația în scalar, le corespund mărimile vectoriale coloană, conținînd componente simetrice, ale tensiunilor și curenților din ecuația în matricial, iar mărimilor impedanțelor, respectiv admitanțelor din ecuația în scalar, le corespund operatorii „matricei de simetrie" sau de „abatere de la simetrie" din ecuația în matricial. În capitolele următoare ale lucrării sînt tratate în detaliu problemele enumerate, arătîndu-se în final modul de aplicare al ecuației unitare obținute.

II. Sensul fizic al mărimilor electrice folosite în calculul cu componentele simetrice. Neidentitatea dintre operația matematică și noțiunile de succesiune directă, inversă și homopolară

Mărimile electrice care intervin în determinarea regimurilor rețelelor electrice se pot împărți în două grupe: mărimi funcție de timp, ca de exemplu, curenți și tensiuni, și mărimi care, într-un regim presupus liniar, nu sînt funcție de timp — rezistențe, inductivități, capacități, perditanțe, astfel încît ecuațiile integro-diferențiale care descriu fenomenul prezintă coeficienți constanți.

Într-o rețea polifazată, în cazul particular o rețea trifazată, fiecărei faze în parte i se poate asocia mărimi electrice corespunzătoare fazei respective.

Atașînd noțiunea „de simetrie" mărimilor electrice armonice funcție de timp, în sensul unei egalități în amplitudine a tuturor mărimilor electrice de același gen, corespunzătoare fazelor sistemului și a unei egalități de succesiune în timp a acelorași mărimi, este necesar de a se defini și preciza sensul noțiunii de simetrie și în cazul mărimilor care nu sînt funcție de timp.

Dacă se consideră un regim liniar în care parametrii rețelei sînt constanți, rezultă că în acest caz noțiunea de „simetrie" se referă la egalitatea acestor parametri electrici ca: rezistențe, inductivități, capacități, perditanțe, corespunzători fiecărei faze.

În sensul noțiunii de „simetrie" arătat, mărimile electrice armonice funcție de timp asociate fiecărei faze — în cazul particular al unui sistem trifazat — pot fi grupate după modul în care ele *se succed* în timp, și anume:

— *mărimi de succesiune homopolară* — simultane, egale pe toate fazele;

— *mărimi de succesiune directă* — egal defazate pe toate fazele, în sensul de succesiune convențional ales;

— *mărimi de succesiune inversă* — egal defazate pe toate fazele, în sensul invers față de reperul convențional ales.

Este evident că noțiunea de „succesiune" nu poate fi aplicată direct și mărimilor care nu sînt funcție de timp.

Aplicarea denumirii „direct", „invers" sau „homopolar' și mărimilor constante în raport cu timpul nu se poate face decît în mod indirect, și anume prin intermediul mărimilor care sînt funcție de timp.

În raport cu grupul de mărimi electrice variabile în timp, asupra cărora operează mărimile constante, acestora din urmă li se poate aplica denumirea de „direct", „invers" sau „homopolar".

În regim liniar și staționar, printr-o reprezentare în complex simplificat a ecuațiilor integro-diferențiale, care descriu fenomenele dintr-o rețea electrică, atît mărimile electrice variabile în timp, cît și parametrii rețelei sînt descrise cu ajutorul unor expresii complexe.

Semnificația fizică a acestor mărimi complexe este însă diferită, după cum aceste mărimi complexe sînt imaginile unor mărimi variabile în timp — fazori—, sau ale unor mărimi constante în raport cu timpul și pentru care se propune în prezenta lucrare denumirea de defazori. (Unii autori, de exemplu tov. profesor I. S. Antoniu, propune denumirea de operatori).

Astfel argumentul φ al unui fazor, care reprezintă de exemplu, un curent, este imaginea defazajului în timp al acestui curent considerat armonic, față de o curbă armonică aleasă drept reper.

Argumentul ψ al unui defazor — de exemplu, al unei impedanțe — capătă un sens fizic similar *numai* prin intermediul unei mărimi armonice funcție de timp, de pildă un curent asupra căruia operează această impedanță în scopul obținerii unei alte mărimi armonice, funcție de timp.

La fel, decalajul $\varphi_{12}=\varphi_1-\varphi_2$, între doi fazori, $\underline{I_1}=I_1\,\underline{|\varphi_1}$ și $\underline{I_2}=I_2\,\underline{|\varphi_2}$ imagini a doi curenți i_1 și i_2, reprezintă defazajul în timp între curenții i_1 și i_2. Iar decalajul $\psi_{12}=\psi_1-\psi_2$ între două impedanțe $\underline{Z_1}=Z_1\,\underline{|\psi_1}$ și $\underline{Z_2}=Z_2\,\underline{|\psi_2}$ reprezintă defazajul în timp între două tensiuni ale căror imagini s-ar obține dacă în planul complex corespunzător s-ar aplica pe rînd impedanțele $\underline{Z_1}$ și $\underline{Z_2}$ unuia și aceluiași curent $\underline{I}$.

Într-un sistem trifazic, succesiunei în timp a mărimilor electrice instantanee — considerate mărimi armonice — îi corespunde în planul complex o succesiune a imaginilor mărimilor considerate, în raport cu un sens de rotație convențional ales.

Mărimilor electrice armonice, considerate simetrice, în sensul definit, le corespunde trei fazori de modul egal, și egal decalați între ei (fie cu decalaj $\pm 360°$, fie cu $\mp 120°$). În acest caz, sistemului simetric format de trei mărimi complexe i se poate atașa noțiunea de succesiune de timp, respectiv de succesiune homopolară, directă și inversă.

După cum este cunoscut, determinarea reprezentărilor în complex a unor sisteme simetrice armonice — curenți și tensiuni — în funcție de reprezentările în complex a unor sisteme armonice oarecare, se face — de exemplu, pentru curenți — pe baza unor relații liniare de forma:

$$\begin{aligned}
\underline{I_h} &= \frac{1}{3}\,(\underline{I_R}+\underline{I_S}+\underline{I_T})\\
\underline{I_d} &= \frac{1}{3}\,(\underline{I_R}+a\,\underline{I_S}+a^2\,\underline{I_T}) \qquad (2.1)\\
\underline{I_j} &= \frac{1}{3}\,(\underline{I_R}+a^2\cdot\underline{I_S}+a\,\underline{I_T})
\end{aligned}$$

în care expresiile $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$ și $\underline{I}_i$ sînt fazorii pe faza R, aleasă drept fază de referință a sistemelor simetrice de curenți, de succesiune homopolară directă și inversă.

Sensul fizic, al modulelor cît și al argumentelor fazorilor obținuți pe baza relațiilor (2.1), este cel arătat.

Este de remarcat că același tip de relație liniară, dat în ecuația (2.1), se poate aplica însă, oricărui tip de mărime complex (și fazorilor și defazorilor).

Astfel, aplicînd relațiile liniare (2.1) unor mărimi complexe care nu reprezintă funcții de timp cum sînt, de exemplu, trei impedanțe oarecare $\underline{Z}_R$, $\underline{Z}_S$, $\underline{Z}_T$, simetrice sau nu pe cele trei faze, nu se pot obține mărimi care au semnificație fizică în raport cu noțiunea de succesiune. Aplicarea însă, a unuia și aceluiași tip de relații liniare imaginilor în complex a unor mărimi care reprezintă sau nu mărimi funcție de timp poate conduce, fie la mărimi care au sens fizic în raport cu timpul, fie la niște numere complexe oarecare.

Ceea ce este comun în ambele cazuri este tipul de operație matematic folosit.

Tipul de operație matematică se obține dacă, pentru trei mărimi complexe oarecari $\underline{A}_R$, $\underline{A}_S$ și $\underline{A}_T$, se face o transformare de forma:

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{3}(\underline{A}_R + \underline{A}_S + \underline{A}_T) \qquad (2.2,a)$$

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{3}(\underline{A}_R + a\underline{A}_S + a^2\underline{A}_T) \qquad (2.2,b)$$

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{3}(\underline{A}_R + a^2\underline{A}_S + a\underline{A}_T) \qquad (2.2,c)$$

Din relațiile (2.2) rezultă că mărimile complexe $\underline{A}_R$ $\underline{A}_S$ și $\underline{A}_T$ au valorile:

$$\underline{A}_R = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \qquad (2.3,a)$$

$$\underline{A}_S = \underline{A}_0 + a^2\underline{A}_1 + a\underline{A}_2 \qquad (2.3,b)$$

$$\underline{A}_T = \underline{A}_0 + a\underline{A}_1 + a^2\underline{A}_2 \qquad (2.3,c)$$

Relațiile (2.2) se pot aplica oricăror mărimi. Este de observat că dacă mărimile $\underline{A}_R$, $\underline{A}_S$ și $\underline{A}_T$ sînt imaginile unor funcții armonice de timp, atunci printr-o operație de tipul relației (2.2, a) — care o denumim operație de ordinul 0—se obține componenta de secvență homopolară pentru faza de referință R a sistemului. Printr-o operație de tipul relației (2.2, b) — pe care o denumim operație de ordinul 1 — se obține componenta de

secvență directă, pentru faza de referință R, a sistemului și printr-o operație de tipul relației (2.3, c) — pe care o denumim operație de ordinul 2 — se obține componenta de secvență inversă pentru faza de referință R a sistemului.

Faptul că operația matematică de tipul 0 conduce întotdeauna — în cazul funcțiilor armonice de timp — la componente de succesiune homopolară, iar operațiile de tipul 1 și 2 la componente de succesiune directă, respectiv inversă, face necesară precizarea între operația matematică propriu-zisă și noțiunea de succesiune directă, inversă și homopolară.

Dacă însă, operația 0, 1 sau 2 se poate aplica oricăror mărimi, și deci și admitanțelor și impedanțelor (— defazori —), denumirea de „direct", „invers" sau „homopolar" se poate extinde și acestora din urmă numai prin intermediul sistemelor de fazori — curenți sau tensiuni — asupra cărora operează defazorul.

Apar astfel noțiunile de impedanțe homopolare, directe și inverse, corespunzătoare sistemelor de curenți homopolari, direcți și inverși, respectiv admitanțe directe, inverse și homopolare, corespunzătoare sistemelor de tensiuni directe și homopolare, asupra cărora ele pot opera.

Rezultă de aici că în calculele ce se efectuează cu componentele simetrice să se folosească doi *indici distincți*, și anume : un indice care să arate operația matematică ce se efectuează asupra mărimilor respective și un indice care să marcheze succesiunea în timp — homopolară, directă și inversă

De remarcat că în cazul reprezentărilor în complex simplificat ale funcțiilor armonice de timp — întrucît o mărime homopolară se obține întotdeauna printr-o operație de ordinul 0, o mărime directă printr-o operație de ordinul 1, iar o mărime inversă printr-o operație de ordinul 2 — se poate folosi un singur indice, al doilea subînțelegîndu-se, putînd să fie sau nu marcat.

In cazul defazorilor, este necesară folosirea a doi indici, un indice care să arate transformarea matematică prin care s-a obținut impedanța de calcul (respectiv admitanța de calcul) și un indice care să arate succesiunea de curenți (respectiv de tensiuni) asupra cărora se aplică sistemul de defazori considerat.

III. Aplicarea operațiilor 0, 1 și 2 asupra impedanțelor nesimetrice care apar într-un sistem trifazic

Se consideră un sistem electric trifazat oarecare (fig. 3.1) de impedanțe proprii și mutuale oarecari — respectiv $\underline{Z_R} \neq \underline{Z_S} \neq \underline{Z_T} \neq \underline{Z_N}$ și $\underline{Z_{RS}} \neq \underline{Z_{ST}} \neq \neq \underline{Z_{TR}} \neq \underline{Z_{NR}} \neq \underline{Z_{NS}} \neq \underline{Z_{NT}}$ — căruia i se aplică un sistem de tensiuni oarecari $\underline{U_R} \neq \underline{U_S} \neq \underline{U_T}$, tensiunile fiind măsurate în raport cu borna de intrare a conductorului neutru (notată cu N).

Se pune problema de a se găsi relațiile dintre componentele simetrice ale tensiunilor $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, $\underline{U}_T$ (aplicate la borne) și componentele simetrice ale curenților $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$, și $\underline{I}_T$ (fig. 3.1.).

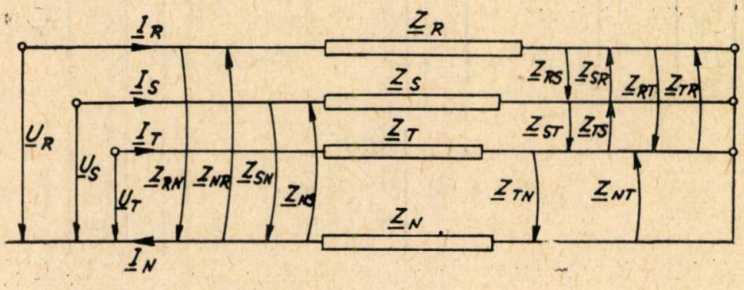


Fig. 3.1

Pentru aceasta, este de observat că dacă curenții $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ și $\underline{I}_T$ se descompun în componentele simetrice pe faze de referință R, $\underline{I}_{dR}$, $\underline{I}_{iR}$, $\underline{I}_{hR}$, denumite pe scurt $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$ și $\underline{I}_h$, atunci tensiunile $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$ și $\underline{U}_T$ satisfac relația de forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{R,d} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{S,d} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{T,d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \underline{I}_d + \begin{bmatrix} \underline{Z}_{R,i} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{S,i} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{T,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \underline{I}_i +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{Z}_{R,h} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{S,h} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{T,h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{I}_h \qquad (3.1)$$

Indicii d, i și h din dreptul impedanțelor se referă la impedanțele : directe $\underline{Z}_{R,d}$, $\underline{Z}_{S,d}$, $\underline{Z}_{T,d}$; inverse $\underline{Z}_{R,i}$, $\underline{Z}_{S,i}$, $\underline{Z}_{T,i}$; homopolare $\underline{Z}_{R,h}$, $\underline{Z}_{S,h}$, $\underline{Z}_{T,h}$, corespunzătoare sistemelor de curenți cu care aceste impedanțe produc căderi de tensiune (valorile acestor impedanțe se dau în anexa de calcul nr. 1).

Relațiile (3.1.) arată că în condițiile exprimării curenților $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ și $\underline{I}_T$ în funcție de componentele simetrice corespunzătoare $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$ și $\underline{I}_h$, tensiunea fiecărei faze se poate exprima numai funcție de curenții direcți, inverși și homopolari care străbat faza respectivă. Este ca și cum ar avea loc o decuplare (fictivă) a fazelor.

Pentru obținerea unei relații între componentele simetrice ale tensiunilor și componentele simetrice ale curenților, se face transformarea :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

Înlocuindu-se relația (3.2 în relația 3.1), se obține în final :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} \underline{Z}_R, d & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_S, d & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_T, d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \underline{I}_d + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{Z}_R, i & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_S, i & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_T, i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \underline{I}_i + \tag{3.3}$$

$$\left. + \begin{bmatrix} \underline{Z}_R, h & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_S, h & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_T, h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{I}_h \right]$$

Efectuînd calculul, rezultă :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\zeta}_h^0 & \underline{\zeta}_d^2 & \underline{\zeta}_i^1 \\ \underline{\zeta}_h^1 & \underline{\zeta}_d^0 & \underline{\zeta}_i^2 \\ \underline{\zeta}_h^2 & \underline{\zeta}_d^1 & \underline{\zeta}_i^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

În relația (3.4) indicii 0, 1 și 2 indică următoarele transformări matematice :

$$\underline{\zeta}_\lambda^0 = \frac{1}{3} [\underline{Z}_R, \lambda + \underline{Z}_S, \lambda + \underline{Z}_T, \lambda]$$

$$\underline{\zeta}_\lambda^1 = \frac{1}{3} [\underline{Z}_R, \lambda + a \underline{Z}_S, \lambda + a^2 \cdot \underline{Z}_T, \lambda] \tag{3.5}$$

$$\underline{\zeta}_\lambda^2 = \frac{1}{3} [\underline{Z}_R, \lambda + a^2 \underline{Z}_S, \lambda + a \cdot \underline{Z}_T, \lambda]$$

Indicii λ, trecuți la subsolul impedanțelor, indică secvențele curenților cu care aceste impedanțe produc căderi de tensiune.

Este de observat că ecuația (3.4) prezintă o simetrie în ceea ce privește indicii de operație matematică.

Astfel, subînțelegînd și indicii de operații corespunzători fazorilor, se observă că suma indicilor curent-impedanță conduce la indicele operației matematice prin care s-ar obține componenta corespunzătoare de succesiune a tensiunii.

În cazul unui sistem simetric de impedanțe — în sensul definit anterior de simetrie pentru impedanțe — există pentru toate secvențele relația :

$$\underline{Z}_R, \lambda = \underline{Z}_S, \lambda = \underline{Z}_T, \lambda = \underline{Z}_\lambda \tag{3.6}$$

în care, indicele λ ia valorile *d*, *i* sau *h*.

În acest caz, în matricea impedanțelor din relația (3.4) rămîn numai termenii de ordinul 0, de pe diagonală.

Ecuația (3.4) capătă în acest caz forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\zeta}^0_h & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\zeta}^0_d & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\zeta}^0_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

în care :

$$\underline{\zeta}^0_\lambda = \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_{R,\lambda} + \underline{Z}_{S,\lambda} + \underline{Z}_{T,\lambda}\right) = \underline{Z}^0_\lambda = \underline{Z}_\lambda$$

$$\underline{\zeta}^1_\lambda = 0 \tag{3.8}$$

$$\underline{\zeta}^2_\lambda = 0$$

Pentru $\lambda = h, d$ sau i se obține :

$$\underline{\zeta}^0_h ; = \underline{Z}_h ; \underline{\zeta}^0_d = \underline{Z}_d ; \underline{\zeta}^0_i = \underline{Z}_i \tag{3.9}$$

în care, $\underline{Z}_h$, $\underline{Z}_d$, $\underline{Z}_i$ sînt impedanțele homopolare, directe și inverse corespunzătoare sistemului simetric.

În acest caz, analizînd relația (3.4) se observă că dacă sistemul electric prezintă o simetrie din punct de vedere al impedanțelor, se obține o decuplare și între sistemele de secvență directă, inversă și homopolară, respectiv tensiunea de o anumită secvență este o funcție liniară de curenții de aceeași secvență.

În cazul general însă, chiar dacă ar circula în sistemul electric considerat numai curenți simetrici, de o anumită secvență, de exemplu, de secvență directă, apar — pe lîngă căderîle de tensiune directă — și căderi de tensiune pe secvențele inverse și homopolare.

În plus, este de observat, analizînd matricea impedanțelor din relația (3.4) că pentru o anumită configurație de impedanțe, se poate obține — operînd asupra mărimilor funcție de timp — o transformare de secvență.

Astfel, dacă se face ipoteza că în ecuația (3.4) $\underline{I}_d \neq 0$ și $\underline{I}_i = 0$ și $\underline{I}_h = 0$ și se dorește să se obțină numai $\underline{U}_i \neq 0$, ($\underline{U}_d = 0$ și $\underline{U}_h = 0$) este necesar și suficient ca :

$$\underline{\zeta}^2_d = 0 \; ; \; \underline{\zeta}^0_d = 0 \text{ și } \underline{\zeta}^1_d \neq 0.$$

Acest lucru se poate realiza pentru impedanța directă, dacă :

$\underline{Z}_{S,d} = a^2\underline{Z}_{R,d}$ și $\underline{Z}_{T,d} = a\underline{Z}_{R,d}$ (în acest caz este necesar o rezistență negativă).

Dacă s-ar realiza într-un aparat o astfel de configurație a sistemului de impedanțe prin care ar circula un sistem de curenți de secvență directă, s-ar obține la borne un sistem de tensiuni de secvență inversă. Din cauza aceasta, matricea respectivă ecuației 3.4 se poate denumi matricea impedanțelor transformatoarelor de secvență.

IV. Stabilirea matricelor de „simetrie" și de „abatere de la simetrie"

Analizînd matricea generală de transformare de secvență de forma :

$$|\underline{T_\zeta}| = \begin{bmatrix} \underline{\zeta_h^0} & \underline{\zeta_d^2} & \underline{\zeta_i^1} \\ \underline{\zeta_h^1} & \underline{\zeta_d^0} & \underline{\zeta_i^2} \\ \underline{\zeta_h^2} & \underline{\zeta_d^1} & \underline{\zeta_i^0} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

ea poate fi exprimată sub forma unei sume a două matrice :

$$\boxed{[\underline{T_\zeta}] = [\underline{S}] + [\underline{\Delta S}]} \tag{4.2}$$

Matricea $[\underline{S}]$ corespunde părții simetrice a sistemului.

Matricea $[\underline{\Delta S}]$ este matricea „abaterii de la simetrie" și corespunde părților nesimetrice ale sistemului.

Matricele $[\underline{S}]$ și $[\underline{\Delta S}]$ au forma :

$$[\underline{S}] = \begin{bmatrix} \underline{Z_h^0} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z_d^0} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z_i^0} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

= matricea de simetrie a sistemului, în care impedanțe $\underline{Z_h^0}$, $\underline{Z_d^0}$, $\underline{Z_i^0}$ corespund părții simetrice ale sistemului (în sensul egalității : $\underline{Z_{R\cdot\lambda}} = \underline{Z_{S\cdot\lambda}} = \underline{Z_{T\cdot\lambda}} = \underline{Z_\lambda^0} = \underline{Z_\lambda}$)

$$[\underline{\Delta S}] = \begin{bmatrix} \underline{\Delta Z_h^0} & \underline{\Delta Z_d^2} & \underline{\Delta Z_i^1} \\ \underline{\Delta Z_h^1} & \underline{\Delta Z_d^0} & \underline{\Delta Z_i^2} \\ \underline{\Delta Z_h^2} & \underline{\Delta Z_d^1} & \underline{\Delta Z_i^0} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

= matricea abaterii de la simetrie a sistemului

în care :

$$\begin{aligned} &\underline{\Delta Z_h^0} = \underline{\zeta_h^0} - \underline{Z_h^0}; \underline{\Delta Z_d^2} = \underline{\zeta_d^2} - 0; \underline{\Delta Z_i^1} = \underline{\zeta_i^1} - 0 \\ &\underline{\Delta Z_h^1} = \underline{\zeta_h^1} - 0; \underline{\Delta Z_d^0} = \underline{\zeta_d^0} - \underline{Z_d^0}; \underline{\Delta Z_i^2} = \underline{\zeta_i^2} - 0 \\ &\underline{\Delta Z_h^2} = \underline{\zeta_h^2} - 0; \underline{\Delta Z_d^1} = \underline{\zeta_d^1} - 0; \underline{\Delta Z_i^0} = \underline{\zeta_i^0} - \underline{Z_i^0} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Folosind schema dată în figura 3.1, în care s-a considerat o rețea pasivă și ținînd seama de relațiile (4.2), (4.3) și (4.4), ecuația (3.4.) capătă forma :

$$\boxed{[\underline{U}] = [\underline{T_\zeta}]\cdot[\underline{I}] = \Big[[\underline{S}] + [\underline{\Delta S}]\Big][\underline{I}]} \tag{4.6}$$

În care :

$$[\underline{U}] = \begin{bmatrix} \underline{U}_h \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}$$ = vectorul coloană al componentelor simetrice ale tensiunii în nodul considerat al sistemului, denumit pe scurt vectorul tensiune în nodul considerat.

$$[\underline{I}] = \begin{bmatrix} \underline{I}_h \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix}$$ = vectorul coloană al componentelor simetrice, ale curentului în locul considerat al sistemului, denumit pe scurt vectorul curentului în locul considerat.

Folosindu-se deci vectorii coloană tensiune $[\underline{U}]$ și de curent $[\underline{I}]$, avînd drept elemente componentele directe, inverse și homopolare și matricele de simetrie și abaterea de simetrie se obține o expresie analogă legii lui Ohm, pentru mărimi scalare, în cazul unui circuit monofazic pasiv.

În cazul unei rețele electrice active, relația (4.6) ia forma analogă legii lui Ohm generalizată, de forma :

$$\boxed{[\underline{U}] = [\underline{T_\zeta}] \cdot [\underline{I}] - [\underline{E}] = \left[[\underline{S}] + [\underline{\Delta S}]\right] \cdot [\underline{I}] - [\underline{E}]} \qquad (4.7)$$

În care, pe lîngă mărimile cunoscute

$$[\underline{E}] = \begin{bmatrix} \underline{E}_h \\ \underline{E}_d \\ \underline{E}_i \end{bmatrix}$$ = vectorul tensiunilor electromotoare din sistem, redus în nodul în care se aplică tensiunea $[\underline{U}]$, respectiv pentru :

$$[\underline{I}] = 0 ; [-\underline{U}]_{\underline{I}=0} = [\underline{E}] .$$

V. Stabilirea unei ecuații matriciale generale în cazul unei rețele cu multiple nesimetrii

Pe baza relațiilor și a considerentelor efectuate, în prezentul capitol se deduce, în cazul unei rețele avînd nesimetrii multiple, o ecuație matricială generală a cărei expresie este analoagă unei ecuații în scalar pentru o rețea monofazată.

Prin considerarea în calcul și a rețelei de nul, care apare ca o rețea cu tensiuni electromotoare nule și de impedanțe nule, denumită în prezenta lucrare „rețea degenerată", în cele ce urmează, rețeaua în totalitatea ei apare ca un ansamblu de rețele simetrice interconectate prin rețele nesimetrice.

Rețelele nesimetrice pot interconecta, fie noduri ale uneia și aceleiași rețele simetrice (fig. 5.1), fie noduri a două sau mai multe rețele simetrice (fig. 5.2), cele două cazuri putînd exista fie separat, fie suprapuse (fig. 5.3).

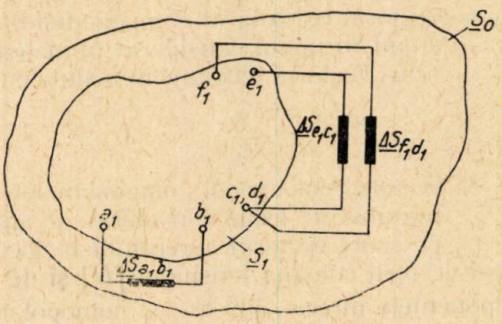


Fig. 5.1

În figurile 5.1, 5.2 și 5.3 s-a notat într-o schemă simbolică elementele simetrice, corespunzînd matricei de simetrie $[S]$ și elementele nesimetrice corespunzînd matricei de abatere de la simetria $[\Delta S.]$

Schema elementelor simetrice este redată printr-un contur care reprezintă faza R a celor trei rețele simetrice (directe, inverse și homopolare). Rețelele simetrice sînt decuplate între ele.

Schema simbolică a elementelor nesimetrice este redată printr-un contur, care reprezintă elementele fazei R, din matricea de abatere de la simetrie. Aceste elemente prezintă cuplaj între ele, tipul cuplajului fiind dat de felul nesimetriei.

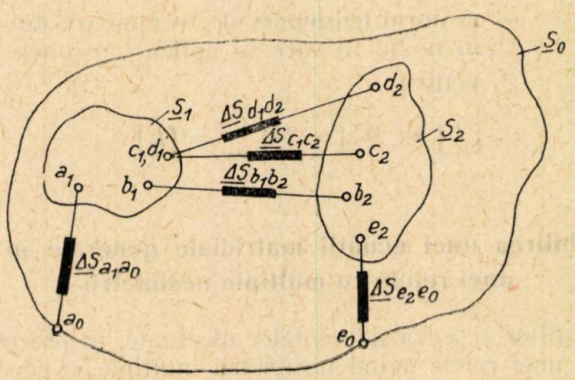


Fig. 5.2

În schemele respective este reprezentată simbolic și rețeaua degenerată de nul, considerată simetrică pentru rețelele directe, inverse și homopolare.

Este de observat că un nod în care apare un element de nesimetrie poate fi simplu sau multiplu.

Un nod de nesimetrie este considerat simplu, dacă din acest nod pleacă o singură latură de nesimetrie [$\underline{\Delta S}_{a_m a_n}$], sau multiplu, dacă din acest nod pleacă mai multe laturi de nesimetrie.

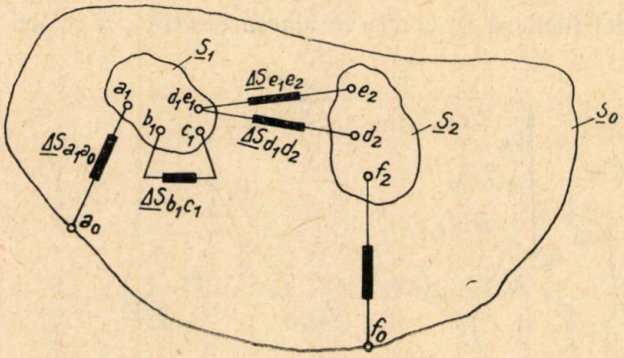


Fig. 5.3

Considerîndu-se un nod multiplu format din mai multe noduri simple suprapuse (exemplu : nodul c_1, d_1, fig. 5.1),cazul unei rețele avînd și noduri multiple, se poate reduce la cazul unei rețele numai cu noduri simple.

Curenților și tensiunilor din nodurile de nesimetrie le corespund vectori coloană ale căror elemente sînt componentele directe, inverse și homopolare ale mărimilor electrice considerate.

Pentru stabilirea ecuației generale matriciale a unei rețele cu multiple nesimetrii, se caută a se determina mărimile electrice din nodurile în care apar nesimetriile în funcție de matricele de simetrie ale rețelelor simetrice și în funcție de matricele de abatere de la simetrie ale rețelelor care introduc nesimetria.

Pentru aceasta, se subdivide rețeaua în subrețele, în sensul că se izolează între ele prin suprafețe geometrice închise Σ, rețelele simetrice, precum și acestea din urmă de rețelele nesimetrice (fig. 5.4).

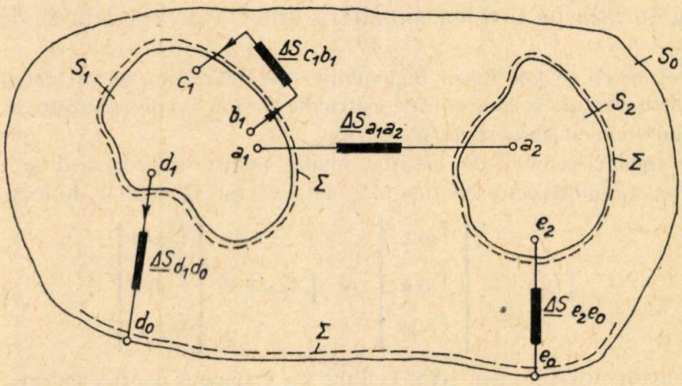


Fig. 5.4

Pentru echivalarea stării electrice a rețelelor electrice izolate cu starea electrică a rețelei nesecționate, se introduc în locurile de secționare vectorii (coloană) tensiuni $\underline{U_K}^{*)}$, raportați față de rețeaua de nul și vectorii (coloană) $\underline{I_K}^{*)}$, astfel încît să se conserve starea electrică a rețelei nesecționate (fig. 5.5).

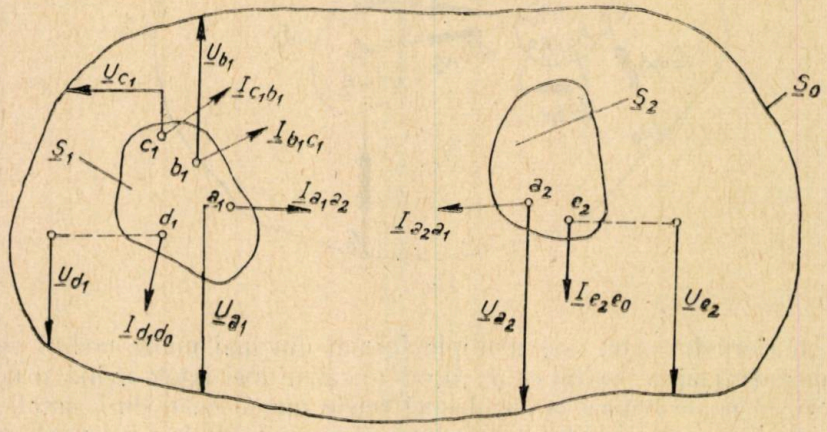


Fig. 5.5

Astfel, rețeaua electrică simetrică secționată apare ca o rețea cu n noduri, în care s-a produs secționarea, fiecărui nod m (nod considerat simplu) fiindu-i atașat o tensiune $\underline{U_{mk}}$ și un curent $\underline{I_{mk,\mu}}$ (nodul μ fiind nodul adiacent nodului m_k pe latura $\underline{\Delta S_{m,\mu}}$).

Nodul μ poate fi pe aceeași rețea simetrică K ca și nodul m_k, sau pe o rețea adiacentă $k+1$. Dacă nodul μ se află pe aceeași rețea ca și nodul m_k, el se va nota cu prima literă următoare literei m_k de pe rețeaua k; dacă nodul μ se află pe o rețea simetrică diferită de rețeaua k, de exemplu,

*) În notațiile ce se vor folosi în paginile următoare, nu se va mai pune semnul de matrice pentru vectori și nici pentru matricele $\underline{S}$ și $\underline{\Delta S}$, corespunzătoare unei rețele simetrice și unui element de nesimetrie.

Se va introduce semnul de matrice numai pentru multivectori și hipermatrici în $\underline{S}$ și $\underline{\Delta S}$. Fiecare multivector conține mai mulți vectori $\underline{I_k}$ sau $\underline{U_k}$ de forma:

$$[\underline{I_k}] = \begin{bmatrix} \underline{I_{h,k}} \\ \underline{I_{d,k}} \\ \underline{I_{i,k}} \end{bmatrix} \text{ și } [\underline{U_k}] = \begin{bmatrix} \underline{U_{h,k}} \\ \underline{U_{d,k}} \\ \underline{U_{i,k}} \end{bmatrix}$$

Fiecare hipermatrice $[\underline{S}]$ sau $[\underline{\Delta S}]$ conține ca elemente matrici pătrate de simetrie sau de abatere de la simetrie.

pe $k + 1$, atunci el se va nota cu aceeași literă ca și nodul m_k, literă avînd însă indicat numărul rețelei respective, de exemplu, m_{k+1}.

Fie s numărul rețelelor electrice ce se pot obține prin secționare și s_k mulțimea de noduri în care apare o nesimetrie, corespunzătoare rețelei electrice k.

Pentru fiecare nod m_k, aparținînd unei mulțimi s_k, se poate scrie o relație de forma :

$$\underline{E_{mk}} - \underline{U_{mk}} = \underline{S_{mk,mk}} \cdot \underline{I_{mk,\mu}} + \sum_{1}^{n} \underline{S_{mk,nk}} \underline{I_{nk,\nu}} \tag{5.1}$$

În care :

$\underline{E_{mk}}$ este vectorul tensiunii electromotoare din spatele impedanței simetrice $\underline{S_{mk,mk}}$ văzut din nodul m_k (acest vector este egal cu tensiunea de mers în gol, corespunzătoare nodului m_k) ;

$\underline{U_{mk}}$ — vectorul tensiunii de funcționare în starea considerată, din modul m_k, față de rețeaua de nul ;

$\underline{S_{mk,mk}}$ — matricea impedanței simetrice proprii văzute din nodul m_k ;

$\underline{S_{mk,nk}}$ — matricea impedanțelor simetrice reciproce dintre nodurile m_k și n_k, de pe una și aceeași mulțime de noduri s_k ;

$\underline{I_{mk,\mu}}$ — vectorul curentului din ramura $m_k\mu$, dirijat spre nodul μ ;

$\underline{I_{nk,\nu}}$ — vectorul curentului din ramura $n_k\nu$ dirijat spre nodul ν .

Ținînd seamă de relația (5.1), pentru fiecare mulțime de noduri s_k, aparținînd uneia și aceleiași rețele electrice S_k, se poate scrie un bloc matricial de forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{E_{ak}} - \underline{U_{ak}} \\ \underline{E_{bk}} - \underline{U_{bk}} \\ \vdots \\ \underline{E_{mk}} - \underline{U_{mk}} \\ \underline{E_{nk}} - \underline{U_{nk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S_{ak,ak}} & \underline{S_{ak,bk}} \cdots & \underline{S_{ak,mk}} & \underline{S_{ak,nk}} \\ \underline{S_{bk,ak}} & \underline{S_{bk,bk}} \cdots & \underline{S_{bk,mk}} & \underline{S_{bk,nk}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \underline{S_{mk,ak}} & \underline{S_{mk,bk}} \cdots & \underline{S_{mk,mk}} & \underline{S_{mk,nk}} \\ \underline{S_{nk,ak}} & \underline{S_{nk,bk}} \cdots & \underline{S_{nk,mk}} & \underline{S_{nk,nk}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_{ak,\alpha}} \\ \underline{I_{bk,\beta}} \\ \vdots \\ \underline{I_{mk,\mu}} \\ \underline{I_{nk,\nu}} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

sau încă :

$$[\underline{E_K}] - [\underline{U_K}] = [\underline{S_K}] \cdot [\underline{I_K}] \tag{5.3}$$

unde :

$[\underline{E_K}]$ — coloana vectorilor (multivectorul) tensiunilor electromotoare din spatele impedanței proprii $[\underline{S_{mk,mk}}]$;

$[\underline{U_K}]$ — coloana vectorilor (multivectorul) tensiunilor în starea de funcționare dată, în nodurile de nesimetrie s_k de pe rețeaua k ;

$[\underline{S_K}]$ — hipermatricea impedențelor proprii și reciproce ale rețelei s_k măsurate din nodurile de nesimetrie, ce formează ansamblul s_k;

$[\underline{I_K}]$ — coloana vectorilor (multivectorilor) curenților care părăsesc rețeaua simetrică S_k, prin nodurile K.

Apar astfel s blocuri, numărul s fiind egal cu numărul rețelelor simetrice izolate, fiecare bloc conținînd drept necunoscute vectorii curenți și tensiuni din nodurile ce formează mulțimile S_k.

Între vectorii curenți $\underline{I_{mk,\mu}}$ și tensiunile $\underline{U_{mk}}$ și $\underline{U_\mu}$ există relații de forma :

$$\boxed{\underline{U_{mk}} - \underline{U_\mu} = \underline{\Delta S_{mk,\mu}} \cdot \underline{I_{mk,\mu}}} \tag{5.4}$$

sau încă :

$$\boxed{\underline{I_{mk,\mu}} = \underline{\Delta S^{-1}_{mk,\mu}} \ (\underline{U_{mk,\mu}} - \underline{U_\mu}) = \underline{\Delta Y_{mk,\mu}} \ (\underline{U_{mk}} - \underline{U_\mu})} \tag{5.5}$$

în care nodurile m_k și μ sînt noduri adiacente laturii $\underline{\Delta S_{mk,\mu}}$ nodul μ putînd să se găsească pe una și aceeași rețea simetrică S_k și atunci, în convenția aleasă, va fi notat cu un indice următor indicelui nodului m_k de exemplu n_k. sau aparține altei rețele simetrice, de exemplu S_{k+1}, și atunci va fi notat cu indicele m_{k+1}.

Rezultă de aici că eliminînd între relații de forma (5.3) și (5.4.), fie curenții $\underline{I_{mk,\mu}}$ în funcție de tensiunile $\underline{U_{mk}}$ și $\underline{U_\mu}$, fie tensiunile $\underline{U_{mk}}$ în funcție de curenții $\underline{I_{mk,\mu}}$ se obțin blocuri de ecuații matriciale care permit rezolvarea sistemului.

In primul caz apar ecuații în tensiuni, care necesită inversarea unei matrici de forma $[\underline{Y}]$, iar în al doilea caz, inversarea unei matrici de forma $[\underline{S}]$.

Eliminarea necunoscutelor $\underline{U_{mk}}$ conduce la o ordonare simplă a ecuațiilor de rezolvat și la o suprapunere liniară directă a matricelor de forma $[\underline{S_k}]$ ale fiecărui bloc matricial K.

Pentru ilustrarea metodei, în cele ce urmează se va aplica metoda în cîteva cazuri caracteristice de nesimetrii ce pot apărea ca :

a) o legătură nesimetrică între două rețele considerate simetrice (una din rețele putînd fi considerată degenerată) ;

b) legături multiple nesimetrice, *legături în paralel* între două rețele *simetrice;*

c) legături multiple nesimetrice, *în serie,* între mai multe rețele simetrice;

d) legături nesimetrice în interiorul uneia și aceleiași rețele simetrice;

e) legături multiple nesimetrice între mai multe rețele simetrice, cel puțin trei, astfel încît să se închidă un inel.

Se arată că ultimul caz, *cazul legăturii în inel,* particularizat, conține cazurile *a, b, c* și *d.*

De asemenea, este de menționat că fiecărui nod m_k în care apare o nesimetrie i se poate atașa două borne a unui dipol (corespunzător fazei de referință a celor trei rețele simetrice directe, inverse și homopolare și redat simbolic în schițele următoare printr-un singur contur), o bornă corespunzînd tensiunii electromotoare $\underline{E}_{mk}$ și o bornă corespunzătoare tensiunii de funcționare în starea dată $\underline{U}_{mk}$.

Astfel, o rețea în care apar m_k nesimetrii poate fi asemuită și asociată cu un multipol cu 2 m_k borne, legarea în serie sau paralel a rețelelor simetrice corespunzînd legăturii în serie sau în paralel a acestor multipoli.

Cazul a: legătură nesimetrică între două rețele simetrice (fig. 5.6).

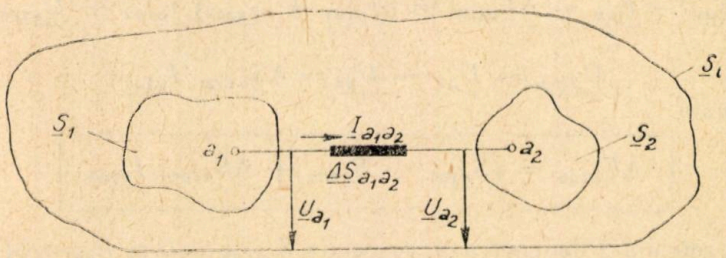


Fig. 5.6

Nodurile de nesimetrie a_1 și a_2 fiindu-le atașate două valori, tensiunile electromotoare $\underline{E}_{a1}$ și $\underline{E}_{a2}$, din spatele impedanțelor proprii $\underline{S}_{a1,a1}$ și $\underline{S}_{a2,a2}$ și tensiunile $\underline{U}_{a1}$ și $\underline{U}_{a2}$, rezultă că fiecărui nod i se poate atașa două borne a_1 și a_{10}, respectiv a_2 și a_{20}, la bornele a_{10} și a_{20} acționînd tensiunile electromotoare $\underline{E}_{a1}$ și $\underline{E}_{a2}$ iar la bornele a_1 și a_2 tensiunile $\underline{U}_{a1}$ și $\underline{U}_{a2}$.

Multipolul corespunzător rețelei din figura 5.6 este redat în figura 5.7.

Ecuațiile ce se pot scrie sînt:

$$\underline{\Delta(EU)}_{a1} = \underline{E}_{a1} - \underline{U}_{a1} = \underline{S}_{a1a1} \cdot \underline{I}_{a1a2} \tag{5.6}$$

— pentru rețeaua (2):

$$\underline{\Delta(EU)}_{a2} = \underline{E}_{a2} - \underline{U}_{a2} = \underline{S}_{a2,a2} \cdot \underline{I}_{a2a1} = - \underline{S}_{a2a2} \cdot \underline{I}_{a1a2} \tag{5.7,a}$$

sau încă:

$$- \underline{\Delta(EU)}_{a2} = \underline{U}_{a2} - \underline{E}_{a2} = + \underline{S}_{a2a2} \cdot \underline{I}_{a1a2} \tag{5.7,b}$$

De remarcat că alegerea semnului + sau — în diferența $\underline{\Delta(EU)}_{mk}$ depinde de semnul curentului care *părăsește* nodul considerat.

Dacă curentul iese din rețea, se consideră semnul + $\Delta(EU)$; în caz contrar, rezultă semnul — $\Delta(EU)$.

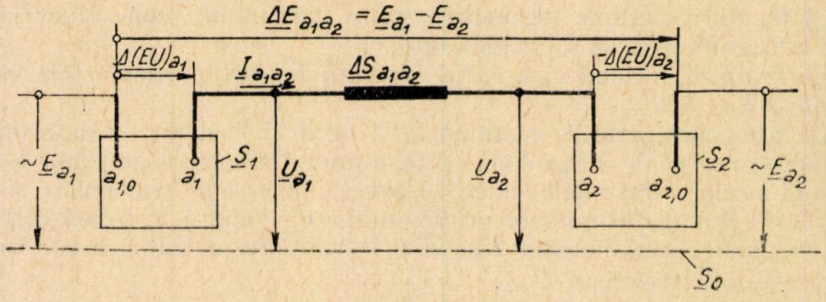


Fig. 5.7

Cu această observație, dacă se adună relațiile (5.6) și (5.7, a), se obține :

$$\underline{E}_{a1} - \underline{E}_{a2} = \underline{\Delta E}_{a1a2} = (\underline{S}_{a1a1} + \underline{S}_{a2a2})\,\underline{I}_{a1a2} + \underline{U}_{a1a2} \tag{5.8}$$

Dar,

$$\underline{U}_{a1a2} = \underline{U}_{a1} - \underline{U}_{a2} = \underline{\Delta S}_{a1a2} \cdot \underline{I}_{a1a2} \tag{5.9}$$

De unde :

$$\boxed{\underline{\Delta E}_{a1a2} = (\underline{S}_{a1a1} + \underline{S}_{a2a2} + \underline{\Delta S}_{a1a2})\,\underline{I}_{a1a2}} \tag{5.10}$$

Dacă rețeaua 2 degenerează, respectiv $\underline{S}_{a2,a2} = 0$ și $\underline{E}_{a2} = 0$ (nodul a_{20} este legat la rețeaua de referință și se confundă cu nodul a_2), atunci relația (5.10) capătă forma :

$$\boxed{\underline{\Delta E}_{a1,a0} = (\underline{S}_{a1,a1} + \underline{\Delta S}_{a1,a0})\,\underline{I}_{a1,a0}} \tag{5.11}$$

corespunzînd unei nesimetrii în raport cu rețeaua de nul, nodul a_0 aparținînd rețelei degenerate de nul.

Cazul b : legături multiple nesimetrice, legături în paralel, între două rețele simetrice.

Se consideră configurația dată în figura 5.8 :

Acestei configurații îi corespunde sistemul de multipoli de forma fig. 59.

Ecuațiile ce se pot scrie sînt :

— pentru rețeaua 1 :

$$\begin{bmatrix} \underline{\Delta(EU)}_{a1} \\ -\underline{\Delta(EU)}_{b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{a1,a1} & -\underline{S}_{a1,b1} \\ -\underline{S}_{b1,a1} & \underline{S}_{b1,b1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{a1,a2} \\ \underline{I}_{b2,b1} \end{bmatrix} \tag{5.12,a}$$

pentru rețeaua 2 :

$$\begin{bmatrix} -\Delta(EU)_{a2} \\ +\Delta(EU)_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{a2,a2} - S_{a2,b2} \\ -S_{b2,a2} \quad S_{b2,b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a1,a2} \\ I_{b2,b1} \end{bmatrix} \tag{5.12,b}$$

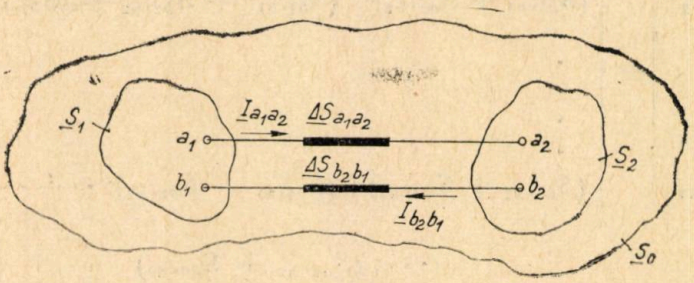


Fig. 5.8

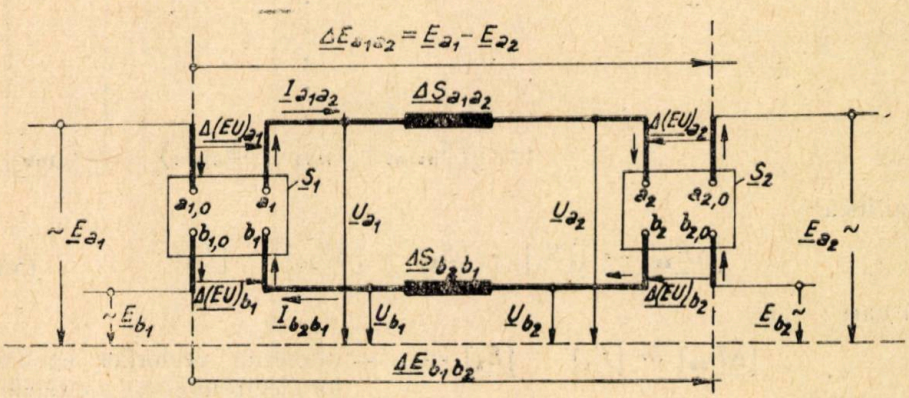


Fig. 9.

Adunînd ecuațiile (5.12, a) și (5.12, b) și ținînd seamă că :

$$U_{a1} - U_{a2} = \Delta S_{a1,a2} \cdot I_{a1,a2} \tag{5.13}$$

și

$$U_{b1} - U_{b2} = \Delta S_{b1,b2} \cdot I_{b1,b2} \tag{5.14}$$

se obține :

$$\begin{bmatrix} \Delta E_{a1,a2} \\ \Delta E_{b2,b1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{a1a1} + S_{a2,a2} + \Delta S_{a1,a2}; -(S_{a1,b1} + S_{a2,b2}) \\ -(S_{b1,a1} + S_{b2,a2}); S_{b1,b1} + S_{b2,b2} + \Delta S_{b1,b2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a1,a2} \\ I_{b2,b1} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

De observat că ecuația (5.15) apare ca în cazul multipolilor care se pun în paralel.

În cazul general, pentru n legături în paralel între două rețele simetrice, se obține o ecuație matricială de forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{\Delta E}_{a1,a2} \\ \underline{\Delta E}_{b1,b2} \\ \vdots \\ \underline{\Delta E}_{n1,n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{S}_{a1,a1} + \underline{S}_{a2,a2} + \underline{\Delta S}_{a1,a2}) ; (\underline{S}_{a1,b1} + \underline{S}_{a2,b2}) : \cdots \\ (\underline{S}_{a1,b1} + \underline{S}_{a2,b2}) ; (\underline{S}_{b1,b1} + \underline{S}_{b2,b2} + \underline{\Delta S}_{b1,b2}); \cdots \\ \vdots \\ (\underline{S}_{a1,n1} + \underline{S}_{a2,n2}) ; (\underline{S}_{b1,n1} + \underline{S}_{b2,n2}); \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots ; (\underline{S}_{a1,n1} + \underline{S}_{a2,n2}) \\ \cdots ; (\underline{S}_{b1,n1} + \underline{S}_{b2,n2}) \\ \vdots \\ \cdots ; (\underline{S}_{n2,n2} + \underline{S}_{n1n1} + \underline{\Delta S}_{n1,n2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{a1a1} \\ \underline{I}_{b1b2} \\ \vdots \\ \underline{I}_{n1n2} \end{bmatrix}$$

sau încă :

$$[\underline{\Delta E}_{12}] = \left[[\underline{S}_1] + [\underline{S}_2] + [\underline{\Delta S}_{12}]\right] \cdot [\underline{I}_{12}] \qquad (5.16)$$

în care :

$[\underline{\Delta E}_{12}] = [\underline{E}_1] - [\underline{E}_2] =$ = diferența vectorilor tensiunilor electromotoare ale rețelelor 1 și 2.

$$[\underline{S}_1] = \begin{bmatrix} \underline{S}_{a1,a1} & \underline{S}_{a1,b1} & \underline{S}_{a1,c1} & \cdots & \underline{S}_{a1,n1} \\ \underline{S}_{b1,a1} & \underline{S}_{b1,b1} & \underline{S}_{b1,c1} & \cdots & \underline{S}_{b1,n1} \\ \vdots & & & & \\ \underline{S}_{n1,a1} & \underline{S}_{n1,b1} & \cdots & \cdots & \underline{S}_{n1,n1} \end{bmatrix}$$ = matricea impedențelor proprii și reciproce ale rețelei 1

$$[\underline{S}_2] = \begin{bmatrix} \underline{S}_{a2,a2} & \underline{S}_{a2,b2} & \cdots & \cdots & \underline{S}_{a2,n2} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \underline{S}_{n2,a2} & \underline{S}_{n2,b2} & \cdots & \cdots & \underline{S}_{n2,n2} \end{bmatrix}$$ = matricea impedențelor proprii și reciproce ale rețeie 2

$$[\underline{S}_{12}]=\begin{bmatrix} \underline{\Delta S}_{a1,a2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{\Delta S}_{b1,b2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \underline{\Delta S}_{n1,n2} \end{bmatrix} = \text{matricea impedanțelor de abateri de la simetrie.}$$

Cazul c : Se consideră o rețea cu nesimetrii multiple montate în serie (fig. 5.10, a)

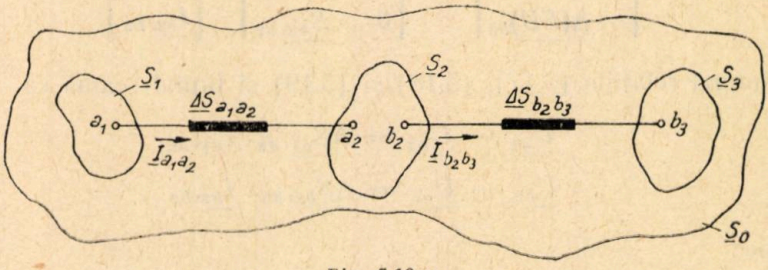


Fig. 5.10 a

Multipolul corespunzător figurii 5.10, a este redat în figura 5.10, b.

Ecuațiile care se pot scrie pentru multipolul din figura 5.10, b sînt următoarele :

— pentru rețeaua 1 :

$$\begin{bmatrix} \underline{\Delta(EU)}_{a1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{a1,a1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{a1,a2} \\ \underline{I}_{b2,b3} \end{bmatrix} \qquad (5.17)$$

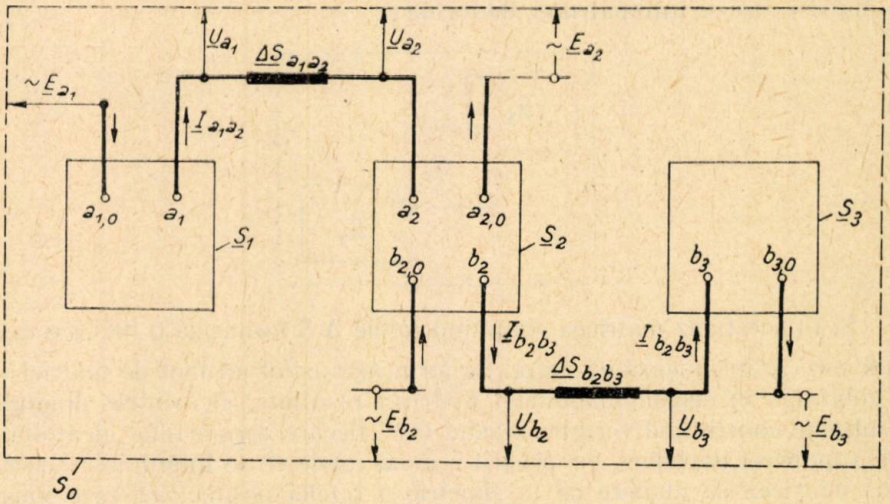


Fig. 5.10 b

— pentru rețeaua 2 :

$$\begin{bmatrix} -\underline{\Delta(EU)}_{a2} \\ +\underline{\Delta(EU)}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{a2,a2} - \underline{S}_{a2,b2} \\ -\underline{S}_{a2,b2} \quad \underline{S}_{b2,b2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{a1,a2} \\ \underline{I}_{b2,b3} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

— pentru rețeaua 3 :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{\Delta(EU)}_{b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \underline{S}_{b3,b3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{a1,a2} \\ \underline{I}_{b2,b3} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Adunînd relațiile (5.17), (5.18) și (5.19) și ținînd seamă că

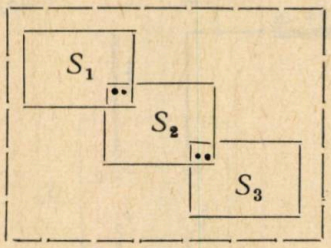
$$\underline{U}_{a1} - \underline{U}_{a2} = \underline{\Delta S}_{a1,a2} \cdot \underline{I}_{a1,a2}$$

$$\underline{U}_{b2} - \underline{U}_{b3} = \underline{\Delta S}_{b2,b3} \cdot \underline{I}_{b2,b3}$$

se obține:

$$\begin{bmatrix} \underline{\Delta E}_{a1,a2} \\ \underline{\Delta E}_{b2,b3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{a1,a1} + \underline{S}_{a2,a2} + \underline{\Delta S}_{a1,a2} & -\underline{S}_{a2,b2} \\ -\underline{S}_{b2,a2} & \underline{S}_{b2,b2} + \underline{S}_{b3,b3} + \underline{\Delta S}_{b2,b3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{a1,b2} \\ \underline{I}_{b2,b3} \end{bmatrix}$$

Se observă că și în acest caz apare *o înlănțuire* formală a matricelor $[\underline{S}_1]$; $[\underline{S}_2]$; $[\underline{S}_3]$ și $[\underline{\Delta S}]$, în sensul că matricele $[\underline{S}_1]$, $[\underline{S}_2]$ și $[\underline{S}_3]$ se înlănțuie astfel încît, în matricea rezultantă, pe diagonală se însumează impedanțele proprii a două rețele ce se inserează succesiv, constituind blocuri de matrici care se întrepătrund, de forma :



Și în acest caz matricea conținînd rețele $\underline{\Delta S}$ formează o matrice diagonală care se însumează ca atare. Se formează astfel un lanț de matrici care se înlănțuie în sensul diagonalei matricei rezultate, elementele diagonalei rezultante constituind verigile acestui lanț, fiecare verigă fiind alcătuită din suma matricei impedanțelor proprii a două rețele ce se înlănțuiesc succesiv, plus matricea de abatere de la simetrie a rețelei nesimetrice care interconectează cele două rețele simetrice considerate.

Cazul d : Legătura nesimetrică între două noduri ale uneia și aceleiași rețele simetrice

Se consideră rețeaua dată în figura 5.11.

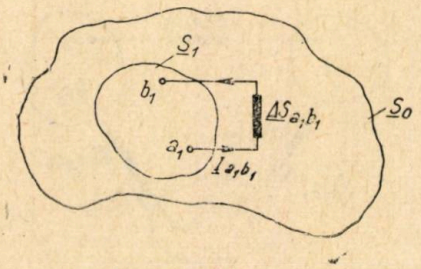


Fig. 5.11

Multipolul corespunzător rețelei din figura 5.11 este redat în figura 5.12.

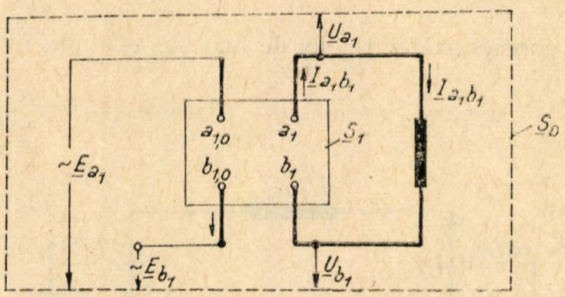


Fig. 5.12

Ecuațiile corespunzătoare acestui cuadripol sînt :

$$\underline{E}_{a1} - \underline{U}_{a1} = \underline{S}_{a1,a1}\,\underline{I}_{a1,b1} - \underline{S}_{a1,b1}\,\underline{I}_{a1,b1} \qquad (5.21,a)$$

$$\underline{U}_{b1} - \underline{E}_{b1} = \underline{S}_{b1,b1}\,\underline{I}_{a1b1} - \underline{S}_{a1,b1}\,\underline{I}_{a1,b1}$$

$$\underline{U}_{a1} - \underline{U}_{b1} = \underline{\Delta S}_{a1\,b1} \cdot \underline{I}_{a1\,b1} \qquad (5.21\ b)$$

Adunînd relațiile (5.21, a) și (5.21, b), se obține :

$$\boxed{\underline{\Delta E}_{a1,b1} = (\underline{S}_{a1,a1} + \underline{S}_{b1b1} + \underline{\Delta S}_{a1b1} - 2\underline{S}_{a1,b1})\,\underline{I}_{a1,b1}} \qquad (5.22)$$

Cazul e : Cazul rețelelor simetrice, închise prin rețele nesimetrice într-un inel

De remarcat că toate cazurile studiate — *a*, *b*, *c* și *d* — sînt cazurile particulare ale unui grup de rețele simetrice interconectate prin rețele nesimetrice, astfel încît să formeze un inel.

Se consideră trei rețele simetrice interconectate (fig. 5.13).

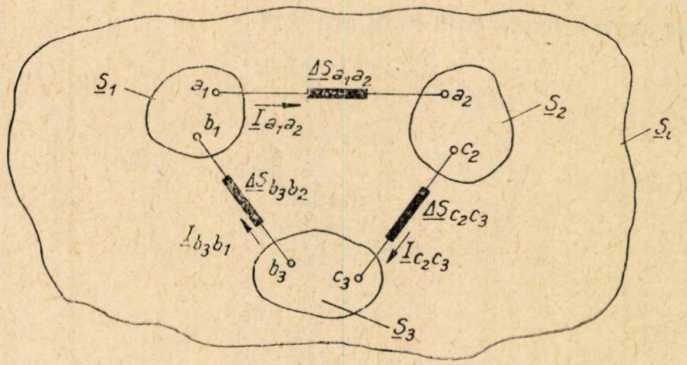


Fig. 5.13

Multipolul corespunzător rețelei de mai sus este dat în figura 5.14.

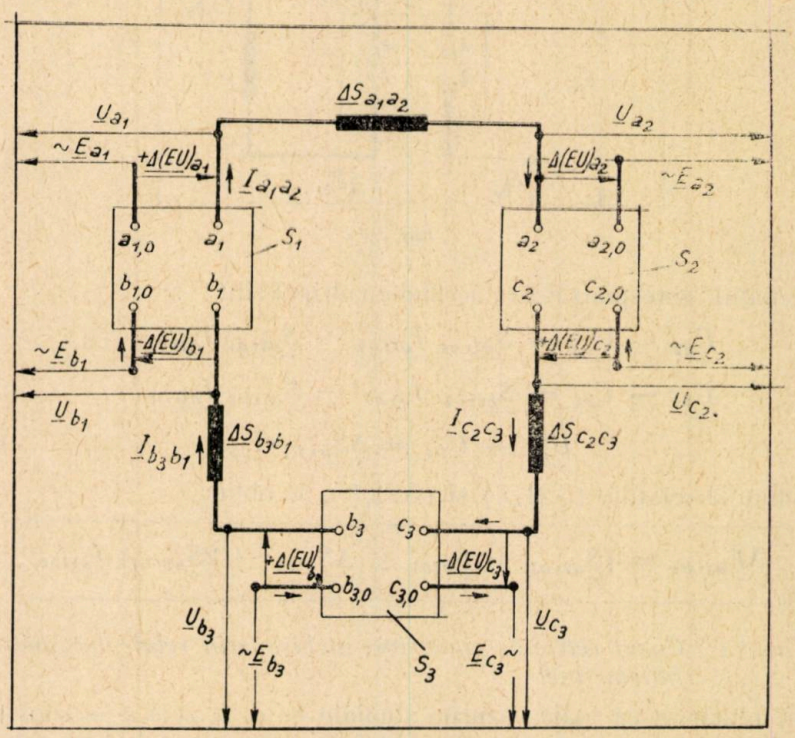


Fig 5.14

Scriindu-se ecuațiile matriciale ale celor trei rețele simetrice, considerate secționate, se obține :

— *pentru rețeaua 1 :*

$$\begin{bmatrix} -\underline{\Delta(EU)_{b1}} \\ +\underline{\Delta(EU)_{a1}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S_{b1,b1}} & -\underline{S_{a1,b1}} & 0 \\ -\underline{S_{a1,b1}} & \underline{S_{a1,a1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I_{b3,b1}} \\ \underline{I_{a1,a2}} \\ \underline{I_{c2,c3}} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

— *pentru rețeaua 2 :*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{\Delta(EU)_{a2}} \\ +\underline{\Delta(EU)_{c2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{S_{a2,a2}} & -\underline{S_{a2,c2}} \\ 0 & -\underline{S_{a2,c2}} & \underline{S_{c2,c2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I_{b3,b1}} \\ \underline{I_{a1,a2}} \\ \underline{I_{c2,c3}} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

— *pentru rețeaua 3 :*

$$\begin{bmatrix} +\underline{\Delta(EU)_{b3}} \\ 0 \\ -\underline{\Delta(EU)_{c3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{S_{b3,b3}} & 0 & -\underline{S_{b3,c3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\underline{S_{c3,b3}} & 0 & +\underline{S_{c3,c3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I_{b3,b1}} \\ \underline{I_{a1,a2}} \\ \underline{I_{c2,c3}} \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

Adunînd ecuațiile (5.23), (5.24) și (5.25) și ținînd seamă de grupul de relații :

$$\underline{U_{b3}} - \underline{U_{b1}} = \underline{\Delta S_{b3,b1}} \cdot \underline{I_{b3,b1}} \tag{5,26,a}$$

$$\underline{U_{a1}} - \underline{U_{a2}} = \underline{\Delta S_{a1,a2}} \cdot \underline{I_{a1,a2}} \tag{5.26,b}$$

$$\underline{U_{c2}} - \underline{U_{c3}} = \underline{\Delta S_{c2,c3}} \cdot \underline{I_{c2,c3}} \tag{5.26,c}$$

se obține :

$$\begin{bmatrix} \underline{\Delta E_{b3,b1}} \\ \underline{\Delta E_{a1,a2}} \\ \underline{\Delta E_{c2,c3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S_{b1,b1}} + \underline{S_{b3,b3}} + \underline{\Delta S_{b1,b3}}; & -\underline{S_{b1,a1}} & -\underline{S_{b3c3}} \\ -\underline{S_{a1,b1}}; & (\underline{S_{a1,a1}} + \underline{S_{a2,a2}} + \underline{\Delta S_{a1a2}}); & -\underline{S_{a2c2}} \cdot \\ -\underline{S_{b3,c3}}; & -\underline{S_{a2,c2}}; & (\underline{S_{c2c2}} + \underline{S_{c3c3}} + \\ & & + \underline{\Delta S_{c2c3}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_{b3,b1}} \\ \underline{I_{a1,a2}} \\ \underline{I_{c2,c3}} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Este de observat că și în acest caz matricele se înlănțuiesc ca și în cazul punerii în serie, formînd un lanț închis.

De remarcat că această configurație de rețea conduce, prin particularizare, la cazurile studiate, și anume: nesimetrii paralele, nesimetrii în serie, nesimetrii în cazul uneia și aceleiași rețele simetrice.

În adevăr, dacă una din rețelele din inel degenerează, de exemplu, rețeaua nr. 3, în sensul că toate nodurile c_3, c_{30}, b_3, b_{30} se confundă respectiv $\underline{S}_{c3,c3} = \underline{S}_{b3,b3} = 0$, $= \underline{S}_{c3,b3} = 0$ fără însă ca $\underline{U}_{c3}$ și $\underline{U}_{b3}$ să fie nuli și deci $\underline{I}_{c2,c3} = \underline{I}_{b3,b1}$, atunci rețeaua din fig. 5.14 se reduce la cea arătată în figura 5.15.

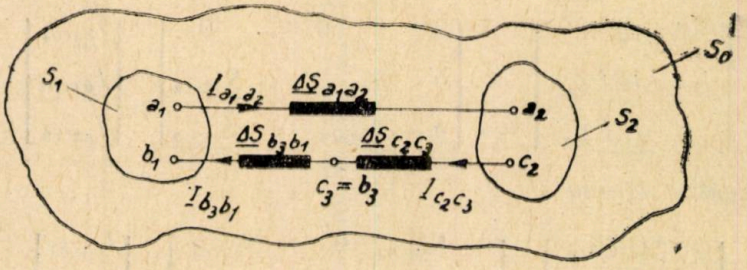


Fig. 5.15

În cazul în care rețeaua nr. 3 degenerează și nodul $c_3 = b_3$, se leagă la rețeaua de nul, respectiv devine un nod al acestei rețele, atunci se interconectează în schemă și această rețea (fig. 5.16).

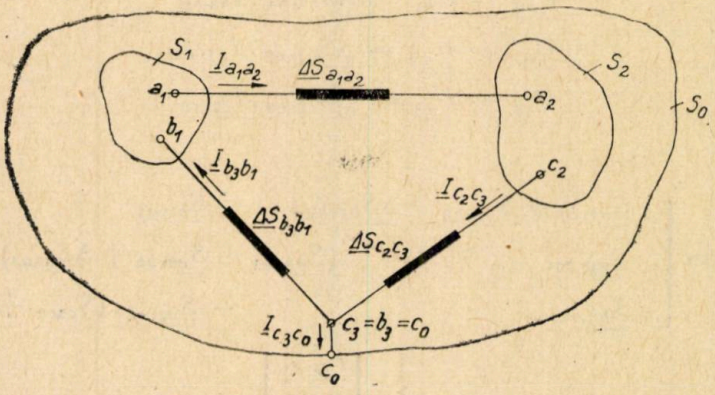


Fig. 5.16

Ecuația matricială în acest caz se deduce particularizînd ecuația (5.27) în care termenii matricei S_3 sînt nuli. Spre deosebire de cazul precedent, $I_{c2,c3} \neq I_{b3,b1}$.

Forma acestei matrici cu trei nesimetrii este :

$$\begin{bmatrix} \underline{\Delta E_{b3,b1}} \\ \underline{\Delta E_{a1,b2}} \\ \underline{\Delta E_{c2,c3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S_{b1,b1}} + \underline{\Delta S_{b1,b3}} ; & -\underline{S_{b1,a1}} ; & 0 \\ -\underline{S_{a1,b1}} ; & \underline{S_{a1,a1}} + \underline{S_{a2,a2}} + \underline{\Delta S_{a1,a2}} ; & -\underline{S_{a2,c2}} \\ 0 & -\underline{S_{a2,c2}} ; & \underline{S_{c2,c2}} + \underline{\Delta S_{c2c3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_{b3,b1}} \\ \underline{I_{a1,a2}} \\ \underline{I_{c2,c3}} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

În fine, dacă se consideră degenerate atît matricea nr. 2 cît și matricea nr. 3, fără conectare cu rețeaua de nul, se obține schema din figura 5.17, care este schema unei nesimetrii pe una și aceeași rețea simetrică :

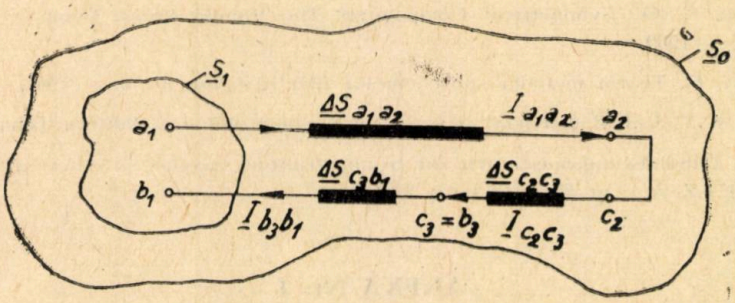


Fig. 5.17

În acest caz $\underline{I_{a1,a2}} = \underline{I_{c2,c3}} = \underline{I_{b3,b1}}$. Dacă se scriu aceste condiții și se ține seamă că rețeaua $\underline{\Delta S}$ se însumează, se obține particularizînd relația (5.27), relația (5.22).

În rezumat, în prezenta lucrare s-a căutat a se aduce o serie de preciziuni în aplicarea metodei componentelor simetrice în cazul unor rețele cu nesimetrii multiple.

Pe marginea precizărilor efectuate s-au introdus operatorii de simetrie și de abatere de la simetrie, și se arată sensul fizic al acestor matrici.

Folosindu-se acești operatori se stabilește o ecuație matricială unitară în cazul unei rețele cu multiple nesimetrii.

Această ecuație corespunde formal cu ecuația exprimată în scalar pentru o rețea monofazică.

Pentru această rețea complexă se determină legi de legare în paralel și în serie și, în plus, se introduce un grup de matrici legate în inel și se stabilește ecuația de curenți și tensiuni corespunzătoare acestui grup numit inel.

Se arată că acest grup particularizat conține atît montajul de legare în serie, cît și pe cel în paralel.

Pentru aceasta este necesară introducerea noțiunii de rețea degenerată care este atașată rețelei de nul, fapt ce simetrizează calculele și raționamentele.

Catedra de rețele electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Wilbur R. Le Page, Samuel Seely*, General Network — Analysis Mc-Graw-Hill Book — Company 1952 — New York-Toronto-London.
2. *William D. Stevenson*, Elements of Power System Analysis Mc-Graw-Hill-Book-Company, 1962 — New York-Toronto-London.
3. *Calabrese*, G. O., Symmetrical Components The Ronald Press. Company — New York — 1959.
4. *Puhov*, G. E., Teoria metodei subschemelor Electricestvo, nr. 8 — 1952.
5. *Antoniu, I. S.*, Calcul matricial și tensorial în electrotehnică. Editura Tehnică, 1962.
6. *Titel, I,*. Blindleistungsmaschinen zur Symmetrierung unsymmetrischer Netzbelastungen E.T.Z. A — nr. 82—12,5 Iunie 1961.

ANEXA Nr. 1

Folosind notațiile date în fig. 3.1 se pot scrie relațiile :

$$\underline{U_R} = \underline{Z_R} \cdot \underline{I_R} + \underline{Z_{RS}} \cdot \underline{I_S} + \underline{Z_{RT}} \cdot \underline{I_T} \cdot + \underline{Z_{RN}} (\underline{I_R} + \underline{I_S} + \underline{I_T}) \\ \underline{Z_N} (\underline{I_R} + \underline{I_S} + \underline{I_T}) + \underline{Z_{NR}} \underline{I_R} + \underline{Z_{NS}} \cdot \underline{I_S} + \underline{Z_{NT}} \cdot \underline{I_T} \tag{1}$$

sau, adunînd termenii se obține :

$$\underline{U_R} = (\underline{Z_R} + \underline{Z_{NR}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{RN}}) \underline{I_R} + (\underline{Z_{RS}} + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}}) \underline{I_S} + \\ + (\underline{Z_{RT}} + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}}) \underline{I_T}. \tag{2}$$

În mod analog :

$$\underline{U_S} = (\underline{Z_{SR}} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}}) \underline{I_R} + (\underline{Z_S} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \\ + \underline{Z_{NS}}) \underline{I_S} + (\underline{Z_{ST}} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}}) \underline{I_T}. \tag{3}$$

și

$$\underline{U_T} = (\underline{Z_{TR}} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}}) \underline{I_R} + (\underline{Z_{TS}} + \underline{Z_{TN}} + \\ + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}}) \underline{I_S} + (\underline{Z_T} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}}) \underline{I_T}. \tag{4}$$

sau utilizînd calculul matricial expresiile 2, 3 și 4 pot fi puse sub forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{U_R} \\ \underline{U_S} \\ \underline{U_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z_R} + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}} ; \underline{Z_{RS}} + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}} ; \underline{Z_{RT}} + \\ \underline{Z_{SR}} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}} ; \underline{Z_S} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}} ; \underline{Z_{ST}} + \\ \underline{Z_{TR}} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}} ; \underline{Z_{TS}} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}} ; \underline{Z_T} + \\ + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}} \\ + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}} \\ + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_R} \\ \underline{I_S} \\ \underline{I_T} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Făcînd transformarea :

$$\begin{bmatrix} \underline{I_R} \\ \underline{I_S} \\ \underline{I_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I_h} \\ \underline{I_d} \\ \underline{I_i} \end{bmatrix} \tag{6}$$

și notînd cu

$$\underline{A} = \underline{Z_R} + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}} ; \underline{B} = \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_{RS}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}} ; \underline{C} = \\ = \underline{Z_{RT}} + \underline{Z_{RN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}}$$

$$\underline{D} = \underline{Z_{SR}} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}} ; \underline{E} = \underline{Z_S} + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}} ; \underline{F} = \underline{Z_{ST}} + \\ + \underline{Z_{SN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}} \tag{7}$$

$$\underline{G} = \underline{Z_{TR}} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NR}} ; \underline{H} = \underline{Z_{TS}} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NS}} ; \\ \underline{K} = \underline{Z_T} + \underline{Z_{TN}} + \underline{Z_N} + \underline{Z_{NT}}$$

Introducînd relațiile 6 și 7 în ecuația 5 se obține :

$$\begin{bmatrix} \underline{U_R} \\ \underline{U_S} \\ \underline{U_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} \\ \underline{D} & \underline{E} & \underline{F} \\ \underline{G} & \underline{H} & \underline{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_h} \\ \underline{I_d} \\ \underline{I_i} \end{bmatrix} \tag{8}$$

sau încă :

$$\begin{bmatrix} \underline{U_R} \\ \underline{U_S} \\ \underline{U_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} ; \underline{A} + a^2\underline{B} + a\underline{C} ; \underline{A} + a\underline{B} + a^2\underline{C} \\ \underline{D} + \underline{E} + \underline{F} ; \underline{D} + a^2\underline{E} + a\underline{F} ; \underline{D} + a\underline{E} + a^2\underline{F} \\ \underline{G} + \underline{H} + \underline{K} ; \underline{G} + a^2\underline{H} + a\underline{K} ; \underline{G} + a\underline{H} + a^2\underline{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_h} \\ \underline{I_d} \\ \underline{I_i} \end{bmatrix} \tag{9}$$

sau,

$$\begin{bmatrix} \underline{U_R} \\ \underline{U_S} \\ \underline{U_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{A}+\underline{B}+\underline{C})\ \underline{I_h} + (\underline{A}+a^2\underline{B}+a\underline{C})\ \underline{I_d} + (\underline{A}+a\underline{B}+ \\ (\underline{D}+\underline{E}+\underline{F})\ \underline{I_h} + (a\underline{D}+\underline{E}+a\underline{F})\ a^2\underline{I_d} + (a^2\underline{D}+\underline{E}+ \\ (\underline{G}+\underline{H}+\underline{K})\ \underline{I_h} + (a^2\underline{G}+a\underline{H}+\underline{K})\ a\underline{I_d} + (a\underline{G}+a^2\underline{H}+ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +a^2\underline{C})\ \underline{I_i} \\ +a\underline{F})\ a\underline{I_i} \\ +\underline{K})\ a^2\underline{I_i} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Relația 10 mai poate fi scrisă sub forma :

$$\begin{bmatrix} \underline{U_R} \\ \underline{U_S} \\ \underline{U_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}+\underline{B}+\underline{C} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{D}+\underline{E}+\underline{F} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{G}+\underline{H}+\underline{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_n} \\ \underline{I_h} \\ \underline{I_h} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{A}+a^2\underline{B}+a\underline{C} & 0 & 0 \\ 0 & a\underline{D}+\underline{E}+a^2\underline{F} & 0 \\ 0 & 0 & a^2\underline{G}+a\underline{H}+\underline{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_d} \\ a^2\underline{I_d} \\ a\underline{I_d} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \underline{A}+a\underline{B}+a^2\underline{C} & 0 & 0 \\ 0 & a^2\underline{D}+\underline{E}+a\underline{F} & 0 \\ 0 & 0 & a\underline{G}+a^2\underline{H}+\underline{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_i} \\ a\underline{I_i} \\ a^2\underline{I_i} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Indentificînd relațiile obținute în ec. 11 cu cele din relația 3.1 se obține :

$$\begin{cases} \underline{Z_{Rh}} = \underline{A}+\underline{B}+\underline{C} = \underline{Z_R}+\underline{Z_{RS}}+\underline{Z_{RT}}+3\underline{Z_{RN}}+3\underline{Z_N}+\underline{Z_{NR}}+ \\ \qquad +\underline{Z_{NS}}+\underline{Z_{NT}} \\ \underline{Z_{Rd}} = \underline{A}+a^2\underline{B}+a\underline{C} = \underline{Z_R}+a^2\underline{Z_{RS}}+a\underline{Z_{RT}}+\underline{Z_{NR}}+a^2\underline{Z_{NS}}+a\underline{Z_{NT}} \\ \underline{Z_{Ri}} = \underline{A}+a\underline{B}+a^2\underline{C} = \underline{Z_R}+a\underline{Z_{RS}}+a^2\underline{Z_{RT}}+\underline{Z_{NR}}+a\underline{Z_{NS}}+a^2\underline{Z_{NT}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{Z_{Sh}} = \underline{D}+\underline{E}+\underline{F} = \underline{Z_S}+\underline{Z_{SR}}+\underline{Z_{ST}}+3\underline{Z_{SN}}+3\underline{Z_N}+\underline{Z_{NR}}+ \\ \qquad +\underline{Z_{NS}}+\underline{Z_{NT}} \\ \underline{Z_{Sd}} = a\underline{D}+\underline{E}+a^2\underline{F} = \underline{Z_S}+a\underline{Z_{SR}}+a^2\underline{Z_{ST}}+\underline{Z_{NS}}+a\underline{Z_{NR}}+a^2\underline{Z_{NT}} \\ \underline{Z_{Si}} = a^2\underline{D}+\underline{E}+a\underline{F} = \underline{Z_S}+a^2\underline{Z_{SR}}+a\underline{Z_{ST}}+\underline{Z_{NS}}+a^2\underline{Z_{NR}}+a\underline{Z_{NT}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{Z_{Th}} = \underline{G}+\underline{H}+\underline{K} = \underline{Z_T}+\underline{Z_{TR}}+\underline{Z_{TS}}+3\underline{Z_{TN}}+3\underline{Z_N}+\underline{Z_{NR}}+ \\ \qquad +\underline{Z_{NS}}+\underline{Z_{NT}} \\ \underline{Z_{Td}} = a^2\underline{G}+a\underline{H}+\underline{K} = \underline{Z_T}+a^2\underline{Z_{TR}}+a\underline{Z_{TS}}+\underline{Z_{NT}}+a\underline{Z_{NS}}+a^2\underline{Z_{NR}} \\ \underline{Z_{Ti}} = a\underline{G}+a^2\underline{H}+\underline{K} = \underline{Z_T}+a\underline{Z_{TR}}+a\underline{Z_{TS}}+\underline{Z_{NT}}+a^2\underline{Z_{NS}}+a\underline{Z_{NR}} \end{cases}$$

în care :

$\underline{Z_{Rh}}$; $\underline{Z_{Rd}}$; $\underline{Z_{Ri}}$ = impedanțele pe care le opune faza R circulației curenților de secvență homopolară directă și inversă

$\underline{Z_{Sh}}$, $\underline{Z_{Sd}}$, $\underline{Z_{Si}}$ = idem pe faza $\underline{S}$

$\underline{Z_{Th}}$, $\underline{Z_{Td}}$, $\underline{Z_{Ti}}$ = idem pe faza T

$\underline{Z_{Rh}}$; $\underline{Z_{Sh}}$; $\underline{Z_{Th}}$ = impedanțele opuse de fazele R, S și T curenților de secvență homopolară = *impedanțe homopolare* din fazele $\underline{R}$, $\underline{S}$, $\underline{T}$

$\underline{Z_{Rd}}$, $\underline{Z_{Sd}}$; $\underline{Z_{Td}}$ = idem curentului de secvență directă din fazele $\underline{R}\,\underline{S}\,\underline{T}$ = *impedanțele directe* din fazele $\underline{R}\,\underline{S}\,\underline{T}$

$\underline{Z_{Ri}}$; $\underline{Z_{Si}}$; $\underline{Z_{Ti}}$ = idem curentului de secvență homopolară din fazele $\underline{R}\,\underline{S}\,\underline{T}$ = *impedanțele homopolare* din fazele $\underline{R}\,\underline{S}\,\underline{T}$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 4

ELECTRONICĂ

C. Z. : 621.385 : 621.372.6 : 621.375 : 621.314 : 621.3.018

FREQUENCY RESPONSE OF THE INPUT ADMITTANCE OF IMPEDANCE SIGN CONVERTERS *

MIRCEA PETRESCU

As shown in the works (1,2), the input admittance of a shunt impedance sign converter of parallel type is given by the following formula :

$$Y = Y_i + \frac{1 - \bar{A}}{Z_n + Z_0} \tag{1}$$

where Y_i and Z_0 are respectively the input admittance and the output impedance of the amplifier used for sign inversion, $\bar{A}$ — the open circuit voltage gain and Z_n —the impedance of which sign is to be inverted.

Considering that for every frequency the condition $|Z_n| \gg |Z_0|$ ins carried out, then in the relation (1) Z_0 may be neglected ; such a supposition doesn't limit the generalisation of the conclusions formulated further, regarding the work of this converter in the field of high frequences, because Z_0 dosen't influence, in fact, the character of the impedance sign inversion.

Supposing a negligible output impedance and introducing

$$Y_n = \frac{1}{Z_n}, \quad \bar{c} = 1 - \bar{A}, \text{ the equality (1) becomes :}$$

$$Y = Y_i + Y'_n \tag{2}$$

$$\text{where : } Y'_n = \bar{c}\, Y_n \tag{3}$$

Quantity $\bar{c}$ is named the conversion coefficient.

In order to analyze the effect of frequency response of the modulus and phase of the circuit voltage gain on the nature of the input admittatce of converter, we express the quantity $\bar{A}$ as follows:

$$\bar{A} = |\bar{A}| \cos \varphi_A + j |\bar{A}| \sin \varphi_A \tag{4}$$

where $|\bar{A}|$ and φ_A are respectively the modulus and the phase of the open circuit voltage gain.

* Manuscris predat la redacție la 7 ianuarie 1967.

Taking into account (3) and (4), the formula (2) becomes :

$$Y = Y_i + (R_e \bar{c})\, Y_n + j\,(I_m \bar{c})\, Y_n, \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} R_e \bar{c} &= 1 - |\bar{A}| \cos \varphi_A , \\ I_m \bar{c} &= - |\bar{A}| \sin \varphi_A . \end{aligned} \tag{6}$$

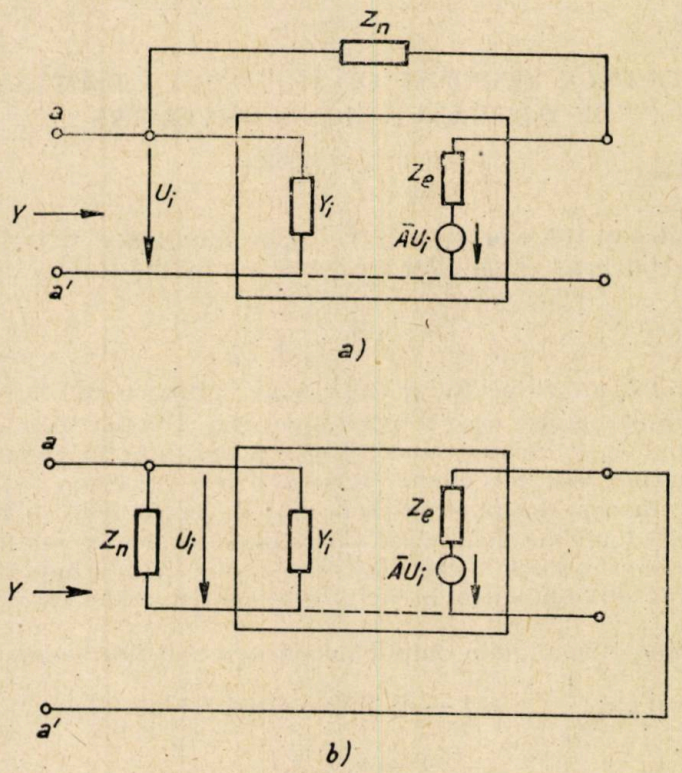


Fig. 1

The frequency response of the real and imaginary parts of the conversion coefficient $\bar{c}$ can be established with the help of relations (6), if the changes of the quantities $|\bar{A}|$ and φ_A are known in accordance with the frequency. We say a two transistor amplifier of negative voltage feedback (described in [1,3]) is used for carrying out the converter.

The variation according to frequency of the modulus and the phase of the open circuit voltage gain, analytically determined, is reproduced in the fig. 2. Starting from this dependence was calculated frequency response of the quantities $R_e \bar{c}$ and $I_m \bar{c}$ (fig. 3).

As seen in the fig. 3, the real part of the conversion coefficient remains practically inchanged up to the frequency of about lo kHz, its value being $R_e \bar{c} = -1$. At higher frequencies $R_e \bar{c}$ registers an important growth when we raise the frequency and at $f = 80$ kHz it becomes a positive quantity. Consequently, at these frequencies the relation between φ_A

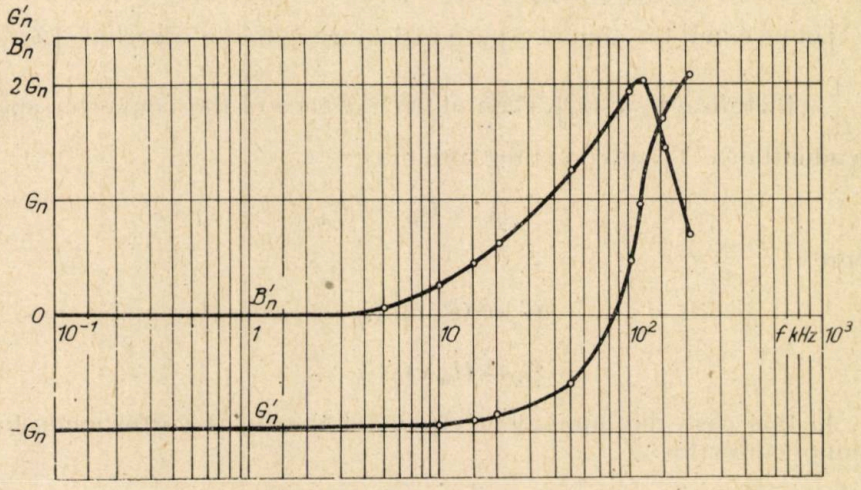


Fig. 2

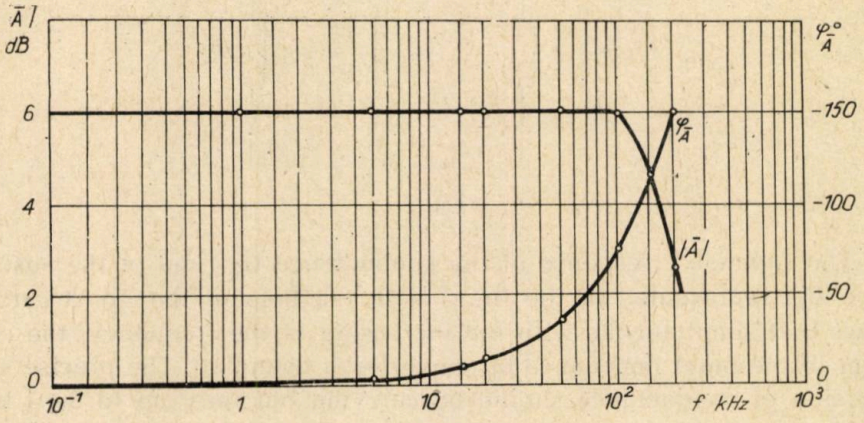


Fig. 3

and $|\bar{A}|$ cann't ensure a right inversion of the impedance sign. The imaginary part of the conversion coefficient has at the frequency of lo kHz a relative great value ($I_m \bar{c} = 0{,}2$) ; it brings in the sign inversion of impedance an error that cann't be neglected, though at this frequency $R_e \bar{c} = -1$. It goes without saying that the close frequency response of the

quantity $I_m\bar{c}$ calls for severe demands regarding the phase response of the amplifier used. The nature of the error brought by the variation according to frequency of the imaginary part of the conversion coefficient in the process of changing the impedance sign is up to the character of the impedance as explained bellow.

Let us admit the sign of a pure resistance is tot be inverted $\left(Z_n = R_n = \frac{1}{G_n}, \text{therefore } Y_n = G_n\right)$. Then at the entrance of the converter appears the admittance Y'_n given bi the formula :

$$y'_n = G'_n + j\,B'_n \tag{7}$$

where :

$$\begin{aligned} G'_n &= (R_e\,\bar{c})\cdot G_n \\ B'_n &= (I_m\,\bar{c})\cdot G_n \end{aligned} \tag{8}$$

In this case the equivalent circuit of the fig. 4 corresponds to the input of converter.

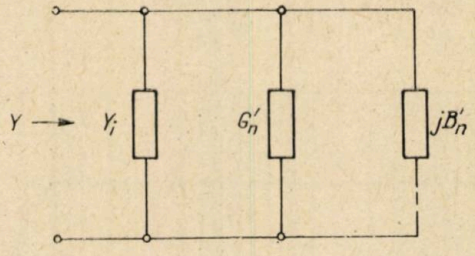


Fig. 4

The frequency response of the conductance G'_n and of the susceptance B'_n, represented in the fig. 5 with the help of the fig. 3 curves, shows that simultaneous with the increasing of the frequency, the character of the input impedance of converter is changing. The precise sign inversion of conductance should be carrying out only up to 3—4 kHz frequencies. At higher frequencies the variation of the quantities $|\boldsymbol{A}|$ and φ_A causes the appearance of parasite reactive component B'_n (because $I_m\,c \neq 0$). Up to frequencies around 100 kHz, B'_n has a capacitive character. At higher frequencies B'_n corresponds to a negative inductance. As regards the frequency response of the input conductance G'_n, it is obvious that at a frequency of about 80 kHz, this becomes a positive one.

Consequently, in the field of high frequencies the examined converter doesn't carry out the change of the sign of the conductance G_n.

If we invert the sign of a capacity ($Y_n = j\omega C_n$), the expressions of the quantities G'_n and B'_n become so:

$$G'_n = -\omega (I_m \bar{c})\, C_n \qquad (9)$$
$$B'_n = \omega (R_e \bar{c})\, C_n$$

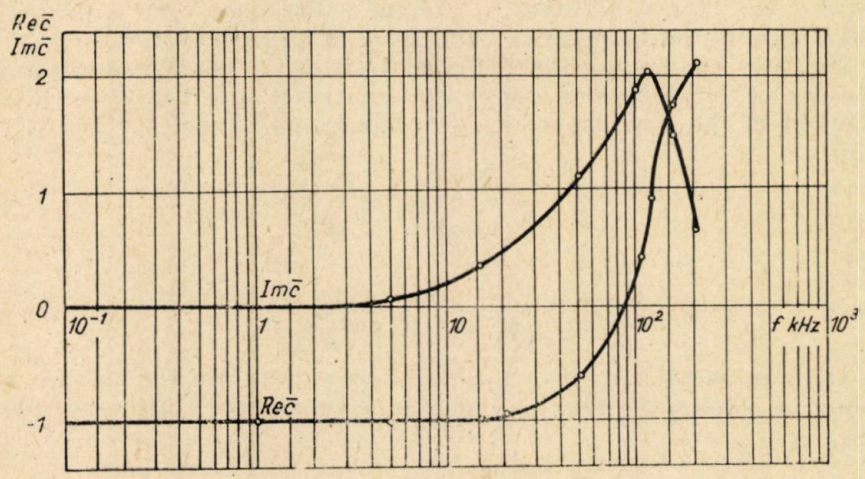


Fig. 5

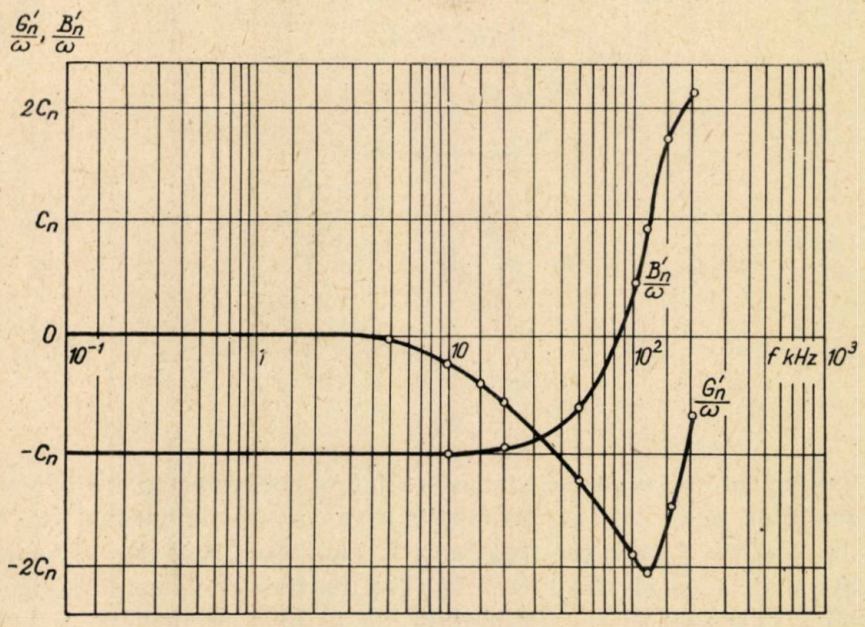


Fig. 6

The variation according to frequency of the conductance G'_n and susceptance B'_n represented in the fig. 6, shows that in this case the sign inversion of the positive capacity C_n is associated with the appearance, at the entrance of the circuit, of a parasite negative conductance of value dependent upon frequency. The input negative capacity $\frac{B'_n}{\omega}$ is constant up to lo kHz, then it becomes to change at the same time with the frequency, turning into a positive capacity at high frequencies.

Similarly can be performed the analysis of the changes according to frequence of the series impedance sign converter (fig. 1 b). If we neglect the effect of the impedance Z_0, its input admittance is given by the equality :

$$Y = \frac{Y_i}{1 - \bar{A}} + Y'_n, \tag{10}$$

where :

$$Y'_n = \frac{1}{(R_e \bar{c})\, Z_n + j\,(I_m \bar{c})\, Z_n}. \tag{11}$$

The equivalent circuit of the fig. 7 correspond tot the relation (10), R'_n and X'_n being the real and imaginary components of the impedance $\frac{1}{Y'_n}$.

If $Z_n = R_n$, then:

$$R'_n = (R_e \bar{c}) \cdot R_n, \tag{12}$$

$$X'_n = (I_m \bar{c}) \cdot R_n.$$

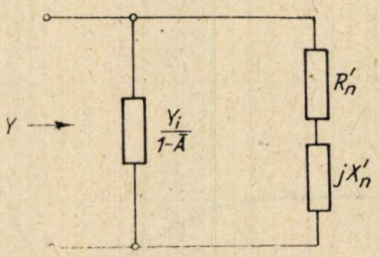


Fig. 7

Taking into account the kind of variation according to frequency of the quantites $R_e \bar{c}$ and $I_m \bar{c}$, as results from (12), the quantities R'_n and X'_n are modifying when the frequency is increased, and R'_n becomes a positive resistance at about 80 kHz. The reactive component X'_n has an inductive character at the beginning, but at high frequencies it has a negative capacity character.

When the sign of a positive inductance $(Z_n = j\omega L_n)$ is inversed the active and reactive components of impedance $\frac{1}{Y'_n}$ are the followings:

$$R'_n = -(I_m \bar{c}) \cdot L_n, \qquad (13)$$

$$X'_n = \omega (R_e \bar{c}) \cdot L_n.$$

In this case, at the converter input appears a negative inductance, turning into a positive one at high frequencies. Starting from the frequencies of about 3—4 kHz, the sign inversion of inductance is accompanied in the converter input circuit, of a varying according to fre quency negative resistance.

In the above explanations we supposed the output impedance of the used amplifier being negligible as compared to the impedance of wich sign is to be inverted. This hypothesis allows us to simplify the analiysis of the converter work in a relative large field of frequencies and to focus our attention only on the process of sign inversion of the impedance Z_n. The thorough analysis of the input admittance nature of the converter should also take into consideration the variation according to frequency of the output impedance of the respective amplifier, since it is possible in a certain range of frequencies, the admittance Y'_n to be determined not by the impedance Z_n, but by the Z_0 one. Of course, it happens when the inequality $|Z_n| \gg |Z_0|$ is broken. A such analysis is rather too complex and of no practical interest if the exact inversion of impedance sign conditions are satisfed [1].

The theoretical analysis of the work of the sign impedance converter explained in this writing, was experimentally verified with a shunt converter.

The circuit used for experimenting (fig. 8) has as basis a two transistor amplifier of negative voltage feedback. In the field of low frequen-

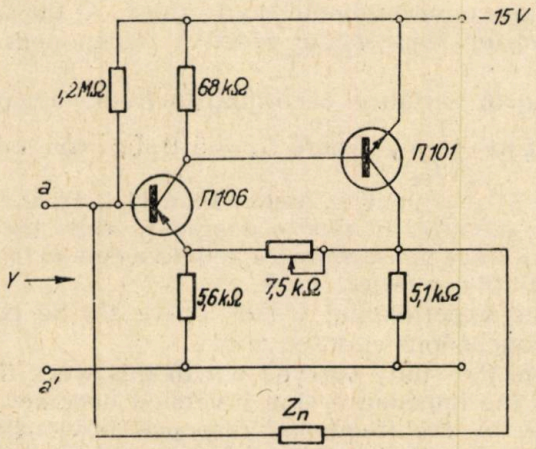


Fig. 8

cies the measured input impedance of the amplifier was $Z_i \simeq 350\ \text{k}\Omega$, the output impedance $Z_0 \approx 250\ \Omega$ and the open circuit voltage gain $A = 2$.

The frequency response of the modulus and the input admittance phase of converter, Y, obtained experimentally are drawn in the fig. 9 for $Z_n = R_n = 5{,}1\ \text{k}\Omega$, The result of measurements shows that at a frequency of about 11—12 kHz, the absolute value of the input negative

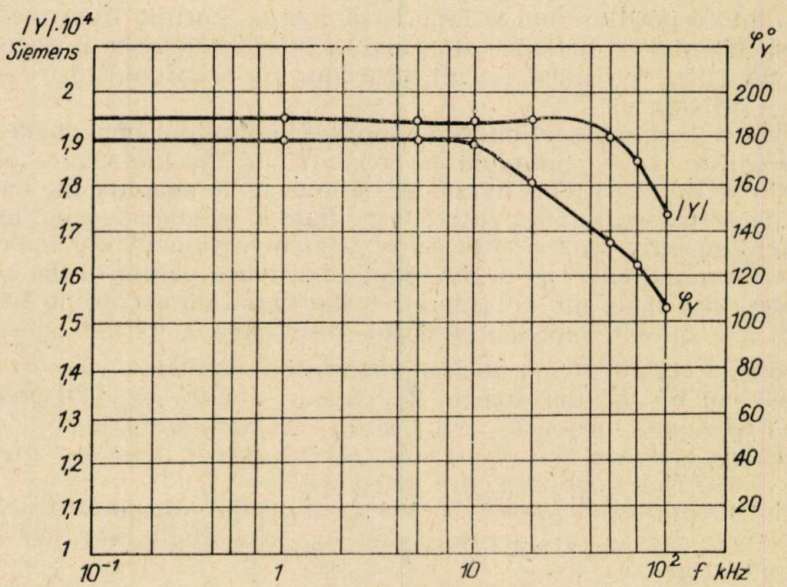


Fig. 9

conductance of this converter begins to decrease. At the same time, at the input the converter appears a reactive component of capacitive character

The studying of variation according to frequency of the input admitance when $Z_n = \dfrac{1}{j\omega C_n}$, where $C_n = 510\,\text{pF}$, have conducted tot the results of fig. 10. At frequencies higher than 11 kHz, the negative capacity modulus of converter begins to decrease, while the frequency response of the admittance phase shows a negative conductance to be feeling in the input circuit of converter.

Therefore the experimental results prove tot be corresponding to the theoretical conclusions exposed above.

In conclusion, the study carryed out in this work finds out that at high frequencies the impedance sign inversion becomes unprecise. It is caused especially by the frequency response, obviously expressed, of the open circuit voltage gain phase of the used converter. Besides it, the appearence, at the converter input, of a parasite negative resistance

(in case of sign inversion of reactive impedances) may break the converter stability in the field of high frequencies. Therefore, in the process of practical use of the converter, its work should be avoided for frequ-

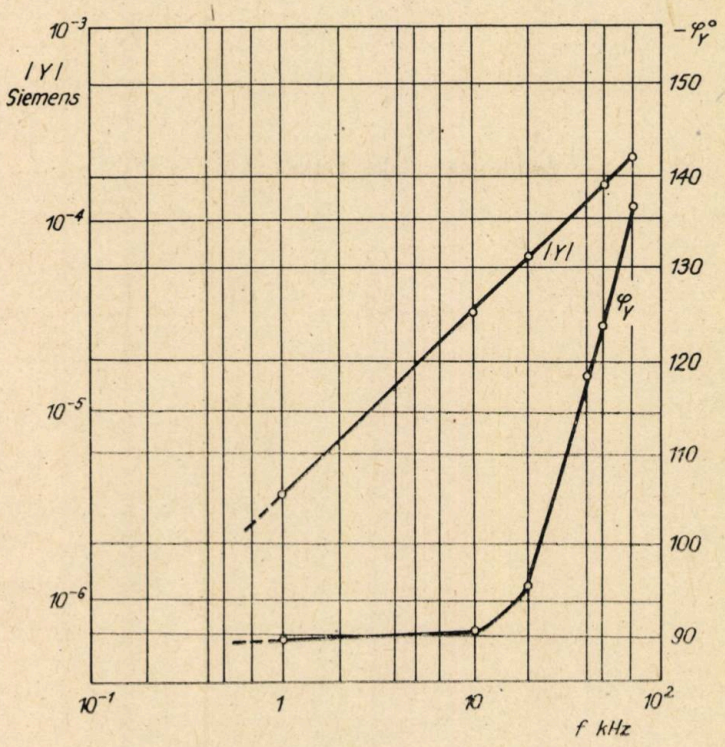


Fig. 10

encies where the quantities $|\bar{A}|$ and φ_A are not constant. The range extension of the converter work frequencies may be achieved by introducing adequate correction circuits.

It is obvious that in the field of low frequencies the sign impedance converter has a proper work even at very low frequencies.

Chair of Electron Tubes and Transistors
Polytechnic Institute
„Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *Petrescu M.*, Upravliaemie immitansi na poluprovodnikovîh priborah, Dizertaţie, Moscova, MEI, 1963.
2. *Ginzton, E. L.*, Stabilized Negative Impedances, Electronics, Nr. 7, 8, 1945.
3. *Petrescu M.*, Frequency Charateristics of a Two Stage Transistor Amplifier, I. P. B. Bulletin, in press.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 6342

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1968 JUN 9

F 1130

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX NUMĂRUL 5 ANUL 1967
SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с **указанием** „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

OBSZÉCHENYI MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXIX — NUMĂRUL 5

SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE
1967

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici* ; Prof. Dr. Docent *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli* ; Prof. Dr. *S. Călin* ; Acad. Prof. Dr. Docent *D. Dumitrescu* ; Prof. *S. Gâdea* ; Conf. Dr. *I. Grădișteanu*, Prof. *C. Ionescu-Bujor* ; Prof. Dr. Docent *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu* ; Prof. *St. Mantea* ; Prof. Dr. *N. Marinescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu* ; Prof. *C. Pènescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *R. Rădulet* ; Prof. *Al. Rău* ; Prof. *Al. Spătaru* ; Prof. *L. Stoicescu* ; Prof. Dr. Docent *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1983

Sumar

MATEMATICA

N. Mirescu

Aplicațiile sistemului cu diedrul nul la construcția buncărelor 21

H. Bodnărescu, Raisa Bodnărescu, Erna Voinea

Nomograme anamorfice pentru prima formă canonică a ecuațiilor de ordinul III, realizate cu epure Monge 30

Mariana Craiu

Proprietăți ale seriei Fourier asociată unei funcții neintegrabile de singularități date 35

Cornelia Nanes

Symmetrische Panevoluten 45

FIZICA

D. Bârcă-Gălățeanu, Cătălina Demetrescu, D. Iordache, Paraschiva Volatie, C. Ghizdeanu

A Study of the Infrared Apsorption Spectra of Some Cyclohexiliden-hidrazides 49

G. C. Moisil

Contribuții la studiul cîmpurilor staționare în medii izotrope și eterogene 56

I. Ringhiopol, I. Vîță, H. Fuia

Chambre aux compteurs G. M. pour la spectroscopie à grand pouvoir de résolution 65

CHIMIE

I. A. Atanasiu, I. C. Răducanu

Contribuții la depunerea catodică a taliului 71

I. Gh. Constantinescu, B. Melega

Etude du désulfatage de la saumure dans l'industrie du carbonate de sodium à l'aide des composés du baryum . . . 77

G. Teodorescu

Metode de dozare a dimetilaminoetanolului 83

REȚELE ELECTRICE

C. Dinculescu, G. Drăgan, T. Miclescu

Sur l'interprétation unitaire des résultats des mesures des paramètres du courant de foudre 87

Gh. Iacobescu

Influența tipului de scurtcircuit asupra tensiunii tranzitorii de restabilire la bornele întreruptoarelor 103

MAȘINI TERMICE

B. Grünwald, N. Apostolescu

Cu privire la efectul termic al recirculării gazelor evacuate la motorul cu aprindere prin comprimare 121

ELECTRONICA

M. Petrescu

The Stability of the Negative Impedance Converters . . . 141

Резюме

Н. Мирескy

Д. К. 621.82/85 : 515

Применения системы с нулевым двуграникои при конструировании бункеров

Используя специальную систему плоского изображения пространства (система проекции с нулевым двугранником), автор делает практические применения относительно проектирования бункеров, резервуаров и трубопроводных патрубков.

Автор находит необходимые и достаточные условия чтобы графическое выражение этих машинных элементов удовлетворяли бы наилучшие условия в приближении разверток с оптимальным коэффициентом точности.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 517 : 624.041 (083.57)

Х. Боднэреску, Р. Боднэреску, Е. Войня

Анаморфические номограммы для первой канонической формы уравнений третьей степени, составленных с эпюрой Монжа

В работе составлены номограммы для первой канонической формы уравнений третьей степенн с использованием двойной ортогональной проекции.

Исходя из эпюры Монжа составлены также „комбинированные номограммы" и „номограммы с копланарными точками".

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

М. Краю

Д. К. 517.5 : 514

Свойства ряда фурье, обьединенного неинтегрируемой функции данных единичностей

Полагается, что $f(x)_0$ яввяется функцией определимой в $(-\pi, \pi)$ кроме множества $\mathfrak{M}$ нулевого измерения, неинтегрируемой в $(-\pi, \pi)$, удовлетворяющей условия а), б), в) для нечетного p.

Изучаются свойства ряда фурье, обьединенного с функцией $f(x)$ и указывается, что имеет вид (7′).

Дается интегральный вид коэффициентов, определяется поведение коэффициентов когда m стремится к бесконечности, устанавливается теорема 4.1 касающаяся суммируемости рядов $S_k(x)$ и $S_k^n(x)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

К. Нанеш

Д. К. 515

Симетрические пан-эволюты

Рассматривая в плоскости xOy гладкую кривую C (1), ее эволюту (2) и пан-эволюты (3) и (4), устанвливается между дуговыми элементами этих кривых соотношение (5), между углами образованными касательными, проведенными в соответствующих точках, соотношения (6), (7), (8), между векторными радиусами соотношение (9), а между площадями — соотношение (10).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Summary

N. Mirescu D.C. 621.82/.85 : 515

Applications of the Nil Dihedral Device in Bunker Construction

Using a special plane representation system of space (the projection system with nil dihedral), the author makes practical applications in relation to the designing of bunkers, containers and pipe joints.

The author finds the necessary and sufficient conditions in order to give out in the graphic expression of these machine elements the best conditions for the approximation of the evolutes with the best precision coefficient.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 517 : 624.041 (083.57)

H. Bodnărescu, R. Bodnărescu, E. Voinea

Anamorphic Nomograms for the First Canonic Form of III^d Order Equations, Achieved by Means of Monge Epures.

The authors achieve in the paper nomograms for the first canonic form of III^d order equations by using a double orthogonal projection.

They also achieve "combined nomograms" and nomograms with coplanary points" starting from the Monge epure.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

M. Craiu D.C. 517.5 : 514

Properties of the Fourier Series Associated to a non Integrating Function of Given Singularities.

Given f (x) a defined function on $[-\pi, \pi]$ beside a multitude of n $\mathfrak{M}$ nil measure, non integrating on $[-\pi, \pi]$ which fulfils the conditions a), b), c) for p odd.

The author studies the properties of the Fourier series associated to the function f (x) and demonstrates that it is of (7') form.

He gives an integral form to the coefficients, determines the way the coefficients behave when m tends to the infinite-, establishes the theorem 4.1. related to the possibility of summing up the series $S\ K$ (x) and $S\ k^n$ (x).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C. Naneş D.C. 515

Symmetrical Pan — evolutes.

Considering in the plane x0y the smooth curve C (1) its evolute (2) and the pan-evolutes (3) and (4), the author determines between the arc elements of these curves the relation (5), between the angles formed by the tangents drawn in the corresponding points the relations (6), (7), (8), between the radius of curvature the relation (9) and between the areas the relation 10).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 535.3 : 535 : 33.547 : 541.1

Д. Быркэ-Гэлэцяну, К. Деметреску, Д. Иордаке, Т. Волатие, К. Гиздяну

Изучение спектров поглощения в инфракрасном свете некоторых циклогексилиден-гидразидов

Изучение спектров поглощения в спектральной области заключенной между 400 $ст^{-1}$ и 5000 $ст^{-1}$ восьми новых циклогексилиден-гидразидов преследует целью установить в какой мере остаток молекулы влияет на спектральное положение и на интенсивность полос поглощения ядер циклогескан в соединениях с большим числом атомов в молекуле. Прослеживается, также, что из приписывания найденных полос делается выводы о молекулярной структуре данных соединений.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Г. К. Мойсил

Д. К. 537.212 : 535.3

К изучению стационарных полей в изотропных и гетерогенных средах

Изучается распределение стационарных полей в изотропно-гетерогенной среде как проблема распределения в неоднородной среде, потенциал удовлетворяя уравнение (4), в котором величина материала $x\ (x, y, z)$ выражается как прерывистая позициоиная функция посредством обобщенной функции Гивизайда.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 535.33.071 : 539.153 : 539.162

И. Рингьопол, И. Вицэ, Н. Фуя

Камера счетчиков $G - M$ для спектроскопии большой разрешающей способности

В работе описывается камера с двумя счетчиками $G - M$, предназначенными для совпадающей работы, ансамбль будучи использован в качестве детектора для спектромера β большой разрешающей способности.

Buł. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 514.135 : 546.683 : 537.742.7 : 535.5

И. А. Атанасиу, И. С. Рэдукану

К вопросу катодного отложения таллия

В работе изучается катодное отложение таллия и процесс катодной поляризации в растворах азотнокислого таллия.

Работа является вкладом в разьяснении механизма отложения таллия из азотистой среды и содержит ряд экспериментальных данных, касающихся: катодной поляризации, коэффициента температуры катодной поляриации, к п. д. тока и удельного расхода энергии.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 535.3 : 535 : 33.547 : 541.1

D. Bârcă-Gălățeanu, C. Demetrescu, D. Iordache, P. Volatie a C. Ghizdeanu

A Study of the Infrared Absorption Spectra of Some Cyclohexiliden — hydrazides

The study of the absorption spectra of the spectral region 400—5000 cm^{-1} of the eight new cyclohexyliden — hydrazides seeks to establish to which extent the remainder of the molecule affects the spectral position and the intensity of the absorption bands of the cyclohexanic nucleus in compounds with a great number of atoms in the molecule. It is as well aimed at drawing conclusions concerning the molecular structure of these compounds through the assignment of the discovered bands.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 537.212 : 535.3

G. C. Moisil

Contributions to the Study of Stationary Fields in Isotropic and Heterogenous Media.

The author studies the distribution of stationary fields in a heterogenous isotropic medium as a problem of distribution in a nonhomogeneous medium, the potential satisfying the equation (4) in which x (x, y, z) is expressed as a discontinuous position function by means of the generalized Heaviside function.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 535.33.071 : 539.153 : 539.162

I. Ringhiopol, I. Vîță, H. Fuia

G-M Counter Chamber for High Resolution Power Spectroscopy.

The authors describe in the work a chamber provided with two G-M counter designed for coincidence work, the assembly being used as a detectant for a high resolution power beta spectrometer.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 541.135 : 546.683 : 537.742.7 : 535.5

I. A. Atanasiu, I. C. Răducanu

Contributions to the Thalium Cathodic Deposition.

The authors study in the work the cathodic deposition of thalium and the cathodic polarization process in thallic nitrate solutions.

The work contributes to elucidate the mechanism of the thalium sediment in nitric medium and presents a series of experimental data regarding: the cathodic polarization, cathodic polarization temperature coefficient, the current output and specific energy consumption.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 661.321 : 661.844 : 661.426

И. Г. Константчнеску, Б. Мелега

Изучение десульфатизации рассола в промышленности углекислого натрия с помощью соединений бария

Наличие в рассоле малых количеств ионов сульфата порождает некоторые затруднения в различных технологических фазах производства углекислого натрия, что указывает на необходимость десульфатизации рассолов.

Был изучен способ десульфатизации рассолов с помощью углекислого бария, находящегося в суспензии, с интегральным применением растворов, полученных от регенерации углекислого бария в рамках технологического потока.

Способ основывается на применении оборудования, применяемого в настоящее время на заводах натриевых продуктов и позволяет совершенную десулфатизацию рассола.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 545.2 : 66.028 : 542.951.5 : 547.212 : 546 : 545.81

Гр. Теодооеску

Обьемный и колориметрический методы дозировки диметиламиноэтаноля

При обьемном методе дозировки была косвеннои с использованием соли Рейнеке в качестве осаждающего реактива. После фильтрования осадок был растворен в ацетоне, обработан избыточным раствором азотнокислого серебра, который, в свою очередь был обработан раствором роданистого аммония.

Для колорометрического метода была использована соль Рейнеке, а образовавшийся осадок был разведен в ацетоне н интенсивность цвета была измерена пользуясь колориметром Б. Ланге.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 621.311 621.316.9
621.317 621.315.1

К. Динкулеску, Т. Дрэган, Т. Миклеску

Анализ параметров молнии тока

В статье обсуждается метод анализа первичных данных о параметрах для токи молнии в целях получения характеристики тех явлений которые отражают действительность.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 661.321 : 661.844 : 661.426

I. Gh. Constantinescu, B. Melega

Study of the Desulphation of Brine in Sodium Carbonate Industry By Means of Barium Compounds.

The presence in brine of some small quantities of sulphate ions generates certain difficulties in the various technologic phases of the sodium carbonate production, which render the desulphation of brines absolutely necessary.

The authors have studied a procedure of desulphation of brines by means of the barium carbonate in suspension, using entirely the solutions resulting from the regeneration of barium carbonate within the technologic flow.

In this procedure which makes possible the complete desulphation of brine, it is recommended to use the equipment commonly employed in the sodium product factories.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 545.2 : 66.028 : 542.951.5 : 547.212 : 546 : 545.81

Gr. Teodorescu

Volumetric and Colorimetric Method of Dosing Dimethyl-amino Ethanol.

In the volumetric method, dosing has been effected indirectly by filtration, the precipitate has been dissolved with acetone, and treated with silver nitrate solution, in excess, the excess being titrated with ammonium thiocyanate solution.

In the colorimetric method, Reinecke salt has been used to precipitate, and the precipitate formed has been dissolved in acetone; the intensity of the colour has been measured by means of a B. Lange colorimeter.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 621.311 : 621.316.9 : 621.317 : 621.315.1

C. Dinculescu, G. Drăgan, T. Miclescu

Analysis of the Lightning Current Parameters.

The means of analysing the primary data concerning the lightning current parameters in view of obtaining certain characteristics of the phenomena which should truly reflect reality, are discussed in the paper.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 621.316.5/.54 : 621.3.014/.015 : 621.3.06 : 621.3.027

Г. Якобеску

Влияние типа короткого замыкания на переходное напряжение восстановления у зажимов выключателей

В работе изучается отключение разных видов коротких замыканий в электрических сетях и определяется их влияние на переходное напряжение восстановления у зажимов выключателей и на собственных колебательных частот.

В случае коротких замыканий без зазмлеиия, индуктивность нейтральной точки не проникается током, если неполадка происходит у зажимов выключателя. Поэтому эквивалентные схемы были составлены пренебрегая индуктивностью L_N заземления нейтральной точки.

У неполадок с зазелнением это упращение не действительно. В этих случаях переходное восстановительное напряжение и его собственная пульсация, зависят от соотношения $\frac{L_0}{L}$, в зависимости от которого производится расчет, определяя критические положения работы выключателей.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 621.431 : 621.43.06:621.43.01.621.43.043

Б. Гринвальд, Н. Апостолеску

Относительно теплового эффекта рециркуляции выхлопных газов в Дизелах

Рециркуляция выхлопных газов воздействует на процесс сгорания термическим путем и кинетнческим путем.

Изучается тепловой эффект рециркуляции выходных газов с учетом ограничительных ефектов, вызванных необходимостью сохранения определенного избытка воздуха.

Разработан метод расчёта, который позволяет определить эффект рециркуляции выхлопных газов на коэффициент наполнения и температуру газов в конце впускного хода. Выполненные расчеты выявляют эффективность рециркуляции выхлопных газов как метод контроля скорости испарения топлива и продолжительности задержки воеплаиенений, в пределах продиктованных сохранением уровня избытка воздуха при рациональных значениях.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Д. К. 621.385 : 621.314.7 : 621.375

М. Петреску

Стабильность инверторов знака импеданса

В статье рассматриваются причины инстабильности схем, содержащих инверторы знака импеданса паралельного и последовательного типов. При помощи иммитансного критерия выводятся условия стабильности работы совокупности инвер-торнагрузка. Показывается, что в конкретных случаях применения инверторов знака импеданса, необходимо осуществлять компромисс между условиями устойчивости и условиями точной инверсии знака импеданса.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 621.316.5/.54 : 621.3.014/.015 : 621.3.06 : 621.3.027

Gh. Iacobescu

Influence of the Shortcircuit Type Upon the Restriking Voltage at the Breaker Terminals.

The author studies in the work the disconnection of the various types of shortcircuits in electric networks and determines their influence upon the restriking voltage at the breaker terminals and their own oscillation frequencies.

In the case of shortcircuits without grounding, the inductance of the neutral point is not penetrated by the current if damage occurs at the breaker terminals. That is why the equivalent diagrams have been elaborated neglecting the neutral point grounding inductance L_N.

For damages where grounding is present, this simplification is not valid. In such cases, the restriking voltage and its own pulsation depend on the ratio $\frac{L_o}{L}$ according to which are made the calculations determining the critical operation conditions of the breakers.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 621.431 : 621.43.06 : 621.43.01 : 621.43.043

B. Grünwald, N. Apostolescu

On the Thermal Effect of the Recirculation of Exhaust Gases for the Motor with Compression Ignition.

The recirculation of exhaust gases affects the combustion process in two ways ; the thermal way and the kinetic way.

The authors study further the thermal effect of the recirculation of exhaust gases and take into consideration the limitative effects imposed by the necessity of maintaining a certain excess of air.

The authors elaborate a computation method which enables to determine the effect of recirculation of exhaust gases on the filling coefficient and gas temperature at the end of the intake stroke. The calculation emphasise the efficiency of exhaust gas recirculation as a control method of the fuel vaporization speed and the ignition delay time, in the limits specified for the maintenance of a reasonable excess of air values.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.C. 621.385 : 621.314.7 : 621.375

M. Petrescu

The Stability of the Negative Impedance Converters

The author examines in the paper the causes which may lead to the instability of circuits containing negative impedance converters of parallel or series type. Using the criterion of imitances, the author deduces the conditions of operation stability of the assembly converter-load-admittance (impedance). He shows that in actual cases of utilization of the negative impedance converters, a compromise should be achieved between the stability conditions and the exact reversing conditions of the impedance sign.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Résumé

N. Mirescu C.D. 621.82/.85 : 515

Applications du système à dièdre nul dans la construction des trémies.

En utilisant un système spécial de représentation plane de l'espace (système de projection à dièdre nul) l'auteur fait des applications pratiques concernant la projection des trémies, récipients et des raccords de conduites.

L'auteur trouve les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression graphique de ces éléments de machines remplissent les meilleures conditions dans l'approximation desdéveloppées avec le meilleur coefficient de précision.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 517 : 624.041 (083.57)

H. Bodnărescu, R. Bodnărescu, E. Voinea

Nomogrammes anamorphiques pour la première forme canonique des équations de IIIe ordre réalisées avec épures monge.

Les auteurs réalisent dans l'ouvrage des nomogrammes pour la première forme canonique des équations de IIIe ordre en utilisant la double projection orthogonale.

Ils obtiennent de même des „nomogrammes combinés" et des nomogrammes à points coplanaires en partant de l'épure Monge.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

M. Craiu C.D. 517.5 : 514

Propriétés de la série Fournier associée à une fonction inintégrable de singularités donnés.

Soit $f(x)$ Une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ en dehors d'une multitude $\mathfrak{M}$ de mesure nulle, inintégrable sur $[-\pi, \pi]$ qui remplit les conditions a), b), c) pour p impair.

L'auteur étudie les propriétés de la série Fournier associée à la fonctifon $f(x)$ et démontre qu'elle est de forme (7').

L'auteur donne une forme intégrale des coefficients et détermine la manière dont les coefficients se comportent lorsque tend vers l'infini —, il établit le théorème 4.1. concernant la semmabilité des séries $SK(x)$ et $SK^n(x)$

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C. Naneş C.D. 515

Pan-évolutes Symétriques.

Considérant dans le plan x0y la courbe C lisse (1), son évollutée (2) et les pan-relation (3) et (4), on établit entre les éléments d'arc de ces courbes la relation (5), entre les angles formés par les tangentes menées dans les points correspondants les relations (6), (7), (8), entre les rayons de courbure la relation (9) et entre les aires la relation (10).

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

Zusammenfassung

N. Mirescu D.K. 621.82/.85 : 515

Anwendung des Nullflächenwinkelsystems beim Bau der Bunker.

Unter Anwendung eines besonderen Darstellungssystems des Raums (das Projektionssystem mit Null-Flächenwinkel), macht der Verfasser praktische Applikationen betreffend die Projektierung der Bunker, Behälter und der Leitungsanschlüsse.

Der Verfasser schafft die notwendigen und genügenden Verhältnisse, damit die graphische Darstellung dieser Maschinenelemente die besten Bedingungen in der Annäherung der Evolventen mit einem optimalen Genauigkeitskoeffizient erfüllt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 517 : 624.041(083.57)

M. Bodnărescu, R. Bodnărescu, E. Voinea

Anamorphische Nomogramme für die erste kanonische Form der durch Monge-Zeichenrisse erzielten Gleichungen dritter Ordnung.

In der Arbeit sind Nomogramme für die erste kanonische Form der Gleichungen dritter Ordnung durch die Anwendung der doppelten Orthogonalprojektion ausgeführt.

Gleichzeitig wurden auch „kombinierte Nomogramme" und „Nomogramme mit koplanaren Punkten" von dem Monge-Zeichenriss ausgehend, durchgeführt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

M. Craiu D.K. 517.5 : 514

Eigenschaften der Fourierreihe die mit einer nichtintegrierbaren Funktion der gegebenen Singularitäten verbunden ist.

Sei $f(x)$ eine bestimmte Funktion auf $[-\pi, \pi]$, ausser einer Menge $\mathfrak{M}$ von Nullmass, nichtintegrierbar auf $[-\pi, \pi]$, das die Bedingungen a), b), c) für das ungerade p erfüllt

Es werden die Eigenschaften der mit der Funktion $f(x)$ verbundenen Fourierserie studiert und gezeigt, dass sie die Form (7') hat.

Es wird eine Integralform der Koeffizienten gegeben und die Art bestimmt in der sich die Koeffizienten verhalten, wenn m ins Unendliche strebt, es wird der Satz 4.1 bestimmt der die Summation der Reihen $S\,K(\pi)\,S\,K^n(x)$ betrifft.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C. Naneş D.K. 515

Symmetrische Pan-Evoluten.

Indem man im Plan xOy die glatte C-Kurve (1), ihre Evolute (2) und die Pan-Evoluten (3) und (4) betrachtet, wird zwischen den Bogenelementen dieser Kurven das Verhältnis (5), zwischen den Winkeln die durch die zu den entsprechenden Punkten geführten Tangenten gebildet werden das Verhältnis (6), (7), (8), zwischen den Krümmungsradien, das Verhältnis (9), und zwischen dem Flächeninhalt das Verhältnis (10) bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 535.3 : 535 : 33. 547.541.1

D. Bârcă-Gălăţeanu, C. Demetrescu, D. Iordache, P. Volatie, C. Ghizdeanu

L'étude des spectres d'absorption en infrarouge de quelques cyclohexiliden-hydrazides.

L'etude des spectres d'absorption dans la région spectrale 400—5000 cm^{-1} de quelques nouveaux composés cyclohexyliden-hydrazides se propose d'etablir quelle est la mesure dans laquelle le reste moléculaire influence la position spectrale et l'intensité des bandes d'absorption du noyau cyclohexanique, dans le cas des composés avec un grand nombre d'atomes en molécule.

De l'attribution des bandes trouvées on tache aussi d'obtenir des conclusions concernant la structure moléculaire de ces composés.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

G. C. Moisil

C.D. 537.212 : 535.3

Contributions à l'étude des champs stationnaires dans les milieux isotropes et hétérogènes.

L'auteur étudie la répartition des champs stationnaires dans un milieu isotrope hétérogène comme un problème de répartition dans un milieu non homogène, le potentiel satisfaisant l'équation (4) dans laquelle la grandeur de matériel $x\ (x, y, z)$ est exprimée comme une fonction discontinue de position à l'aide de la fonction généralisée de Heaviside.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 535.33.071 : 539.153 : 539.162

I. Ringhiopol, I. Vîţă, H. Fuia

Chambre à compteurs GM pour spectroscopie de grande puissance de résolution.

Les auteurs décrivent dans l'ouvrage une chambre à deux compteurs G.M. destinés au travail en coïncidence, l'ensemble étant utilisé comme détectif pour un spectromètre beta à grande puissance de résolution.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 541.135 : 546.683 : 537.742.7 : 535.5

I. A. Atanasiu, I. C. Răducanu

Contributions au dépôt cathodique du thallium.

Les auteurs étudient dans l'ouvrage le dépôt cathodique du thallium et le processus de polarisation cathodique dans des solutions d'azotate thalleux.

L'ouvrage contribue à l'élucidation du mécanisme de dépôt du thallium en milieu azotique et présente une série de données expérimentales concernant la polarisation cathodique, le coefficient de température de la polarisation cathodique, le rendement de courant et la consommation spécifique d'énergie.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 535.3 : 535 : 33.547 : 541.1

D. Bârcă-Gălăţeanu, C. Demetrescu, D. Iordache, P. Volatie, C. Ghizdeanu

Das Studium der Infrarotabsorbtionsspektren einiger Cyclohexilidenhydraziden.

Die Erforschung der Absorbtionsspektren vom Spektralgebiet zwischen 400 cm^{-1} und 5000 cm^{-1} der acht neuen Cyclohexiliden-Hydraziden folgt, der Einfluss des Rumpfes der Moleküle auf die Spektrallage und die Intensität der Absorbtionsbanden des Cyclohexanic Kerns in Verbindungen mit grosser Atomzahl in der Moleküle festzustellen. Man folgte ebenfalls, aus Deutung der gefundenen Bändern die Schlussfolgerungen über die Molekülstruktur dieser Verbindungen zu ziehen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

G. C. Moisil

D.K. 537.212 : 535.3

Beiträge zum Studium der stationären Felder in isotropischen und heterogenen Medien.

Es wird die Verteilung der stationären Felder in einem heterogenen Isotropmedium studiert und zwar als eine Verteilungsaufgabe in einem inhomogenen Medium, mit einem der Gleichung (4) genügendem Potential und in der die Materialgrösse $\varkappa$ (x, y, z) als eine unstetige Ortsfunktion durch Vermittlung der verallgemeinerten Heaviside-Funktion ausgedrückt wird.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 535.33.071 : 539.153 : 539.162

I. Ringhiopol, I. Vîţă, H. Fuia

Der Raum mit Spektroskopie-G-M-Zählern mit Resolutionshochleistung.

Die Arbeit beschreibt einen Raum mit zwei G-M-Zählern, die zur Koinzidenzarbeit bestimmt sind. Die Baugruppe wird als Detektor für ein Beta-Spektrometer mit Resolutionshochleistung benützt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 541.135 : 546.683 : 537.742.7 : 535.5

I. A. Atanasiu, I. C. Răducanu

Beiträge zur kathodischen Thallium-Ablagerung.

In der Arbeit wird die kathodische Thallium-Ablagerung und der kathodische Polarisationsprozess in der Thalliumnitratlösung studiert.

Die Arbeit trägt zu der Klärung des Ablagerungsmechanismus des Thalliums im Stickstoffmedium bei und führt eine Reihe von experimentellen Daten an, die folgendes betreffen: die kathodische Polarisation, den Temperaturkoeffizienten der kathodischen Polarisation, die Stromleistung und den spezifischen Energieverbrauch.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 661.321 : 661.844 : 661.426

I. Gh. Constantinescu, B. Melega

Etude de la désulfatisation de la saumure dans l'industrie du carbonate de sodium à l'aide des composés du baryum.

La présence de petites quantités d'ions sulfate dans la saumure engendre certaines difficultés dans les différentes phases technologiques de la production du carbonate de sodium, ce qui rend nécessaire la désulfatisation des saumures.

Les auteurs ont étudié un procédé de désulfatisation des saumures à l aide du carbonate de baryum, en suspension, en utilisant intégralement les solutions qui résultent de la régénération du carbonate de baryum pendant le flux technologique.

Le procédé permet l'utilisation des outillages couramment employés dans les usines de produits sodiques ; ainsi que la désulfatisation totale de la saumure.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 545.2 : 66.028 : 542.951.5 : 547.212 : 546 : 545.81

Gr. Teodorescu

Méthode volumétrique et colorimétrique pour le dosage du dimethyl-amino éthanol.

Dans la méthode volumétrique, le dosage a été effectué indirectement avec utilisation du sel Reinecke comme réactif précipitant. Après filtrage, on a dissous le précipité avec de l'acétone, on l'a traité avec un excédent de solution d'azotate d'argent et on a titré l'excédent avec une solution de thyiocyanate d'ammonium.

Pour la méthode colorimétrique, on a précipité avec du sel Reincke et on a dissous le précipité formé avec de l'acétone ; on a mesuré l'intensité de la couleur en utilisant le coulorimètre B. Lange.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 621.311 : 621.316.9 : 621.317 : 621.315 : 1

C. Dinculescu, G. Drăgan, T. Miclescu

Analyses des paramètres du courant de foudre.

Les auteurs étudient dans l'article la manière d'analyser les données primaires relatives aux paramètres du courant de foudre en vue de déterminer certaines caractéristiques des phénomènes qui puissent être un reflet fidèle de la réalité.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 661.321 : 661.844 : 661.426

I. Gh. Constantinescu, B. Melega

Das Studium der Salzlösungentchwefelung in der Natriumkarbonatindustrie mit Hilfe der Bariumverbindungen.

Die Anwesenheit von kleinen Mengen Sulfationen in der Salzlösung schaffen Schwierigkeiten in den verschiedenen technologischen Phasen der Natriumkarbonaterzeugung, eine Tatsache, die Notwendigkeit der Salzlösungentschwefelung angibt.

Es wurde ein Salzlosungsentschwefelungsverfahren mittels sich in Suspension befindenden Bariumkarbonat studiert und zwar unter vollständiger Benützung der während des technologischen Flusses durch die Regenerierung des Bariumkarbonats sich ergebenden Lösungen.

Das Verfahren empfiehlt die Benützung der in den Werken für Natriumerzeugnisse gebräuchlichen Ausrüstungen und gestattet die vollkommene Entschwefelung der Salzlösung.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 545.2 : 66.028 : 542.951.5 : 547.212 : 546 : 545.81

Gr. Teodorescu

Volumetrische und kolorimetrische Methode zur Dosierung des Dimethylamin Äthanol.

Bei der volumetrischen Methode wurde die Dosierung indirekt unter Benützung des Reinecke-Salzes als fällendes Reagens durchgeführt. Nach der Filtrierung wurde der Niederschlag mit Azeton gelöst, mit Silbernitratlösung — Überschuss behandelt und der Überschuss mit Ammoniumthiozyanatlösung titriert.

Für die kolorimetrische Methode wurde die Dosierung mit Reinecke-Salz gefällt und der entstehende Niederschlag in Azeton gelöst. Die Intensität der Farbe wurde unter Benützung des B. Lange-Kolorimeters durchgeführt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 621.311 : 621.316.9 : 621.317 : 621.315.1

C. Dinculescu, G. Drăgan, T. Miclescu

Die Analyse der Parameter der Blitzströme.

Im Aufsatz wird die Art der Analyse der primären Daten über die Parameter des Blitzstroms zwecks Erhaltung einiger Charakteristiken der Vorgänge, die die Realität getreu wiedergeben, besprochen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 621.316.5/54 : 621.3.014/.015 : 621.3.06 : 621.3.027

Gh. Iacobescu

Influence du type de court circuit sur la tension transitoire de rétablissement aux bornes des interrupteurs.

L'auteur étudie dans l'ouvrage la déconnection des différents types de courts-circuits dans les réseaux électriques et détermine leur influence sur la tension transitoire de rétablissement aux bornes des interrupteurs et des fréquences propres d'oscillation de ces derniers.

Dans le cas des courts circuits sans mise à la terre, l'inductance du point neutre n'est pas traversée par le courant si le défaut naît aux bornes de l'interrupteur. C'est pourquoi les schémas équivalents ont été élaborés sans tenir compte de l'iniductance L_N de mise à la terre du point neutre.

Dans le cas des défauts avec mise à la terre, cette simplification n'est pas valable. La tension transitoire de rétablissement et sa pulsation propre dépendent alors du rapport $\frac{L_0}{L}$ en fonction duquel on effectue les calculs, en déterminant les situations critiques de fonctionnement des interrupteurs.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

C.D. 621.431 : 621.43.06 : 621.43.01 : 621.43.043

B. Grünwald, N. Apostolescu

Sur l'effet thermique de la récirculation des gaz d'echappement au moteur à l'allumage par compression.

La récirculation des gaz d échappement influe sur le processus de combustion par deux voies : par voie thermique et par voie cinétique.

Dans cet article les auteurs étudient l'effet thermique de la récirculation des gaz d'échappement an tenant compte des effets limitatifs imposés par la nécessité de conserver un certain excédent d'air.

Les auteurs ont élaboré une nouvelle méthode de calcul qui permet de déterminer l'effet de la récirculation des gaz d'échappement sur le coéficient de remplissage et la température des gaz à la fin de la course d'admission. Les calculs effectués font ressortir de la recirculation des gaz d'échappement comme méthode de contrôle de la vitesse de vaporisation du combustible et de la durée du retard à l'allumage dans les limites imposées par la conservation du niveau de l'excédent d'air à des valeurs rationnelles.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

M. Petrescu C.D. 621.385 : 621.314.7 : 621.375

Sur la stabilité des inverseurs du signe de l'impédance.

L'auteur examine dans l'article les causes qui peuvent conduire à l'instabilité des circuits qui contiennent des inverseurs du signe d'impédance de type parallèle ou de type série. En utilisant le critère des immitances, l'auteur déduit les conditions de stabilité du fonctionnement de l'ensemble inverseur-admittance (impédance) de charge. Il démontre que dans les cas concrets d'utilisation des inverseurs de signe d'impédance, il faut réaliser un compromis entre les conditions de stabilité et les conditions d'inversion exacte du signe d'impédance.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 621.316.5/.54 : 621.3.014/.015 : 621.3.06 : 621.3.027

Gh. Iacobescu

Einfluss des Kurzschlusstyps auf die transiente Einschwingspannung an den Schalterklemmen.

In der Arbeit wird die Ausschaltung verschiedener Kurzschlusstypen elektrischen Netzen studiert und der Einfluss derselben auf die Einschwingspannung an den Schalterklemmen und die diesen eigenen Schwingungsfrequenzen bestimmt.

Im Fall der Kurschlüsse ohne Erdung, wird die Nullpunkt-Induktivität nicht vom Strom durchlaufen, wenn der Schaden an den Schalterklemmen auftritt. Aus diesem Grund wurde das Ersatzschema unter Vernachlässigung der Nullpunkt-Erdungs-Induktivität L_N ausgearbeitet.

Bei den mit Erdung auftretenden Schäden ist diese Vereinfachung nicht gültig. In diesen Fällen hängt die transiente Einschwingspannung, und die ihr eigene Pulsation von dem Verhältnis $\frac{L_0}{L}$ wodurch man die Berechnungen ausführt und so die kritischen Betriebsverhältnisse der Schalter bestimmnt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 621.431 : 621.43.06 : 621.43.01 : 621.43.043

B. Grünwald, N. Apostolescu

Über den Wärmeeffekt der Rezirkulation der Auspuffgase bei dem Dieselmotoren.

Die Rezirkulation der Auspuffgase beeinflusst den auf zwei Arten durchgeführten Verbrennungsprozess : auf thermischen und kinetischen Weg.

In Folgendem wird der Wärmeeffekt des Umlaufs der Auspuffgase studiert und die durch die Notwendigkeit der Aufrechterhaltung eines gewissen Luftüberschusses bedingten Begrenzungseffekte in Betracht gezogen.

Es wurde eine Berechnungsmethode ausgearbeitet, die die Bestimmung des auf den Füllfaktor und die Temperatur der Gase nach Beendigung des Einströmhubs ausgeübten Effektes der Auspuffgase erlaubt.

Die durchgeführten Berechnungen haben den Wirkungsgrad der Rezirkulation der Auspuffgase al Prüfungsmethode der Verdampfungsgeschwindigkeit des Brennstoffs und des Zündverzuges in den von der Aufrechterhaltung des Luftüberschussniveaus in rationellen Werten vorgeschriebenen Grenzen hervorgehoben.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

D.K. 621.385 : 621.314.7 : 621.375

M. Petrescu

Über die Stabilität der Umschalter des Impedanzzeichens.

In dem Artikel werden die Ursachen geprüft, die zur Unbeständigkeit der Leitungen führen können, welche Umschalter des Impedanzzeichens vom Parallel- oder Serientyp enthalten.

Unter Anwendung des Immitanz-Kriteriums werden die Beständigkeitsbedingungen des Betriebs der Belastungs-Umschalter-Admittanz (Impedanz)-Gruppe bestimmt.

Es wird gezeigt, dass in den konkreten Fällen, in denen die Impedanzzeichen-Umschalter benützt werden, ein Kompromis zwischen den Stabilitätsbedingungen und den genauen Umkehrungsbedingungen des Impedanzzeichens erzielt werden muss.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 5/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

MATEMATICĂ

C.Z. : 621.82/.85:515

APLICAȚIILE SISTEMULUI CU DIEDRUL NUL LA CONSTRUCȚIA BUNCĂRELOR *)

NICOLAE MIRESCU

1. În construcția de mașini și instalații sînt numeroase cazuri practice unde se întîlnesc probleme de racordări a diferitelor părți componente (buncăre, conducte, recipiente), de dimensiuni și secțiuni de natură diferită. Asemenea elemente sînt prin urmare suprafețe poliedrale, suprafețe curbe sau suprafețe în componența cărora intră părți curbe și părți plane.

Problema tehnică pe care ne propunem să o rezolvăm și care în general este cunoscută, constă în a obține o desfășurare a acestor suprafețe care să îndeplinească două condiții, după noi, însemnate :

a) desfășurarea obținută să aibă cel mai bun coeficient de exactitate ;

b) epura folosită să conțină cît mai puține construcții grafice.

Pentru a îndeplini aceste condiții, vom da o formulă pentru calculul lungimii generatoarelor în cazul buncărelor conice și vom folosi o epură cu o singură imagine [1] care cere construcții geometrice reduse.

2. Buncăr cu pereții plani

Fie buncărul $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 1) care racordează două deschideri dreptunghiulare, astfel încît centrele celor două secțiuni γ și γ_1 nu se găsesc pe aceeași perpendiculară față de planele de secțiune, considerate paralele. Planele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ sînt paralele, iar fețele plane ale buncărului sînt trapezele : ABB_1A_1, BB_1C_1C, CC_1D_1D și DD_1A_1A *ale* căror plane sînt inegal înclinate față de planul $ABCD$.

Prin aceasta buncărul considerat intră în categoria cea mai generală de buncăre cu pereții plani.

Dacă sistemul în care reprezentăm este cel indicat al cărui modul este μ exprimat în epură prin segmentul ce reprezintă adevărata sa lun-

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

gime, atunci imaginea buncărului dat în figura 1 este completă, dacă se cunoaște proiecția b^* a unui singur punct situat pe una din muchiile trunchiului de piramidă astfel generat.

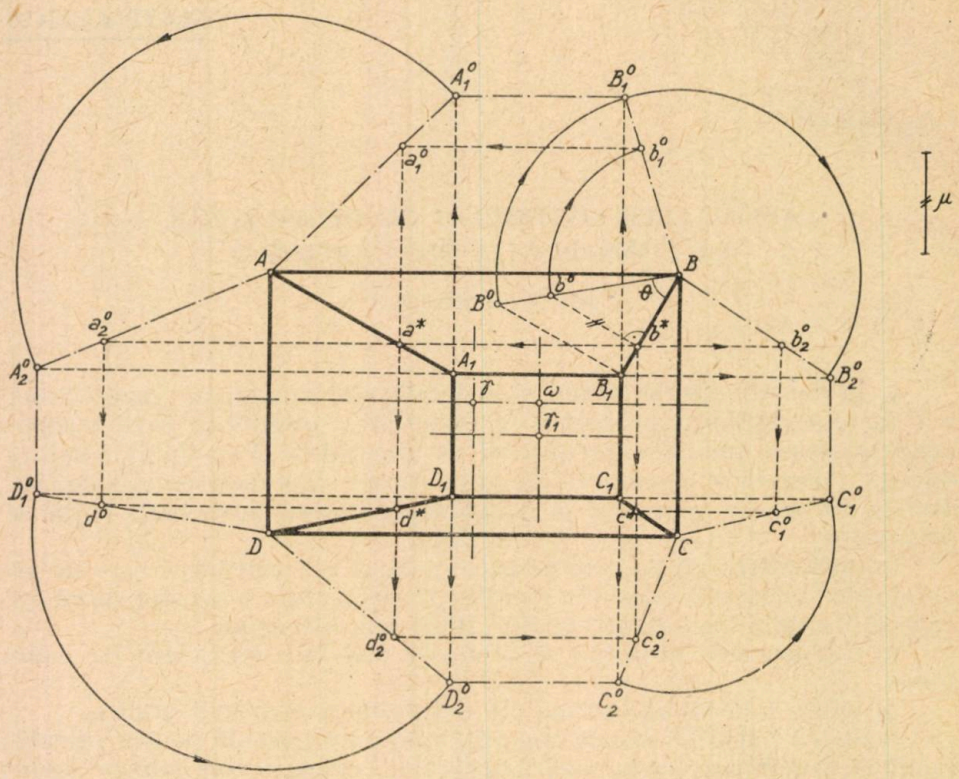


Fig. 1

Rezolvarea problemei rezultă imediat din rabaterile fețelor laterale pe planul secțiunii $ABCD$, considerat ca plan fundamental al sistemului. Astfel, pentru a obține rabaterea trapezului AA_1B_1B se duce din punctul b^*, situat pe muchia BB_1, o perpendiculară pe care se ia lungimea b^*b^0 ($\mu = b^*b^0$). În acest mod avem exprimată în adevărată mărime atît lungimea muchiei BB_1, care este BB^0, cît și unghiul θ care exprimă unghiul dintre această muchie și planul secțiunii $ABCD$.

În acest caz B_1B^0 este tocmai înălțimea buncărului (distanța dintre planele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$).

Rabaterea fetei AA_1B_1B se obține construind punctele A_1^0 și B_1^0 care sînt rabaterile punctelor A_1 și B_1, deoarece muchia AB găsindu-se în planul fundamental (pe care se face rabaterea) este propria sa rabatare.

Punctele $A_1^0B_1^0$ se obțin ca intersecții dintre arcele de cercuri descrise din punctele A și B cu perpendicularele din A_1 și B_1 pe latura AB.

Observăm că operația nu este altceva decît o rabatere [2].

Înălțimile trapezelor fețelor buncărului exprimate grafic în epură pot fi exprimate și analitic folosind formulele lui V. St. Badjulov și colectivul [3].

3. Buncăr cilindro-conic

a) Buncărele cilindro-conice sînt formate dintr-un cilindru circular drept și un trunchi de con coaxial (fig. 2).

Sistemul de corpuri ce intervin în compunerea buncărelor cilindro-conice nu necesită pentru desfășurarea lor nici o operație specială.

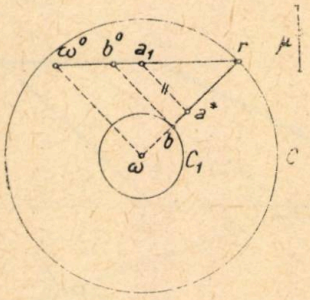


Fig. 2

Dacă se consideră buncărul reprezentat prin cercurile (C) și (C_1) în care cercul (C) e situat în planul epurei, atunci imaginea este determinată dacă se cunoaște cota centrului (C_1), considerînd că planul acestui cerc este paralel cu planul imaginei.

Această cotă se poate deduce dacă pe una din razele cercului (C), de exemplu ω_r, se dă punctul a^*, care este punctul în care generatoarea conului din care face parte trunchiul de con înțeapă planul secundar al sistemului de reprezentare folosit.

Pentru a determina cota planului cercului (C_1), din a^* se duce o perpendiculară egală cu μ ($a^*a_1 = \mu$), iar din punctul b de concurență dintre raza ωr și cercul (C_1) se duce tangentă la acest cerc care întîlnește ra_1 în punctul b°. Segmentul $\overline{bb^\circ}$ este cota planului cercului (C_1) iar $\omega\omega^\circ$ este înălțimea buncărului.

Avînd generatoarea conului și raza cercului de bază, se face desfășurarea în mod analog celei obișnuite în sistemul Monge [4].

Eroarea care se comite este invers proporțională cu numărul laturilor poligonului înscris în cercul director al conului.

4. Buncăr cilindro-conic cu suprafața tronconică oblică

Problema desfășurării suprafeței acestui buncăr se reduce la desfășurarea unui trunchi de con oblic care este secționat după două cercuri paralele de raze diferite.

Pentru acest caz vom folosi sistemul de proiecție Monge corectat prin stabilirea unei formule care permite eliminarea erorilor inerente construcțiilor grafice.

Fie buncărul cilindro-conic cu baza cercului (*C*) în planul epurei și cu cea de-a doua bază cercul (C_1) a cărui plan este paralel cu planul cercului (*C*). Generatoarele de contur aparent în această epură sînt tangen-

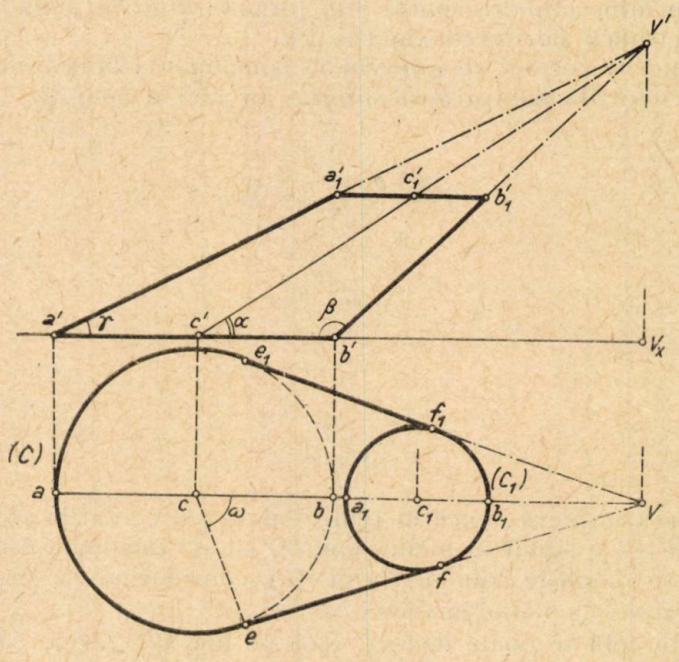


Fig. 3

tele comune exterioare *ef* și $e_1 f_1$. Pentru a desfășura acest buncăr este necesar să înscriem un trunchi de piramidă cu un număr suficient de muchii. Mărimea generatoarelor se poate obține prin rabateri succesive.

Ne propunem însă să dăm o metodă nouă care face posibilă verificarea pe cale analitică.

Pentru aceasta să considerăm conul oblic (fig. 4) a cărui bază este cercul (*C*) și al cărui ax este *s*. Vîrful conului este într-un punct oarecare *V* a cărui proiecție pe planul bazei este *V'* și să considerăm planul sagital care cuprinde generatoarele *VA* și *VB*, care sînt cea mai lungă și cea mai scurtă (generatoarea maximă și minimă a conului).

Unghiul pe care-l fac generatoarele cu planul (*P*) sînt :

$$VAB = \hat{\gamma}$$

$$VBA = \hat{\beta} \qquad \text{și}$$

$$VOB = \hat{\alpha}$$

Considerăm planul VAB fix.

Notăm generatoarele : $VA = g_1$

$VB = g_2$

$VO = s$

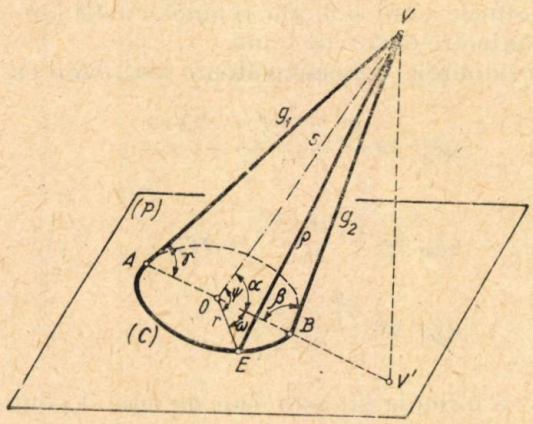


Fig. 4

Atunci o generatoare oarecare ϱ face cu raza r un unghi ψ, iar OE este raza corespunzătoare acestei generatoare.

Dacă se notează cu $\hat{\omega} = \sphericalangle BOE$ și $\hat{\psi} = \sphericalangle VOE$ atunci din triunghiurile VAO, VOB și VOE rezultă relațiile :

$$\begin{aligned} g_1^2 &= s^2 + r^2 + 2\,rs\cos\alpha \\ g_2^2 &= s^2 + r^2 - 2\,rs\cos\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\varrho^2 = s^2 + r^2 - 2\,rs\cos\psi \qquad (2)$$

Între unghiurile α, ω și Ψ există relația :

$$\cos\psi = \cos\alpha\cos\omega \qquad (3)$$

Se găsește din relațiile (1) că

$$g_1^2 + g_2^2 = 2\,s^2 + 2\,r^2 \therefore \frac{g_1^2 + g_2^2}{2} = s^2 + r^2$$

care introdusă în relația (2) și ținînd seama de (3) se obține :

$$\boxed{\varrho^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2}{2} - 2\,rs\cos\alpha\cos\omega} \qquad (4)$$

Această formulă ne dă lungimea unei generatoare oarecare în funcție de cosinusul unghiului ω pe care raza corespunzătoare generatoarei

o face cu diametrul cercului de bază, corespunzător generatoarelor ce determină planul principal (axial) al conului.

Deci generatoarele buncărului se obțin prin calcul folosind formula (4).

Astfel, dacă alegem pentru $\omega = 30°$, $60°$ și $90°$, care au drept corzi corespondente laturile unui poligon regulat cu 12 laturi înscris în cerc, ceea ce dă o aproximare destul de bună.

Atunci generatoarele corespunzătoare vor avea ca valori :

$$\varphi^2_{30°} = \frac{g_1^2 + g_2^2 - \sqrt{3}\, rs}{2};$$

$$\varphi^2_{60°} = \frac{g_1^2 + g_2^2}{2} - rs;$$

$$\varphi^2_{90°} = \frac{g_1^2 + g_2^2}{2}$$

Se constată că formula (4) este ușor de mînuit pentru ori cît de mică lungime, făcînd astfel posibilă desfășurarea cu un grad optim de aproximare.

În ceea ce privește construcțiile grafice, sînt cele cunoscute.

Observare

Deoarece în unele împrejurări buncărele tronconice au dimensiuni destul de mari, desfășurarea arătată mai înainte se face practic cu ajutorul unei piramide înscrise în con. Din punct de vedere al construcției geometrice sîntem conduși la soluționarea problemei diviziunei circonferinței într-un număr de părți egale. În afară de cazul cînd n este o putere a lui 2 și de cazurile cînd $n = 3$ și $n = 5$ care dau abateri mari, după o teoremă a lui Gauss, construcția este de asemeni posibilă și în cazul cînd $n = 2^k + 1$.

Vom calcula pentru acest caz considerînd raza cercului egală cu unitatea, erorile ce se comit în cazul înscrierii poligoanelor cu 7 laturi.

Latura l_7 septagonului înscris în cercul de rază $R = 1$ este :

$l_7 = 0{,}86776..$

dar :

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86602.. = \frac{1}{2} l_3$$

Adică latura septagonului regulat este aproximativ egală cu jumătatea laturii triunghiului echilateral înscris în același cerc iar eroarea $\varepsilon < 0{,}002$.

Observăm că se poate obține o eroare mai mică considerînd că :

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}=0{,}86803\ldots$$

care dă eroarea $\varepsilon<0{,}0003$

Deci dacă se prelungește latura unui decagon regulat înscris în cerc cu un sfert din rază se obține o lungime destul de apropiată de latura septagonului.

Din punct de vedere grafic este important faptul că latura decagonului se găsește cu ușurință.

Catedra de geometrie descriptivă și desen I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Botez M. Șt.* Sur une nouvelle manière de prèsenter l'espace linéaire. Buletinul Institutului politehnic București. Tomul XXII — fascicola 3 — 1961.
2. *Mirescu N.* Asupra deplasărilor de speța întîi în epura cu diametrul fundamental nul. Buletinul Institutului politehnic București. Tomul XXVI — fascicola 3 — 1964.
3. *Bundjulov V. St.* Iv. Il. Dimovschi și D. N. Petrov. Desfășuratele pieselor din tablă, (trad. lb. bulgară) Edit. Tehnică București — 1964.
4. *Mirescu N.* Geometrie descriptivă. Editura didactică și pedagogică, 1964.
5. *Fempl S.* Sur une curbe tracée sur la surface du cône developpé. Bul. de L'Acad. Serbe de Sciences. Tomul XX. (3) 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z.: 517 : 624.041 (083.57)

NOMOGRAME ANAMORFICE PENTRU PRIMA FORMĂ CANONICĂ A ECUAȚIILOR DE ORDINUL III, REALIZATE CU EPURE MONGE *

H. BODNĂRESCU, RAISA BODNĂRESCU, ERNA VOINEA
Catedra de matematici Institutul de Petrol, Gaze și Geologie București

Fie ecuația :

$$f_2(v) = f_1(u) \cdot f_3(w) \tag{1}$$

Ecuația (1) poate fi scrisă sub forma (Soreau) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & f_1(u) \\ 1 & 1 & f_2(v) \\ 1 & \dfrac{1}{1-f_3(w)} & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Ecuațiile scărilor raportate la un reper cartezian xOz sînt :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Scara } (u) & \begin{cases} x = 0 \\ z = f_1(v) \end{cases} \\ \text{Scara } (v) & \begin{cases} x = 1 \\ z = f_2(v) \end{cases} \\ \text{Scara } (w) & \begin{cases} x = \dfrac{1}{1-f_3(w)} \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Nomograma corespunzătoare relației (2) are forma din fig. 1.

Să arătăm cum se poate obține nomograma din fig. 1, pornind de la o epură Monge.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

Fie verticalele D și E, dreapta F conținută în planul orizontal de proiecție — vezi epura din fig. 2 — și planul de capăt, variabil, P, definit prin urmele P_h și P_v.

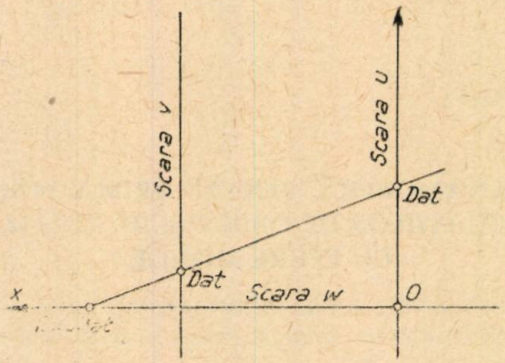


Fig. 1

Ecuațiile dreptelor D, E și F sînt :

$$\left.\begin{array}{l} D\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=a \end{array}\right. \\ E\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=b \end{array}\right. \\ F\left\{\begin{array}{l} qx+py=pq \\ z=0 \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Ecuația planului de capăt P este :

$$\alpha x+\beta z=\gamma \tag{5}$$

Fie $M_u = P \cap D$; $M_v = P \cap E$ și $M_w = P \cap F$.

Rezolvînd sistemele de ecuații (4) D și (5), (4) E și (5), (4) F și (5) se obține :

$$M_u\left(0,\ a,\ \frac{\gamma}{\beta}\right),\ M_v\left(1,\ b,\ \frac{\gamma-\alpha}{\beta}\right) \text{ și}$$

$$M_w\left(\frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{q(p\alpha-\gamma)}{p\alpha},\ 0\right)$$

Dacă $M_u\ (x_u,\ y_u,\ z_u)$, $M_v\ (x_v,\ y_v,\ y_v)$, $M_w\ (x_w,\ y_w,\ z_w)$ atunci

$$\left.\begin{array}{l} x_u=0 \\ yu=a \\ zu=\dfrac{\gamma}{\beta} \end{array}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} x_v &= 1 \\ yv &= b \\ zu &= \frac{\gamma-\alpha}{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ yw &= \frac{q(p\alpha-\gamma)}{p\alpha} \\ zw &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6'')$$

condiția ca punctele $M_u \in D$, $M_v \in E$, $M_w \in F$, să fie conținute într-un plan de capăt, se obține eliminînd α, β și γ dintre relațiile :

$$z_u = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad z_v = \frac{\gamma-\alpha}{\beta}, \quad x_w = \frac{\gamma}{\alpha} \qquad (7)$$

relațiile (7) fiind extrase din relațiile (6), (6') și (6''), după eliminare se obține :

$$x_w\, z_v = (x_w - 1)\, z_u \qquad (8)$$

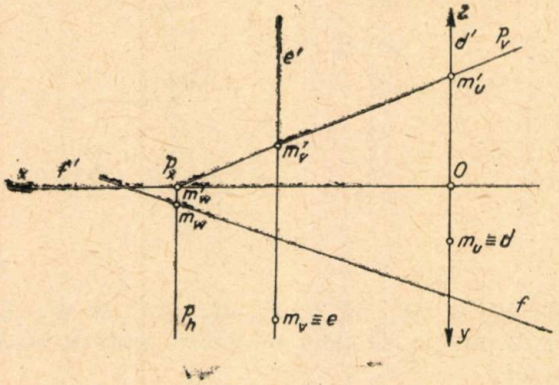


Fig. 2

Alegem dreptele D, E, F drept suporturi ale scărilor funcționale :

$$\left.\begin{aligned} z_u &= f_1(u) \\ z_v &= f_2(v) \\ x_w &= \frac{1}{1-f_3(w)} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Înlocuind valorile din (9) în (8) se obține :

$$f_2(v) = f_3(w) \cdot f_1(u) \tag{10}$$

Relația (10) este identică cu (1), iar epura din fig. 2 este echivalentă cu nomograma din fig. 1.

* * *

Vom arăta în continuare cum se pot construi nomograme combinate din forme canonice (1) cu ajutorul epurei Monge.

Să considerăm dreptele verticale D și E conținute în planul vertical de proiecție și dreptele de capăt F și G conținute în planul orizontal de proiecție ; dreptele D și F coincid respectiv cu axa O_z și O_y iar dreptele E și G sînt conținute în același plan de profil — vezi epura de la fig. 3.

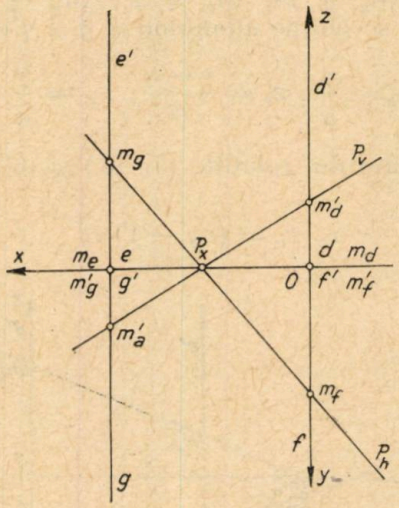


Fig. 3

Fie punctele $M_d \in D$, $M_e \in F$, $M_f \in F$ și $M_g \in G$. Să punem condiția ca aceste puncte să fie coplanare ; pentru aceasta considerăm ecuațiile dreptelor :

$$D \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad E \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad F \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad G \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \tag{11}$$

și deci :

$$M_d\,(0\,,0\,,z_u)\,,\ M_e\,(1\,,0\,z_v)\ M_f\,(0\,,y_w\,,0)\,,\ M_g\,(1\,,y_t\,,0)$$

Ecuația planului P, în care se găsesc punctele

M_d, M_e, M_f, M_g, este :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \vartheta = 0 \tag{12}$$

Evident:

$$M_d = P \cap D;\ M_e = P \cap E;\ M_f = P \cap F \text{ şi } M_g = P \cap G.$$

Condiţia $M_d, M_e, M_f, M_g \in P$ este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & z_u \\ 1 & 1 & 0 & z_v \\ 1 & 0 & y_w & 0 \\ 1 & 1 & y_t & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Alegînd drept suporturi ale scărilor u, v, w, şi t respectiv dreptele D, E, F, G şi drept scări funcţionale:

$$\left.\begin{aligned} z_u &= \varphi_1(u) \\ z_v &= \varphi_2(v) \\ y_w &= \varphi_3(w) \\ y_t &= \varphi_4(t) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

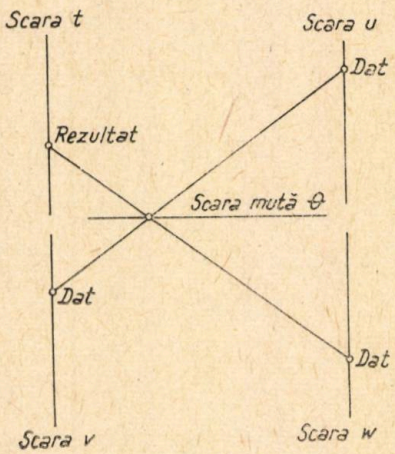


Fig. 4

Înlocuind în (13) valorile din relaţiile (14) se obţine:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \varphi_1(u) \\ 1 & 1 & 0 & \varphi_2(v) \\ 1 & 0 & \varphi_3(w) & 0 \\ 1 & 1 & \varphi_4(t) & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

Ecuaţia (15) reprezintă o extindere a ecuaţiei Soreau (2).

Dezvoltînd determinantul din membrul I al ecuației (15) se obține :

$$\varphi_1(u) \cdot \varphi_4(t) = \varphi_2(v) \cdot \varphi_3(w) \tag{16}$$

Nomograma ce rezultă conform epurei de la fig. 3 are forma din fig. 4 — scara mută θ corespunde liniei de pămînt Ox — În fig. 4 este redat și modul de folosire al nomogramei.

Cele de mai sus vor fi folosite pentru realizarea unor tipuri de nomograme „cu puncte coplanare", în care ecuația Soreau va fi înlocuită prin :

$$\begin{vmatrix} 1 & F_1(u) & G_1(u) & H_1(u) \\ 1 & F_2(v) & G_2(v) & H_2(v) \\ 1 & F_3(w) & G_3(w) & H_3(w) \\ 1 & F_4(t) & G_4(t) & H_4(t) \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Ecuația (16) reprezintă o extindere a „ecuației Soreau" în cadrul „nomogramelor cu puncte coplanare".

Pentru practica construcției acestor nomograme, trebuiesc considerate transformări proiective aplicate atît ecuației (15) cît și ecuației (16).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z.: 517.5 : 514

PROPRIETĂȚI ALE SERIEI FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCȚII NEINTEGRABILE DE SINGULARITĂȚI DATE *

MARIANA CRAIU

1. Să considerăm funcția $f(x)$ definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M} \subset [-\pi, \pi]$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Fie $\mathfrak{M}_p \subset \mathfrak{M}$ o mulțime finită $\mathfrak{M}_p = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ care îndeplinește următoarele condiții :

a) $x_1 = -\pi$, $x_p = \pi$

b) $x_{p+1} - x_p = \dfrac{2\pi}{p-1}$

c) funcția $\varphi(x) = f(x) \prod_{k=1}^{p} (x - x_k)$, $x \in (-\pi, \pi) - \mathfrak{M}$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$

În această situație funcția $\varphi(x) = \sin nx\, f(x)$ este integrabilă pe $[-\pi . \pi]$ deoarece $\sin nx$ are aceleași zerouri ca și $\prod_{k=1}^{p} (x - x_k)$ dacă luăm $p = 2n+1$

Vom considera în această lucrare acest caz.

2. Dacă seria asociată funcției integrabile $\varphi(x)$ este :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{1}$$

procedînd ca în [2] trebuie să avem :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \equiv \sin nx \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right] \tag{2}$$

unde, seria trigonometrică :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ este seria asociată funcției neintegrabile } f(x) \tag{3}$$

* Manuscris predat la redacție la 29 septembrie 1966

Coeficienţii seriei (3) sînt soluţii ale sistemului infinit :

$$\alpha_0 = b_n,\ 2\alpha_1 = b_{n-1} + b_{n+1}, \ldots, 2\alpha_{n-1} = b_1 + b_{2n-1}, 2\alpha_n = b_n,$$
$$2\alpha_{n+1} = b_{2n+1} - b_1, \ldots, 2\alpha_{n+k} = b_{2n+k} - b_k, \ldots \tag{4}$$
$$2\beta_1 = a_{n-1} - a_{n+1},\ 2\beta_2 = a_{n-2} - a_{n+2}, \ldots, 2\beta_n = a_0 - a_{2n},$$
$$\ldots 2\beta_{n+k} = a_k - a_{2n+k}$$

soluţie dată de :

$$b_{2pu+k} = 2\ (\alpha_{n+k} + \alpha_{2u+k} + \ldots + \alpha_{(2p-1)\,n+k}) + b_k$$

$$b_{(2p+1)\,n} = 2\left(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_{2n} + \ldots + \alpha_{2pn}\right),\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_{(2p+1)\,n+k} = 2\,(\alpha_k + \alpha_{2n+k} + \ldots \alpha_{2pn+k}) - b_{n-k} \tag{5}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1\ ;\ p = 0.\ 1, \ldots,$$

şi

$$a_{2pn+k} = a_k - 2\,(\beta_{n+k} + \beta_{3n+k} + \ldots + \beta_{(2p-1)\,n+k})$$
$$k = 0, 1, \ldots, n\ ;\ p = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$a_{(2p+1)\,n+k} = a_{n-k} - 2\,(\beta_k + \beta_{2n+k} + \ldots \beta_{2p+k})$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1\ ;\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

unde :

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \cos kt\, dt\ ;\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \sin kt\, dt$$

înlocuind α_k şi β_k în (4) şi (5) şi, însumînd, obţinem coeficienţii seriei (3).

$$a_{2kn+k} = a_k + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos(2pn + k)\,t - \cos kt]\,dt$$
$$k = 0, 1, \ldots, n\ ;\ p = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$a_{(2p+1)\,n+k} = a_{n-k} + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\,[\cos(2pn + n + k)\,t - \cos(n-k)t]\,dt \tag{6}$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1\ ;\ p = 0, 1, \ldots$$

şi :

$$b_{2pn+k} = b_k + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,[\sin(2pn + k\,t) - \sin kt]\,dt$$
$$k = 0, 1, \ldots. n-1\ ;\ p = 1, 2, \ldots,$$

$$b_{(2p+1)\,n+k} = -b_{n-k} + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\,[\sin 2pn + n + k)\,t + \sin(n-k)\,t]\,dt$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1 \; ; \; p = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

$$b_{(2p+1)\,n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin (2p+1)\, nt\, dt$$

3. Dacă înlocuim pe a_k și b_k dați de (6) și (7) în (3) și considerăm pe $b_1, b_2 \ldots, b_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n$ nedeterminați, putem enunța următoarea :

Teorema 3.1

Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, neintegrabilă pe $[-\pi, \pi]$
Fie $\mathfrak{M}_p$ o mulțime care îndeplinește condițiile a), b), f îndeplinind în raport cu $\mathfrak{M}_p$ și condiția c).
Seria Fourier asociată funcției $f(x)$ este de forma :

$$S(x) \sim S^*(x) + \lambda_0 S_0(x) + \lambda_1 S_1(x) + \ldots \lambda_n S_n(x) + \mu_1 S_1^*(x) + \ldots + \mu_{n-1} S_{n-1}^*(x) \tag{7'}$$

cu $$S_0(x) = \frac{1}{2} + \cos 2nx + \cos 4nx + \ldots$$

$$S_k(x) = \cos kx + \cos (2n-k)\, x + \cos (2n+k)\, x + \cos (4n-k)\, x + \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

$$S_k^*(x) = \sin kx - \sin (2n-k)\, x + \sin (2n+k)\, x \sin (4n-k)\, x + \ldots$$
$$\ldots (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

și

$$S^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

unde coeficienții a_0, a_k, b_k sînt dați de (6) și (7) cu coeficienții nedeterminați nuli.

Seriile S_0, S_k și S_k^* sînt serii trigonometrice independente de $f(x)$

4. Se poate demonstra următoarea

Teorema 4.1

Seriile $S_p(x)\,(p = 1, 2, \ldots, n)$ date de (8) sînt sumabile (C 1) către 0 pe $[-\pi, \pi] - \mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_p'$ unde $\mathfrak{M}_p' \subset \mathfrak{M}_p$ este mulțimea punctelor $x_k = \pm$
$\pm \frac{k\pi}{n}$ cu $k = \frac{2s+1}{2p} n$, $p = 1, 2, \ldots, n$ și s natural ;

$S_0(x)$ este sumabilă (C, 1) către 0 pe $[-\pi, \pi] - \mathfrak{M}_p$

Seriile $S_p^*(x)$ $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$ sînt sumabile $(C, 1)$ către 0 pe $[-\pi, \pi] - \mathfrak{M}_p + \mathfrak{M}_p''$ unde $\mathfrak{M}_p'' \subset \mathfrak{M}_p$ este mulțimea punctelor $x_k = \pm \frac{k\pi}{n}$
cu $k = \frac{sn}{p}$, $(p = 1, 2, \ldots, n-1)$, s natural

Demonstrație :

Să considerăm seria $S_0(x) = \frac{1}{2} + \cos 2nx + \cos 4nx + \dots$

Suma parțială $s_p(x) = \frac{1}{2} + \cos 2nx + \dots + \cos 2pnx$ și, însumînd

$$sp(x) = \frac{\sin (2pu + u)\, n}{2 \sin nx}$$

$$\sigma_p = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1}}{p} = \frac{\sin^2 pnx}{p \sin nx}$$

$\sigma_p \to 0$ pentru $\sin nx \neq 0$ adică pentru $x \neq \pm \frac{k\pi}{n}$

În mod asemănător se demonstrează și celelalte cazuri.

5. fie $f^*(x)$ funcție definită pe $(0, \pi)$ în afara unei mulțimi de măsură nulă, neintegrabilă pe $(0,\pi)$; fie $f(x)$ definită pe $[-\pi, \pi]$ astfel :

$$f(x) = \begin{cases} f^*(x), & x \in (0,\pi) \\ -f^*(-x), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Ne propunem să demonstrăm următoarea :

Teorema 5.1 Adică funcția

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - x_k)\, f(x)$$

este cu variație mărginită pe $[0, \pi]$, atunci seria Fourier

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_{2n} \sin nx + \dots,$$

atașată funcției $f(x)$ are coeficienții b_n mărginiți.

Demonstrație : Zerourile funcției $\prod_{k=1}^{p} (x - x_k)$ sînt de forma $x_k = \frac{k\pi}{n}$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Considerăm intervalul $[0, \pi]$ ca următoarea reuniune de intervale

$$\left[0, \frac{\pi}{2n}\right] \cup \left[, \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{(2n-1)\pi}{2n}, \pi\right]$$

Deoarece funcția $\varphi(x)$ este mărginită pe $[0, \pi]$, urmează că toate integralele

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin mt\, dt, \quad m = 1, 2, \dots$$

există și sînt finite ; în adevăr :

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin mt\, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{2k-1}{2n}\pi}^{\frac{2k+1}{2n}\pi} f(t) \sin mt\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(t) \sin mt\, dt +$$

$$\int_{\frac{2n-1}{2n}\pi}^{\pi} f(t) \sin mt\, dt$$

dar :

$$\int_{\frac{2k-1}{2u}\pi}^{\frac{2k+1}{2n}\pi} f(t) \sin mt\, dt = \int_{\frac{2k-1}{2n}\pi}^{\frac{2k+1}{2n}\pi} \varphi(t) \prod_{k=1}^{p} \frac{\sin mt}{(t - x_k)}\, dt = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \Phi(u) \frac{\sin m\left(u + \frac{k\pi}{n}\right)}{n} du$$

integrală care există, integrantul fiind produsul între o funcție mărginită și o funcție integrabilă. Funcția $\varphi(x)$ este cu variația mărginită pe $[0, \pi]$, deci putem scrie :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + P(x) - N(x)$$

unde :

$$P(x) = \frac{1}{2}[V(x) + \varphi(x) - \varphi(0)]$$

$$N(x) = \frac{1}{2}[V(x) - \varphi(x) + \varphi(0)]$$

sînt crescătoare și pozitive ; V (x) reprezintă variația totală a lui $\varphi(x)$ pe $[0, x]$.

Avem :

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt\, f(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [\varphi(0) + P(t) - N(t)] \frac{\sin mt}{\prod_1^p (t - x_k)}\, dt$$

Considerăm integrala pe intervalul : $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ și aplicăm a 2-a formulă a

mediei ; obținem :

$$\frac{2}{\pi}\varphi(0)\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin mt}{t}dt+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}P(t)\frac{\sin mt}{t}dt-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}N(t)\frac{\sin mt}{t}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\varphi(0)}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin mt}{t}dt+\frac{2}{\pi}P\left(\frac{\pi}{2n}\right)\int_a^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin mt}{t}dt-\frac{2}{\pi}N\left(\frac{\pi}{2n}\right)\int_b^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin mt}{t}dt$$

însă :

$$\left|\int_c^{\frac{\pi}{2n}}\frac{\sin mt}{t}dt\right|=\left|\int_{mc}^{\frac{m\pi}{2n}}\frac{\sin u}{u}du\right|<\pi$$

Raționamentul este același și pentru celelalte intervale.. Deci, șirul (b_m) este mărginit.

6. În acest aliniat ne ocupăm de comportarea sumelor parțiale $s_p(x)$ ale seriei $S^*_{(x)}$ pentru $p\to\infty$ într-un punct x de continuitate al funcției $f(x)$ fapt ce ne va permite să studiem și ordinul de creștere a sumelor $s_p(x)$

Ne propunem să demonstrăm următoarea :

Teorema 6.1. Într-un punct $x\in(-\pi,\pi)$ de continuitate al funcției $f(x)$ sumele parțiale $s_p(x)$ ale seriei trigonometrice (3) atașată funcției $f(x)$ au proprietatea :

$$\lim_{p\to\infty}\frac{s_p(x)}{g(p)\,p^{\alpha-1}}=0,\ \alpha<2$$

pentru orice $g(p)\to\infty$, cînd $p\to\infty$ dacă $\Psi(p)=\prod_{k=1}^{p}(x-x_k)^{\alpha}f(x)$ este mărginită pentru $x\in[-\pi,\pi]$

Demonstrație :

Vom calcula pe $s_{2pn}(x)$, deoarece rezultatele sînt asemănătoare și pentru celelalte sume. Folosind (6) și (7) obținem :

$$s_{2pn}(x)=a_0\frac{\sin(2pns+n)x}{2\sin nx}+a_1\frac{\sin 2pnx\cos(n-1)x}{\sin nx}+\ldots$$

$$\ldots + an\frac{\sin 2pnx}{\sin nx} - b_1\frac{\sin 2pnx\,\sin(n-1)x}{\sin nx} - \ldots \tag{9}$$

$$\ldots - b_{n-1}\frac{\sin 2pnx\sin x}{\sin nx} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_{2pn}(x,t)\,f(t)\,dt.$$

cu :

$$A_{2pn}(x,t) = \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} - \frac{2\sin 2pnx\cos n(x+t)\sin(n-1)(x-t)}{\sin nx\sin\frac{x-t}{2}} -$$

$$- \frac{\sin(2p+1)nx + \cos nt\sin 2pnx}{\sin nx}$$

Să considerăm un punct de continuitate $x \neq \pm\frac{k\pi}{n}$ $(k=0,1,..,n)$ a funcției $f(x)$. Presupunem punctul situat în intervalul $\left(-\frac{\pi}{n},0\right)$

Se alege intervalul $[x-\delta,\ x+\delta] \subset \left(-\frac{\pi}{n},0\right)$ astfel ca $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ pentru $t \in [x-\delta,\ x+\delta]$.

Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ a lui $f(x)$ se poate scrie :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}f(x)\,dt \tag{10}$$

Ne propunem să evaluăm diferența :

$$s_{2pn}(x) - f(x) = B(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[A_{2pn}(x,t)\,f(t) - \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}f(x)\right]dt$$

unde :

$$B(x) = a_0\frac{\sin(2p+1)nx}{2\sin nx} + a_1\frac{\sin 2pnx\cos(n-1)x}{\sin nx} + \ldots + a_n\frac{\sin 2pnx}{\sin nx} -$$

$$- b_1\frac{\sin 2pnx\,\sin(n-1)x}{\sin nx} - \ldots - b_{n-1}\frac{\sin 2pnx\sin x}{\sin nx}$$

Pentru un interval $\left(x-\frac{1}{p}, x+\frac{1}{p}\right) \subset [x-\delta, x+\delta]$ avem următoarea descompunere :

$$\int_{-\pi+A}^{\pi-A} = \int_{-\pi+A}^{-\frac{\pi}{n}-A} + \int_{-\frac{\pi}{n}-A}^{-\frac{\pi}{n}+A} + \int_{-\frac{\pi}{n}+A}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x-\frac{1}{p}} + \int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} + \int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{n}-A} + \int_{\frac{\pi}{n}-A}^{\frac{\pi}{n}+A} + \int_{\frac{\pi}{n}+A}^{\pi-A} = \sum_{i=1}^{9} I_i$$

Integralele I_1, I_3, I_4, I_6, I_9 există, integranții fiind funcții continui.

Evaluăm I_5 :

$$I_5 = \int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} [f(t)-f(x)]\,dt -$$

$$-\int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} \frac{2\sin 2pnx\cos n(x+t)\sin(n-1)(x-t)}{\sin nx\sin\frac{x-t}{2}} f(t)\,dt -$$

$$-\int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} \frac{\sin(2p+1)nx+\cos nt\sin 2pnx}{\sin nx} f(t)\,dt$$

$$I_5 \leqslant 2\varepsilon \int_{-\frac{1}{2p}}^{\frac{1}{2p}} \frac{\sin(4pn+1)u}{\sin u}\,du + M \leqslant \varepsilon\pi\frac{4pn+1}{4p} + M$$

La fel pentru I_6:

$$I_6 \leqslant \int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} [f(t)-f(x)]\,dt + M' \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_{\frac{1}{2p}}^{\delta} \frac{\sin(4pn+1)u}{\sin u}\,du + M' \leqslant \frac{\varepsilon\pi}{2} \int_{\frac{1}{2p}}^{\frac{\delta}{\tau}} \frac{du}{u} = \frac{\varepsilon\pi}{2}(ln\delta + ln\, p)$$

Evaluăm integrala I_7

$$I_7 = \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}t\,\cos\frac{4pn+1}{2}x}{\sin\frac{t-x}{2}} f(t)\,dt - \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} \frac{\sin\frac{4pn+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} f(x)\,dt -$$

$$- \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{2}-A} f(t) \left[\frac{\cos\frac{4pn+1}{2}t\,\sin\frac{4pn+1}{2}x}{\sin\frac{t-x}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\sin 2pnx\cos n(x+t)\sin(n-1)(x-t)}{\sin nx\sin\frac{x-t}{2}} + \frac{\sin(2p+1)nx + \cos nt\sin 2pnx}{\sin nx} \right] dt$$

În vecinătatea originii a 3-a integrală este de forma :

$$\mu(x)\,p^2t^2f(t)$$

iar în celelalte puncte, funcția este continuă iar integrala mărginită.

Rămîne de evaluat prima integrală :

$$\left| \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{n}-A} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2} t \cos \frac{4pn+1}{2} x}{\sin \frac{t-x}{2}} f(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x+\delta}^{\frac{\pi}{n}-A} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2} t}{2 \sin \frac{t-x}{2}} f(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int_{0}^{\frac{\pi}{n}-A-x-\delta} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} f(u)\, du \right| =$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{p}} + \int_{\frac{1}{p}}^{\gamma} \leqslant \int_{0}^{\frac{1}{p}} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2} u}{2u^{\alpha} \sin \frac{u}{2}} u^{\alpha} f(u)\, du + \int_{\frac{1}{p}}^{\gamma} \frac{\sin \frac{4pn+1}{2} u}{2u^{\alpha} \sin \frac{u}{2}} u^{\alpha} f(u)\, du \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_{0}^{\frac{1}{p}} \frac{4pnu}{u^{\alpha}}\, du = 4M_1\, np^{\alpha-1}.$$

deoarece $u^{\alpha} f(u)$ în vecinătatea originii este mărginit pentru $\alpha < 2$

Ceea ce era de demonstrat.

Catedra de matematici III
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE:

Roșculeț Marcel N., Cercetări asupra seriilor trigonometrice — Studii și cercetări matematice, nr. 4/1965

Roșculeț Marcel N., Sur la Série de Fourier attachée à une fonction non integrable — Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1966, Nr. 2

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z.: 515

SYMMETRISCHE PANEVOLUTEN *

CORNELIA NANEȘ

Man denke sich in der xoy Ebene eine glatte Kurve (c), deren Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ stetig ist, und durch die vektorielle Gleichung

$$\bar{r} = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} \quad x, y \in C^2[t_0, t_1] \tag{1}$$

ausgedrückt wird.

Der Radiusvektor

$$\bar{R}_0 = \bar{r} + \varrho \cdot \bar{\nu} \tag{2}$$

bestimmt den Krümmungsmittelpunkt $C(\xi, \eta)$ bezüglich des Punktes $M(x,y) \in (c)$ [ϱ der zugehörige Krümmungsradius, $\bar{\nu}$ der zugehörige Einheistvektor der Normalen] und der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist die Evolute (γ) der Kurve (c).

Nimmt man eine reelle Zahl n, und auf der Normalen MC zwei Punkte $P_1(X_1, Y_1)$ und $P_2(X_2, Y_2)$ an, so dass:

$$P_1M = CP_2 = n\varrho$$

dann werden diese Punkte durch die Ortsvektoren

$$\bar{R}_1 = \bar{r} - n\varrho\bar{\nu}; \quad \bar{R}_2 = \bar{r} + (n+1)\varrho\bar{\nu}$$

ausgedrückt, und bezüglich (2) wird

$$\bar{R}_1 = (n+1)\bar{r} - n\bar{R} \tag{3}$$

$$\bar{R}_2 = (n+1)\bar{R}_0 - n\bar{r} \tag{4}$$

In der Zeit in welcher der Punkt M die Kurve (c) beschreibt, beschreiben die Punkte P_1 und P_2 Kurven die mit Γ_1 beziehungsweise Γ_2 bezeichnet sind. Gino Loria [1] nennt diese Kurven Panevoluten. Im Folgenden werden einige Eigenschaften der Panevoluten gezeigt.

---

* Mitteilung, bei der wissenschaftichen Tagung der Lehrkräfte des Polytechnischen Instituts „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bukarest, 27—29 Mai 1966.

I Wenn s, σ, S_1 und S_2 die Bögen der Kurven (c), (γ), (Γ_1) und (Γ_2) sind, gemessen von den Punkten die denselben Werte t_0 des Parameters t entsprechen, so enstehn auf Grund von (3) und (4), folgenden Beziehungen zwischen den Bögendifferentialen der vier betreffenden Kurven;

$$dS_1^2 = (n+1)^2 ds^2 + n^2 d\sigma^2$$

$$dS_2^2 = (n+1)^2 d\sigma^2 + n^2 ds^2$$

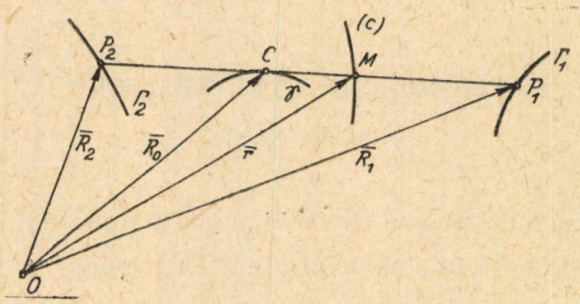


Fig. 1

weil $ds^2 = dx^2 + dy^2$ $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$; $dS_1^2 = dX_1^2 + dY_1^2$; $dS_2^2 = dX_2^2 + dY_2^2$ und die Tangenten der Kurven (c) und (γ) senkrecht auf einander sind, also $d\zeta dx + d\eta dy = 0$ und $d\sigma = d\varrho$. Woraus, wenn $\frac{n+1}{n} = k$, folgt :

$$\frac{dS_1^2 + dS_2^2}{dS_1^2 - dS_2^2} = \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot \frac{ds^2 + d\sigma^2}{ds^2 - d\sigma^2} \tag{5}$$

Dass heisst : *der Quotient zwischen den Summen und den Differenzen der Quadrate der Bögendifferentiale der Kurven* Γ_1 *und* Γ_2 *bezüglich derselben Werte des Parameters t ist verhältnissgleich mit dem entsprechenden Quotient zwischen den Bögendifferentialen der gegebenen Kurve (c) und ihrer Evolute* (γ).

II. Bezüglich derselben Werte des Parameters t findet man für die entsprechenden Punkte gleichfalls elementare Verhältnisse zwischen den Winkeln der Tangenten der Kurven Γ_1, Γ_2 und γ, c.

Die Formeln (3) und (4) liefern :

$$\frac{dY_1}{dX_1} = \frac{kdy - d\eta}{kdx - d\xi}; \quad \frac{dY_2}{dX_2} = \frac{kd\eta - dy}{kd\xi - dx}$$

und daher :

$$\operatorname{tg}(\Gamma_1, \gamma) = k \cdot \operatorname{tg}(\Gamma_2, \gamma) \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}(\Gamma_1, c) = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg}(\Gamma_2, c) \tag{7}$$

also : *in den entsprechenden Punkten, für dieselben Werte des Parameters* t, *sind die Tangenten der Winkel der Kurven* Γ_1, γ *und* Γ_2, c

verhältnissgleich mit den Tangenten der Winkel der Kurven Γ_2, γ *beziehungsweise* Γ_2, c.

Woraus folgt: *die Tangenten der Kurven* Γ_1 *und* Γ_2 *in den entsprechenden Punkten, schneiden die Tangente der gegebenen Kurve und seiner Evolute in einem konstanten Verhältniss mit dem numerischen Werte* k^2, *also unabhängig von der Lage des Punktes* M *auf der gegebenen Kurve (c).*

III. Aus (6) und (7) folgt:

$$\operatorname{tg}(\Gamma_1, \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\Gamma_1, c) = \operatorname{tg}(\Gamma_2, \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\Gamma_2, c) \tag{8}$$

also: *das Produkt zwischen den Tangenten der Winkel welche von der Tangente der Kurve* Γ_1 *und den Tangenten der Kurven* γ *und c bestimmt ist, ist gleich mit dem Produkt der Tangente der Winkel welche von der Tangente der Kurve* Γ_2 *mit den Tangenten der Kurve* γ *und* c, *für dieselben Werte des Parameters* t *bestimmt sind.*

IV. Sind nun $\bar{R}_{10}$ un $\bar{R}_{20}$ die Ortsvektoren des Krümmungsmittelpunktes der Kurven Γ_1 beziehungsweise Γ_2 bezüglich derselben Werte des Parameters t, dann ist:

$$\bar{R}_{10} = \bar{R}_1 + \varrho_1 \bar{\nu}_1; \quad \bar{R}_{20} = \bar{R}_2 + \varrho_2 \bar{\nu}_2$$

wo $\bar{\nu}_1$, $\bar{\nu}_2$ die Einheitsvektoren der Normalen der Kurven Γ_1 beziehungsweise Γ_2 und ϱ_1, ϱ_2 die entsprechenden Krümmungsradien sind.

Die Verbindung mit (3) und (4) liefert:

$$\bar{R}_{10} = (n+1)\bar{r} - n\bar{R}_0 + \varrho_1 \bar{\nu}_1 = \bar{r} - n\varrho\bar{\nu} + \varrho_1 \bar{\nu}_1$$

$$\bar{R}_{20} = (n+1)\bar{R}_0 - n\bar{r} + \varrho_2 \bar{\nu}_2 = \bar{r} + (n+1)\varrho\bar{\nu} + \varrho_2 \bar{\nu}_2$$

also:

$$\bar{R}_{10} + \bar{R}_{20} = 2\bar{r} + \varrho\bar{\nu} + \varrho_1 \bar{\nu}_1 + \varrho_2 \bar{\nu}_2 \tag{9}$$

V. Wenn t_0 und t_1 zwei verschiedene Werte des Parameters t sind, welche für die Kurve (c) den Werten $x = a$ und $x = b$ entsrpechen, bekommen wir für die Fläche welche zwischen der Kurve (c), der Ordinaten $x = a$, $x = b$ und der ox Axe gelegen ist, die Formel:

$$\int_a^b y \cdot dx = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} x_t' \cdot y \cdot dt$$

gleichfalls für die Kurve (γ) bekommen wir:

$$\int_{t_0}^{t_1} \eta \xi' \, dt$$

und für die Kurven Γ_1, Γ_2

$$\int_{t_0}^{t_1} Y_1 \cdot X_1' \, dt = \int_{t_0}^{t_1} [(n+1)y - n\eta][(n+1)x' - n\xi'] \, dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y_2 X_2' \, dt = \int_{t_0}^{t_1} [(n+1)\eta - ny][(n+1)\xi' - nx'] \, dt$$

Also für die Differenz der Flächen erhalten wir :

$$\int_{t_0}^{t_1} (X_1' Y_1 - Y_2 X_2') \, dt = \frac{k+1}{k-1} \int_{t_0}^{t_1} (yx' - \eta \xi') \, dt \tag{10}$$

folglich ist *die Fläche zwischen der Kurven* Γ_1 *und* Γ_2 $\frac{k+1}{k-1}$ *mal grösser als die Fläche zwischen den Kurven* γ *und* (c).

Katheder der darstellende Geometrie
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bukarest

LITERATUR

1. *Gino Loria*, Curve pianne.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

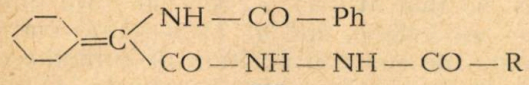
FIZICĂ

C.Z. : 535.3 : 535 : 33.547 : 541.1

A STUDY OF THE INFRARED ABSORPTION SPECTRA OF SOME CYCLOHEXILIDEN-HYDRAZIDES *

D. BÂRCĂ-GĂLĂȚEANU, CĂTĂLINA DEMETRESCU, D. IORDACHE, PARASCHIVA VOLATIE, C. GHIZDEANU

In this work are studied the absorption spectra of the spectral region between 400 cm^{-1} and 5 000 cm^{-1} of the following eight new cyclohexyliden — hydrazides with the general formula :



1) I, R = — N
2) I, R = — $C(OH)Ph_2$
3) I, R = — CH_2CN
4) I, R = — $CH(OH)Ph$
5) I, R = — $CHPh_2$
6) I, R = — CH_2Ph
7) I, R = — Ph
8) I, R = — $C_6H_4 — SO_2 — Ph$

The aim of the study of these spectra ist that, by the identification of the fundamental and combination bands of the cyclohexane nucleus in the case of some derivatives with a molecule including a great number of atoms, to establish to which extent the remainder of the molecule affects the spectral position and intensity of these bands. It is also attempted to dray conclusions about the molecular structure of these compounds by means of the whole absorption spectrum.

The absorption spectra of these compounds, the synthesis of which has been described in a former article [1], have been obtained with a UR 10 spectrophotometer. The solid state of these substances has determined their spectral study in a dispersed state in potassiunm bromide disks.

* Presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest, 27—29 May 1966.

First we refer to the bands assigned to the cyclohexanic nucleus of these compounds. From the study of the thermodynamic properties [2] the conclusion has been drawn that for the cyclohexane molecule the predominant stable configuration is the chair one. This symmetric configuration is proved by the electronic difraction method [3]. The boat configuration is also possible, but beeing less stable, the percent of this state is much smaller. Considering the cyclohexane molecule as symmetric top molecule, it belongs to the point group D_{3d}. On the basis of this model it has been possible to calculate the frequencies of the 32 normal vibrations of this molecule [4]). For liquid cyclohexane or the vapour state of the same substance only the vibrations of species A_{2u} and E_u are infrared active [4]. In crystaline state have also been identified [5] vibrations of the A_{1u} and A_{2u} Raman and infrared inactive.

Taking into account these former results [4, 5] as well as the absorption spectrum of liquid cyclohexane obtained by us with the same spectral device as also the spectra of the compounds considered in this article, the following bands of the cyclohexanic nucleus in the spectra of these compounds have been identified.

As it may be seen in fig. 1, in which the spectra of four of the eight compounds are represented, the most strong bands are those assigned to the CH_2 group vibrations. So that at 2 855—2 865 cm^{-1} we find the symmetric stretching band of methylene, and at 2 920—2 945 cm^{-1} the antisymmetric stretching band. The spectral position of both these bands approaches the position of the bands found by Takahashi [4] for liquid and vapour state of cyclohexane, and at the same time those found by Daws [5] for the crystalline cyclohexane. Considering that the vibrations of both E_u and A_{2u} species are infrared active we assume these bands to be the result of the superposition of ν_{18} and ν_{17} (A_{2u}) over ν_{26} and ν_{25} (E_u) vibrations respectively. As it may be seen in table 1, these bands are very close to the corresponding ones of the cyclohexane.

We assign the strong band from 1455—1465 cm^{-1} to the CH_2 deformation vibration. For compounds including the $C \equiv N$ and OH groups this band is shifted towards higher frequences with respect to the corresponding cyclohexane one, the shift beeing due to the influence of the mentioned groups. Alike the stretching CH_2 bands this band results from the superposition of the band corresponding to vibration ν_{14} of species A_{2u}, over that corresponding to vibration ν_{27} of species E_u. We could also assing to the fundamental vibrations of the CH_2 group the following three bands: 1355—1365 cm^{-1} band assigned to the wagging vibration ν_{28} of species E_u; 1260 cm^{-1} band assigned to the twisting vibration ν_{29} of species E_u, and 910—920 cm^{-1} band assigned to the rocking vibration ν_{15} of species A_{2u}. These three bands as well as the CH_2 deformation band have been also identified by Daws [5] in the spectrum of solid cyclohexane.

In the spectra of the compounds we have studied it was also found present bands which correspond to the skeleton vibrations of the cyclohexanic ring. For instance the band in the neighbourhood of 860 cm^{-1}

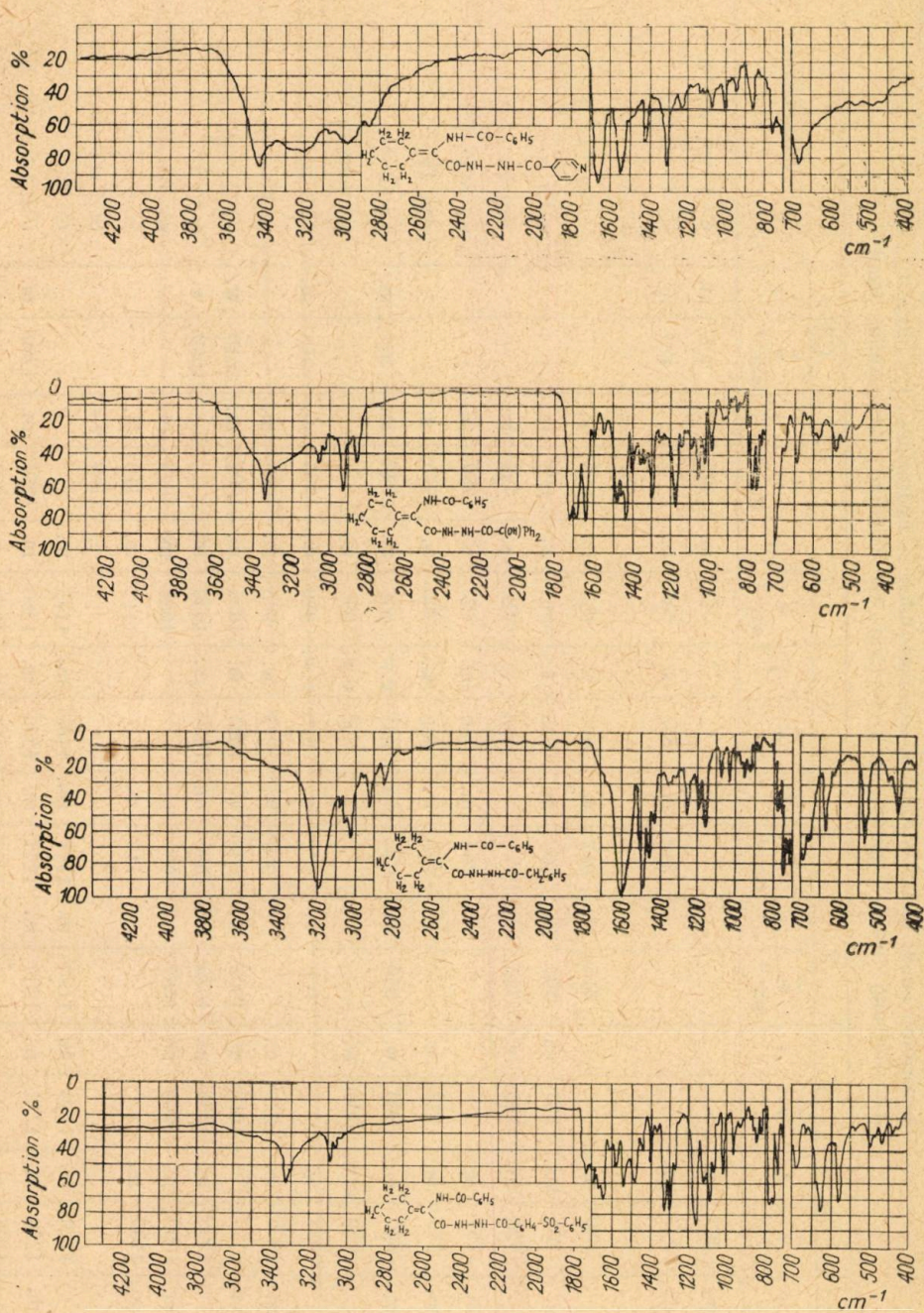

Absorption %
0
20
40
60
80
100
4200 4000 3800 3600 3400 3200 3000 2800 2600 2400 2200 2000 1800 1600 1400 1200 1000 800 700 600 500 400
cm⁻¹

Fig. 1

Table 1

Absorption bands in the spectra of cyclohexyliden — hydrazides: i = intensity; st = stretching; wag = wagging; rock = rocking; tw = twisting; Am = Amide band

1		2		3		4		5		6		7		8		C_6H_{12}		Assignment
$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	$\tilde{\nu}$ cm^{-1}	i	
405	m.	405	m.									415	m.	405	m.	405	m.	C—C st; ν_{32} Ph
540	m.	540	m.					540	m.	535	s.	530	m.			425	m.	C—C—C def.
														580	s.			C—S.
		630	w.			615	w.	617	w.	615	w.	625	m.	625	s.			Am VI; SO_2 comb.
690	s.	700	v.s.	695	m.	700	m.	700	m.	695	s.	695	s.	692	m.			ν_4 Ph
		720	m.	720	m.	730	m.			720	s.	710	s.	735	m.			Am V
755	m.	750	m.					750	m.	760	m.	760	m.	760	s.			ν_{11} sym. Ph
780	m.	775	m.	777	m.			780	w.	785	w.	780	s.	770	s.			Am IV
860	m.	860	w.	860	w.	850	w.	840	v.w.	845	v.w.	865	m.	845	m.	865	m.	C—C st.
		885	v.w.	880	w.					895	v.w.	890	m.					ν_{11} assym. Ph.
		915	w.			920	w.	920	w.	910	v.w.	920	m.	920	m.	910	m.	CH_2 rock
980	m.	995	m.	975	m.			990	w.	975	w.	985	m.	960	m.			ν_2 Ph.
1010	m.			1010	m.	1005	w.	1005	w.	1005	w.	1025	m.	1020	m.	1018	w.	$\nu_{23} + \nu_{32}$
		1035	m.	1030	m.	1030	m.	1030	m.	1039	m.	1040	m.			1040	w.	$\nu_5 + \nu_{39}$
1065	m.	1060	m.	1080	m.	1065	m.	1080	m.			1080	m.	1075	m.			ν_{14} Ph.
1130	m.	1135	m.					1110	m.			1115	m.	1110	m.			N—N
														1160	v.s.			SO_2 st. sym
		1170	m.	1180	m.	1190	m.	1195	m.	1160	m.	1175	m.					C—O
1230	m.	1250	m.	1270	m.	1280	m.	1250	m.	1250	m.	1260	m.	1250	m.	1260	m.	CH_2 tw.; Am III
1310	s.	1305	s.					1300	m.	1300	m.	1300	m.	1300	s.			

														1330	s.			SO_2 st. assym.
1335	m.	1340	m.					1340	m.	1340	m.	1330	m.					
		1360	m.	1360	m.			1355	w.	1355	m.	1365	m.	1365	m.	1350	w.	CH_2 wag.
1420	s.	1405	m.	1410	m.	1400	m.	1400	m.			1410	m.	1405	m.			ν_{13} sym. Ph.
1452	m.	1450	s.	1465	m.	1455	m.	1452	m.	1460	m.	1460	s.	1455	m.	1456	v.s.	CH_2 def.
1500	s.	1490	s.	1490	m.	1495	m.	1500	m.	1492	v.s.	1500	m.	1490	m.			ν_{13} assym. Ph
1550	s.	1555	m.	1540	s.	1520	m.	1540	m.			1530	m.	1535	m.			Am II
						1585	m.					1580	s.	1585	m.			Am II
1610	m.	1600	m.	1590	s.	1610	m.	1610	v.s.	1595	v.s.	1610	v.s.	1605	m.			$\nu_{14} + \nu_{18}$ Ph.
1660	v.s.	1640	s.	1650	v.s.			1660	m.			1660	v.s.	1650	s.			
1680	v.s.	1700	s.	1690	v.s.	1670	s.	1678	m.	1670	m.			1670	s.			C = O st.
								1730	m.			1770	s.	1720	m.			
				2265	w.													C ≡ N st.
																2665	m.	2ν CH_2 wag.
																2800	m.	2ν CH_2 def.
2855	m.	2855	m.	2855	m.	2855	m.	2850	m.	2850	m.	2865	m.			2850	v.s.	CH_2 st. sym.
		2930	s.	2935	s.	2935	m.	2920	m.	2920	m.	2945	s.			2916	v.s.	CH_2 st. assym.
																2933	v.s.	
2980	s.	2980	m.															
3040	s.	3030	m.			3030	m.	3025	m.	3030	s.			3030	m.			$\nu_{13} + \nu_{18}$ Ph.
3065	s.	3060	m.			3060	m.	3060	m.	3060	m.	3070	m.	3070	m.			$\nu_2 + \nu_{16} + \nu_{18}$ Ph.
						3080	m.	3080	m.	3085	m.			3095	m.			ν_{12} Ph.
3200	s.			3210	s.			3215	s.	3200	v.s.	3340	v.s.	3320	m.			N—H st.
		3355	s.			3300	m.											OH st ; NH st.

may be assigned to the ν_{31} stretching vibration C —C of species E_u ; the band situated at about 535 cm^{-1} that we have found at five out of eight compounds may be assigned to the ν_{16} deformation vibration C — C — C of species A_{2u}.

Using the values of the calculated fundamental frequencies [3,4], some of the bands we have found may be considered as combination bands. For instance the 1030—1040 cm^{-1} band is considered as a sum band $\nu_5 + \nu_{32}$, and band 1010—1020 cm^{-1}, sum band $\nu_{23} + \nu_{32}$.

In all eight compounds appear the phenyl characteristic bands. Thus appear as strong bands the corresponding bands of the fundamental infrared active vibrations of benzene : ν_4 Ph band at 690—700 cm^{-1}, out-of-plane CH band ; ν_{14} in-plane deformation band splitted into the two components, the assymmetric one at 1065—1080 cm^{-1} and the symmetric at 1010—1025 cm^{-1}, superposed upon the $\nu_{23} + \nu_{32}$ combination band of the cyclohexanic ring ; the double skeleton band ν_{13} the symmetric one at 1490—1500 cm^{-1} and the assymmetric one at 1405—1420 cm^{-1} ; the ν_{12} stretching CH band at 3080—3095 cm^{-1}. But it also appears bands of somme inactive vibrations of the nonsubstituted benzene, such as the out-of-plane CH deformation band ν_{11} also splitted the symmetric one at about 750—760 cm^{-1} and the assymmetric one at about 880—890 cm^{-1}. At 980—990 cm^{-1} the breathing ν_2 Ph band appears. It must be noted that, due to the substitution the degeneration of some vibration such as ν_{11}, ν_{13}, ν_{14} is eliminated. Combination bands of the phenyl nucleus have also been identified among which are the following ones : at 1595—1610 cm^{-1} the $\nu_{14} + \nu_{18}$, at 3030—3040 cm^{-1} band $\nu_{13} + \nu_{16}$ and at 3060—3065 cm^{-1} band $\nu_2 + \nu_{16} + \nu_{18}$.

As in the case of other hydrazids [6,7] in the absorption spectra of these compounds are also present the characteristic bands of the — CONHNHCO — group. Among the amide bands the strongest is the Amide I band, corresponding to the C = O stretching vibration, wich appears at 1670—1720 cm^{-1} doubled in the present case due to the coupling of the two C= O groups [7]. The band at 1540—1555 cm^{-1} is the Amide II band, corresponding to the in-plane NH deformation vibration. Amide III band, C—N stretching band, appears at 1270—1280 cm^{-1} ; Amide IV band appears at 785—790 cm^{-1}. Amide V band, out-of-plane NH deformation band, is considered to be the 720—730 cm^{-1} band, and to the amide VI band is assigned the 615—620 cm^{-1} band. The NH stretching band appears as a strong band at 3200—3255 cm^{-1}.

We shall refer further on at the bands corresponding to other groups. The band at 2265 cm^{-1} of the absorption spectrum of compound (3), band characteristic of the C ≡ N stretching vibration proves the existence of this radical in the molecule of this compound. In the spectra of the other derivatives such a band does not appears. The compounds (2) and (4) contain in their molecule the OH radical. The intense band at 3355 cm^{-1} in the case of compound (2) and that at 3300 cm^{-1} in the case of compound (4) is assigned to the OH link. As a matter of fact this band is superposed for these two hydrazids over the NH stretching band.

As it may be seen in fig. 1, in the spectrum of compound (8) appear the characteristic bands of the sulphone group. So we assign the two strong bands at 1160 cm^{-1} and 1330 cm^{-1}, the first one to the SO_2 symmetric stretching vibration and the second one to the assymetric stretching vibration. At 530 cm^{-1} appears the deformation band of this group. In the spectrum of this compound appears at 625 cm^{-1} a very strong band, absent or very weak for the other compounds which include the SO_2 group. In accordance with what has been shown in a former paper [8], this is a combination band of group SO_2, band superposed in the case of compound (8) over Amide VI band.

From what has been discussed above, we find that by the assignement of the main bands of the absorption spectrum of the eight hydrazids, their molecular structure is defined. From this study the conclusion may also be drawn that in the case of compounds with a great number of atmos in the molecule many of the cyclohexanic nucleus bands remain spectrally unshifted such as generally are the CH_2 vibrations bands. A shifting towards higher frequencies is produced by the presence of $C \equiv N$ and OH radicals. As for the intensity the fundamental bands of methylene are as strong in these compounds as in cyclohexane. Weaker in comparison with those of cyclohexane are the skeleton bands of the hexanic nucleus, as well as the combination bands.

II. Physics Chair
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

REFERENCES

1. *Vanghelovici M., Demetrescu Cătălina*, Stud. Cercet. Chim. Acad. R.S.R. *8*, 79 (1961).
2. *Beckett, C. W., Pitzer, K. S., Spitzer, R.*, J. Chem. Soc. 69, 2488 (1947).
3. *Rasmussen, R. S.*, J. Chem. Phys, *11*, 249 (1943).
4. *Takahashi, H., Shimanouchi T., Fukushima K., Miyazawa T.*, J. Mol. Spectr., *13*, 43 (1964).
5. *Dows, D. A.*, J. Mol. Spectr., *16*, 302 (1965).
6. *Bârcă-Gălățeanu, D., Demetrescu Cătălina*, Rev. Roum. Chim. 9, 203 (1964).
7. *Bârcă-Gălățeanu, D., Nițescu, N., Demetrescu Cătălina*, Rev. Roum. Phys, *10*, 537 (1965).
8. *Bârcă-Gălățeanu, D., Chiriță, C., Iordache, D., Volatie Paraschiva*, Rev. Roum. Phys, *12*, 53 (1967).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z.: 537.212 : 535.3

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CÎMPURILOR STAȚIONARE ÎN MEDII IZOTROPE ȘI ETEROGENE *

GEORGE C. MOISIL

În numeroase probleme fizice se poate defini un cîmp de vectori $\bar{F}$, care derivă dintr-un potențial scalar $\varphi(x, y, z)$:

$$\bar{F} = -\nabla \varphi \tag{1}$$

Caracterizînd mediul, considerat izotrop, printr-o mărime de material scalară $\varkappa(x, y, z)$, se poate defini o densitate de flux :

$$\bar{J} = \varkappa \bar{F} = -\varkappa \nabla \varphi \tag{2}$$

Densitatea de flux este legată de sursele de densitate volumică $\varrho(x, y, z)$, care îl produc, prin relația :

$$\nabla \bar{J} = \varrho(x, y, z) \tag{3}$$

Din (2) și (3) urmează că potențialul scalar satisface ecuația cu derivate parțiale ·

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{\varkappa} \nabla \varkappa \nabla \varphi = -\frac{\varrho}{\varkappa} \tag{4}$$

Această ecuație a fost stabilită de către Kirchhoff [1], în cazul particular al conducției curentului electric staționar în medii conductoare neomogene. Această ecuație descrie însă o mare varietate de fenomene fizice, întrucît ecuația (2) din care derivă se întîlnește în numeroase probleme. Astfel în hidrodinamică, punînd $\varkappa = k$, permeabilitatea mediilor poroase și $\bar{J} = \bar{v}$ viteza de filtrare, se obține legea lui Darcy :

$$\bar{v} = k \nabla \varphi \tag{5}$$

Alte exemple sînt date de legile bine cunoscute ale lui Fourier și Fick :

$$\bar{J}_a = -\varkappa \nabla T \tag{6}$$

$$\bar{J}_m = -D \nabla c \tag{7}$$

* Manuscris predat la redacție 23 noiembrie 1966.

sau de legile de material din electricitate și magnetism :

$$\bar{D} = -\varepsilon \nabla V \tag{8}$$

$$\bar{B} = -\mu \nabla \psi \tag{9}$$

$$\bar{J} = -\sigma \nabla V \tag{10}$$

$$\bar{J}_m = -\gamma \nabla \psi \tag{11}$$

în care V este potențialul electrostatic, iar ψ potențialul magnetostatic. Relația (11) este legea viscozității magnetice în sensul lui Arcadiev.

Ecuația (4) poate fi aplicată și în cazul mediilor eterogene, cu condiția de a exprima în mod convenabil mărimea $\varkappa\,(x, y, z)$, astfel ca diferitele discontinuități să apară explicit. Acest lucru este posibil, prin folosirea funcției generalizate a lui Heaviside :

$$E(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

Într-adevăr, fie un domeniu infinit, separat de o suprafață Liapunov Σ, în două subdomenii (1) și (2), în care $\varkappa$ are în fiecare din ele valoarea constantă $\varkappa_1$, respectiv $\varkappa_2$. Fie :

$$F(\bar{r}) = 0 \tag{13}$$

ecuația suprafeței Σ. Punînd :

$$E(F) = \begin{cases} 1 \text{ în mediul (1)} \\ 0 \text{ în mediul (2)} \end{cases} \tag{14}$$

putem scrie pentru întregul domeniu :

$$\varkappa = \varkappa_2 + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, E(F) \tag{15}$$

Σ fiind o suprafață de discontinuitate pentru $\varkappa$, avem $\nabla \varkappa = \dfrac{\partial \varkappa}{\partial n} \bar{1}_n$, în care $\bar{1}_n$ este versorul normalei la Σ. Ținînd seama și de faptul că în conformitate cu (2), $\bar{J} = -\varkappa \nabla \varphi$ se obține :

$$\frac{1}{\varkappa} \nabla \varkappa \nabla \varphi = -\frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \varkappa}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial n} \bar{J} \cdot \bar{1}_n = -\frac{1}{\varkappa^2} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{\partial E(F)}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial n} \bar{J} \cdot \bar{1}_n$$

Deoarece derivata funcției generalizate $E(F)$ este însăși funcția generalizată $\delta(F)$ rezultă :

$$\frac{1}{\varkappa} \nabla \varkappa \nabla \varphi = -\frac{1}{\varkappa^2} (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, \delta(F) \frac{\partial F}{\partial n} \bar{J} \cdot 1_n \tag{16}$$

Punînd

$$\varrho_s = -\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa} \bar{J} \cdot \bar{1}_n \frac{\partial F}{\partial n} \delta(F) \tag{17}$$

rezultă

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\varkappa} [\varrho + \varrho_s] \tag{18}$$

Privind densitatea ϱ_s ca densitatea „volumică" a unei repartiții de surse superficiale pe suprafața Σ, ecuația lui Kirchhoff se reduce în acest caz la o ecuație tip Poisson.

Exemple.

a) Ca o problemă tridimensională simplă vom considera stabilirea teoremei imaginilor. Fie $z = 0$, planul care separă un domeniu infinit în două subdomenii în care $\varkappa = \varkappa_1$ pentru $z > 0$, (subdomeniul I), respectiv $\varkappa = \varkappa_2$ pentru $z < 0$ (subdomeniul II). Vom putea scrie :

$$\varkappa(z) = \varkappa_2 + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, E(z) \tag{19}$$

Vom admite că în raport cu un sistem de coordonate cilindrice într-un punct $r = 0$, $z = h$ din subdomeniul I, se află o sursă cuasipunctiformă de intensitate Q, care creează cîmpul $-\nabla\varphi$.

Densitatea volumică corespunzătoare acestei surse va fi :

$$\varrho = Q \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - h) \tag{20}$$

Ecuația (4) devine :

$$\nabla^2 \varphi + \frac{1}{\varkappa} \nabla \varkappa \nabla \varphi = -\frac{Q}{\varkappa} \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - h) \tag{21}$$

Ținînd seama că

$$\frac{\partial}{\partial z} E(z) = \delta(z)$$

și punînd :

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \Psi(r)$$

se obține ecuația

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{Q}{\varkappa} \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - h) - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa} \Psi(r)\, \delta(z) \tag{22}$$

Urmează că potențialul φ_1, diferit de zero în mediul (I) și nul peste tot în mediul (II) și potențialul φ_2, diferit de zero în mediul (II) și nul peste tot în mediul (I) satisfac ecuațiile :

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{Q}{\varkappa_1} \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z - h) - \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1} \Psi_1(r)\, \delta(z) \tag{23}$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_2} \Psi_2(r)\, \delta(z) \tag{24}$$

în care

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \Psi_1(r) \quad , \quad \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \Psi_2(r)$$

Integrînd ecuațiile de mai sus și aplicînd condițiile la limită pe planul $z = 0$ (vezi anexa) rezultă :

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varkappa_1 \sqrt{(h-z)^2 + r^2}} + \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \frac{Q}{4\pi\varkappa_1 \sqrt{(h+z)^2 + r^2}} \tag{25}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \frac{Q}{4\pi\varkappa_2 \sqrt{(h-z)^2 + r^2}} \tag{26}$$

Este important de subliniat că „imaginile" din aceste expresii rezultă direct din structura discontinuă a mărimii $\varkappa$.

b) În cazul unui mediu stratificat, ale cărui straturi omogene plane și paralele se caracterizează prin :

$$\begin{aligned} &\varkappa = \varkappa_1 \quad z_1 < z \\ &\varkappa = \varkappa_2 \quad z_2 < z < z_1 \\ &\varkappa = \varkappa_3 \quad z_3 < z < z_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\varkappa = \varkappa_n \quad z < z_n \end{aligned}$$

vom putea pune în general :

$$\varkappa(z) = \varkappa_n + \sum_{i=0}^{n-1} (\varkappa_i - \varkappa_{i+1})\, E(z - z_i) \tag{27}$$

Într-un astfel de mediu potențialul φ satisface ecuația :

$$\nabla^2\varphi = -\frac{Q}{\varkappa} \frac{\delta(r)}{2\pi r} \delta(z-h) - \frac{1}{\varkappa} \sum_{i=0}^{n-1} (\varkappa_i - \varkappa_{i+1})\, \Psi\delta(z - z_i) \tag{28}$$

În principiu rezolvarea acestei ecuații nu prezintă dificultăți deosebite.

c) Vom considera acum un mediu separat de o pînză cilindrică circulară de rază r_0 și lungime infinită, într-un domeniu interior în care $\varkappa = \varkappa_1$ și un domeniu exterior în care $\varkappa = \varkappa_2$. Admițînd un sistem de coordonate cilindrice a cărei axă z coincinde cu axa cilindrului, vom putea pune :

$$\varkappa = \varkappa_2 + (\varkappa_1 - \varkappa_2)\, E(r_0 - r) = \begin{cases} \varkappa_1 & r < r_0 \\ \varkappa_2 & r > r_0 \end{cases} \tag{29}$$

Dacă există o sursă, de exemplu punctiformă de intensitate Q, situată într-un punct în care $r > r_0$ și a cărei poziție e dată de un vector de poziție $\bar{R}_s$, potențialul φ al cîmpului creat de sursă satisface ecuația :

$$\nabla^2\varphi = -\frac{Q}{\varkappa} \delta(\bar{R} - \bar{R}_s) - \frac{1}{\varkappa} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r_0} \Psi(z) \tag{30}$$

Punînd și de data aceasta φ_1, potențialul nul peste tot afară de domeniul $r < r_0$ și φ_2 potențialul nul peste tot afară de domeniul $r > r_0$ obținem

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1}\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0}\Psi_1(z) \tag{31}$$

$$\nabla^2\varphi_2 = -\frac{Q}{\varkappa_2}\delta(\bar{R}-\bar{R}_s) - \frac{1}{\varkappa_2}(\varkappa_1 - \varkappa_2)\frac{\delta(r-r_0)}{2\pi r_0}\Psi_2(z) \tag{32}$$

Integrarea ecuațiilor de acest tip poate fi de asemeni efectuată [3].

★

Din cele de mai sus rezultă că problema repartiției potențialului unui cimp staționar într-un mediu eterogen, poate fi tratată ca o problemă într-un mediu neomogen, potențialul φ ascultînd de ecuația de tip eliptic (4), dacă mărimea de material $\varkappa(x, y, z)$ se exprimă ca o funcție discontinuă de poziție cu ajutorul funcției generalizate Heaviside $E(x, y, z)$. Prin folosirea metodei mai sus arătate, repartițiile superficiale de surse pe suprafețele de discontinuitate rezultă automat.

A n e x ă.

Pentru a integra ecuațiile (23) și (24) din text, se vor exprima în primul rînd $\delta(z)\,\delta(z-h)$, $\delta(r)$ și $\frac{1}{Q}\Psi_i(r)$, în care $i = 1, 2$, prin integrale Fourier, respectiv integrale Bessel-Fourier.

Se obține :

$$\nabla^2\varphi_1 = -\frac{Q}{4\pi^2\varkappa_1}\int_0^\infty kJ_0(kr)\,dk\int_{-\infty}^{\infty} e^{iq(z-h)}\,dq -$$

$$-\frac{Q(\varkappa_1-\varkappa_2)}{2\pi\varkappa_1}\int_0^\infty kJ_0(kr)\,dk\int_0^\infty \varrho\psi_1(\varrho)\,J_0(k\varrho)\,d\varrho\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqz}\,dq$$

$$\nabla^2\varphi_2 = -\frac{Q(\varkappa_1-\varkappa_2)}{2\pi\varkappa_2}\int_0^\infty kJ_0(kr)\,dk\int_0^\infty \varrho\psi_2(\varrho)\,J_0(k\varrho)\,d\varrho\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqz}\,dq$$

Aplicînd la stînga în ambele ecuații, atît în membrul stîng cît și în membrul drept, operatorul ∇^{-2} rezultă :

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi^2\varkappa_1}\int_0^\infty kJ_0(kr)\,dk\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iq(z-h)}}{k^2+q^2}\,dq +$$

$$+\frac{Q(\varkappa_1-\varkappa_2)}{2\pi\varkappa_1}\int_0^\infty kJ_0(kr)\,dk\int_0^\infty \varrho\psi_1(\varrho)\,J_0(k\varrho)\,d\varrho\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iqz}}{k^2+q^2}\,dq$$

$$\varphi_2 = \frac{Q(\varkappa_1 - \varkappa_2)}{2\pi\varkappa_2} \int_0^\infty kJ_0(kr)\,dk \int_0^\infty \varrho\psi_2(\varrho)\,J_0(k\varrho)\,d\varrho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqz}}{k^2+q^2}\,dq$$

Cu ajutorul teoremei rezidurilor se găsește :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqz}}{k^2+q^2}\,dq = \pi\,\frac{e^{-k\,|\,z\,|}}{k}$$

Urmează că :

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varkappa_1} \int_0^\infty [e^{-k\,|\,h-z\,|} + F_1(k)\,e^{-k\,|\,z\,|}]\,J_0(kr)\,dk$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varkappa_2} \int_0^\infty F_2(k)\,e^{-k\,|\,-z\,|}\,J_0(kr)\,dk$$

în care

$$F_i(k) = 2\pi\,(\varkappa_1 - \varkappa_2) \int_0^\infty \varrho\psi_i(\varrho)\,J_0(k\varrho)\,d\varrho \quad (i = 1, 2)$$

Punînd pentru potențial și derivata sa normală condițiile de continuitate :

$$\varphi_1\Big|_{z=0} = \varphi_2\Big|_{z=0}$$

$$\varkappa_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \varkappa_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

rezultă un sistem algebric de două ecuații în $F_1(k)$ și $F_2(k)$ prin a cărui rezolvare găsim :

$$F_1 = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\,e^{-kh}$$

$$F_2 = \frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\,e^{-kh}$$

Introducînd aceste expresii în relațiile care dau potențialele φ_1 și φ_2 se capătă :

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varkappa_1} \int_0^\infty [e^{-k\,|\,h-z\,|} + \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2}\,e^{-k\,|\,h+z\,|}]\,J_0(kr)\,dk$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varkappa_2}\,\frac{2\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \int_0^\infty e^{-k\,|\,h-z\,|}\,J_0(kr)\,dk$$

Din aceste expresii rezultă relațiile (25) și (26) din text, dacă ținem seama că :

$$\int_0^\infty e^{-k\alpha} J_0(k\beta)\, dk = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Catedra de fizică I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE:

1. *Kirchhoff*, G.R. Monatsber. der A. K. Wiss. Berlin (1880)
2. *Ivanenko, D* și *Socolov, A.* Teoria clasică a cîmpului Ed. Tehnică București 1955.
3. *Moisil Gh.* Buletinul Institutului politehnic București Tom. XXIV Nr. 1 — 1962, p. 23.
4. *Sabba Ștefănescu, S.* și *Schlumberger, C.* și *M.* Journ. Phys. et radium, VII, *1*, 4 p. 132—140 (1930).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREŞTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z. : 535.33.071 : 539.153 : 539.162

CHAMBRE AUX COMPTEURS G.M. POUR LA SPECTROSCOPIE À GRAND POUVOIR DE RÉSOLUTION *)

I. RINGHIOPOL, I. VÎŢĂ
Institut de Phisique Atomique
Bucarest

H. FUIA
Institut Polytechnique
„Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

Les méthodes de la spectroscopie nucléaire ont un rôle crossant dans l'élucidation de beaucoup de problèmes concernant la structure du noyau atomique. Parmi les nombreuses méthodes de la spectroscopie nucléaires c'est l'emploi des spectromètres β à grand pouvoir de résolution pour l'étude de l'énergie des électrons obtenus dans les divers processus nucléaires. Aujourd'hui dans le domaine des spectromètres on dépose des efforts soutenus pour obtenir des résolutions plus élevées, mais ce qui rend cette chose difficile c'est le fait que beaucoup de spectromètres β à grand pouvoir de résolution, ont une basse transmission. C'est pour cela qu'on obtient une vitesse de numération assez petite au système de détecteurs et une mauvaise statistique dans les conditions d'un fond élevé.

Les choses montrées plus haut ont conduit à l'idée de réaliser un système de compteur qui peut être employé dans les spectromètres β à grand pouvoir de résolution et basse transmission qui doivent accomplir les conditions suivantes : d'avoir un fond le plus diminué possible et la plus grande efficacité de détection pour les particules qui forment le fasicule étudié. Pour le spectromètre β à grand pouvoir de résolution qu'on construit à l'Institutut de Physique Atomique a été réalisée une chambre avec deux compteurs G.M. dont la construction est donnée dans la figure nr. 1. La chambre c'est un corps cylindrique dont le passage étanché permet une rotation de 360° autour de l'axe de celui-ci. Cette rotation est nécessaire parce que le spectromètre β qui emploie la chambre tourne l'image de la source à un certain angle envers la verticale. Sur la partie inférieure de la chambre, sur une plaque démontable il y a montés les compteurs proprement-dits. Cette construction permet une intervation rapide et un montage commode des compteurs.

Les compteurs travaillent avec le fil central à haute tension positive envers le chemise cylindrique (le cathode). Un grande difficulté ont

*) Manuscris predat la redacţie la 26 mai 1967.

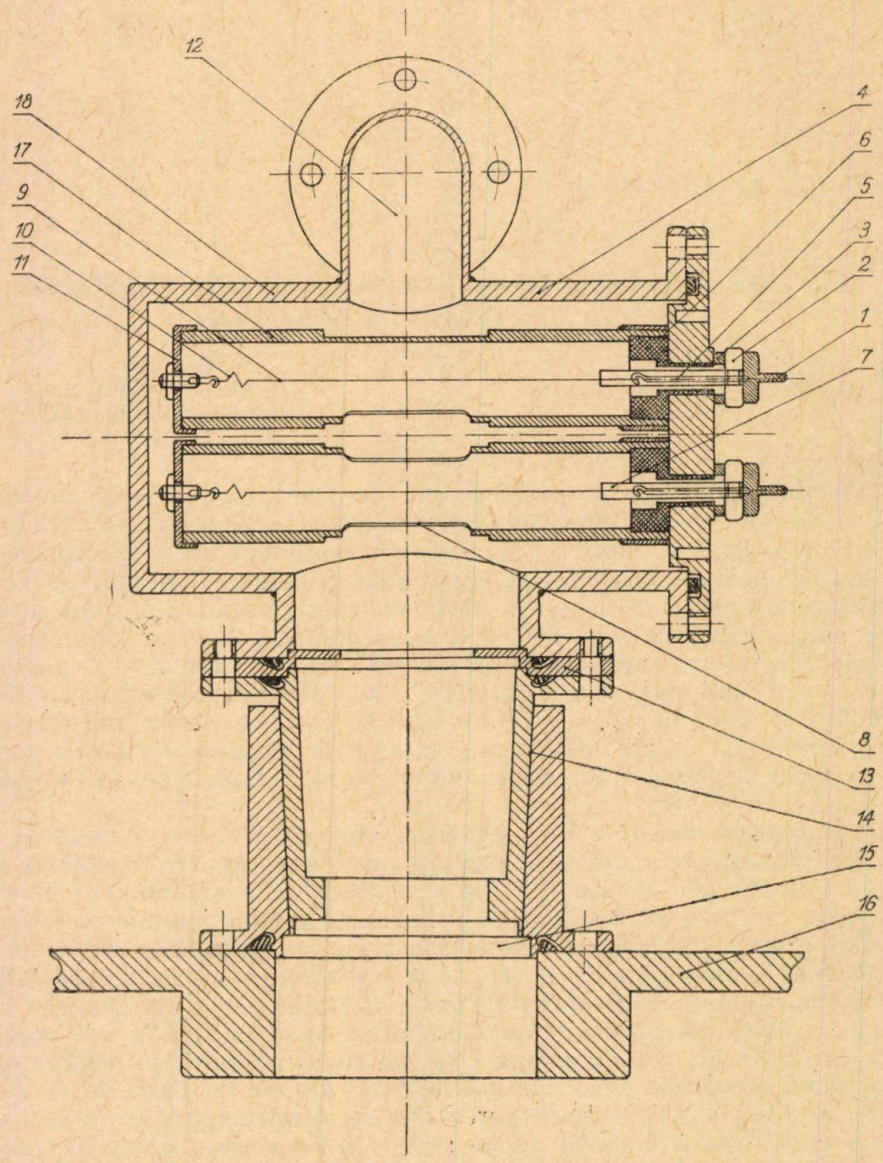


Fig. 1. L'ensemble des compteurs :

1 — La borne de haute tension ; *2* — L'isolateur procelaine ; *3* — La rondelle de liaison ; *4* — La couverche de la boite des compteurs ; *5* — Le crochet de l'extension de l'anode de wolfram ; *6* — L'isolateur de trolite ; *7* — L'isolateur de verre ; *8* — La fenêtre des compteurs ; *9* — L'anode ; *10* — Le ressort d'extension de l'anode ; *11* — Les pièces d'extension de l'anode ; *12* — Le tuyau pour l'introduction du mélange ; *13* — La bride avec la fenêtre ; *14* — Le passage étanche métallique ; *15* — La bride à la fente ; *16* — La bride du spectromètre ; *17* — Le corps des compteurs ; *18* — Le corps de la chambre des compteurs.

présenté les bornes de passage de haute tension parce qu'elles devaient accomplir les conditions suivantes : d'assurer une très bonne étanch éité à la grande différence de pression qu'il y a entre la pression entérieure et celle qu'il y a dans la chambre de compteurs, d'avoir une surface propre des bornes pour éviter les décharges possibles qui donnent des impulsions parasites, et d'avoir une très bonne isolation envers la masse. Pour réaliser ces bornes on a employé l'experience du laboratoire de vide de notre Institut de Physique Atomique qui a construit des passages céramiques avec une soudure de porcelaine d'aluminium et le noyau de titane. Les bornes ont été réalisées par la soudure de l'aluminium à une haute température et pression. Sur la borne centrale de titane est fixé par le vissage un crochet au bout duquel il y a pris un fil de wolfram avec l'épaisseur 0,1 mm qui est l'anode du compteur. Dans la partie supérieure le fil est soutenu par un système qui permet son extension contrôlable. Une petite portion de verre réalise l'isolation de l'anode du cathode. Pour assurer une bomme fonction, la zone de travail qui s'éntend à une longueur d'environ 65 mm est delimitée par des tubes de verre qui entourent autant le crochet vissé dans la borne de titane que le région où le fil de wolfram est fixé. Ainsi sont évités les affects de décharge qui gâtent la caractéristique du compteur. Parce que les deux compteurs doivent travailler en coïcidence, (pour diminuer davantage le fond), le fascicule d'électrons étant perpendiculaire sur la génératrice du cathode, il a été nécessaire de faire une fenêtre dans la chemise extérieure de cuivre de ceux-ci. Ces fenêtres doivent être très minces pour obtenir une grande efficacité des compteurs, par une transparence très élevée et aussi pour maintenir la symétrie cylindrique dans l'intérieur du condenseur, qui constitut le compteur G. M. C'est pour cela qu'on a réalisé les fenêtres ayant les dimensions 18×36 mm^2 sur la surface desquelles on dépose une pellicule d'un matéril plastique nommé en commerce V.Y.N.S. Après la réalisation les pellicules ont été métallisées par le dépôt en vide d'un couche très fine d'aluminium. La couche métalique venant en contact avec la chemise des compteurs assure une surface équipotencielle. La grosseur des fenêtres réalisée dans cette manière est d'ordre de 50 μg/cm^2 donnant une transparence approximativement de 100% pour les électrons qui ont une énérgie de plus de 20 keV.

La fente d'entrée du fascicule dans la chambre des compteurs est paralelle à la génératrice de ceux-ci et elle a les dimensions variables en fonction de la résolution avec laquelle nous désirons travailler au spectromètre. Cette fente doit assurer une étanchéité parfaite entre la pression de 10^{-5} mm. col. Hg. pu'il y a dans la chambre du sprectromètre et la pression relativement élévée de celle qui existe dans la chambre des compteurs (approximativement 100 mm. col. Hg). C'est pour cela que cette fente a été couverte avec une pelure de mica collée avec la résine syntétique (Araldit Ciba) sur le couvercle de la bride. Cette pellicule a été aussi métallisée pour éviter le charge électrostatique. La grosseur minime de cette pellicule employée jusqu'à présent est de 1,9 mg/cmp, et il y a la possibilité de la diminuer.

Le résultats expérimentaux

Après avoir maintenu la chambre des compteurs à une pression d'approximativement 10^{-5} col. Hg. (pendant 24 heures) on a introduit le *mélange* de travail. On a essayé trois mélanges de travail :

argon 90% + cyclohexane 10%, argone 90% + alcool éthylique 10% et argon 90% + *isopentane* 10%

la pression totale pour chacum de ces mélanges étant de 90 mm. col. Hg.

Il faut préciser que l'argon n'étant pas de point de vue chimique pur pour éliminer les restes d'oxygène qu'il a, avant son introduction dans la chambre il a été passé par une trappe de limaille de cuivre réchauffée. Le mélange de travail n'a pas été introduit directement dans la chambre des compteurs mais dans un ballon de mélange où il a été tenu 24 heures pour homogéisation. Pour -lever les caractéristiques de numération, la chambre de compteurs a été irradiée par les rayonnements de Cs^{137}.

Pour étudier comment se présentent les caractéristiques de numération on a effectué chaque jours les mesures. On a observé qu'après avoir rempli la chambre des compteurs avec le mélange de travail, il y a un déplacement du palier en temps vers les tensions petites et une diminuation de celui-ci. Ainsi dans la figure nr. 2 on donne trois caractéristiques de numération quand on emploie le mélange argon + cyclohexane éléves à divers intervalles de temps ; la première caractéristique étant -levée le jour-même du remplissage des compteurs. On voit clairement le déplacement du palier vers les petites tensions de travail et une legère augmentation de la pente de celui-ci. Après 10 jours

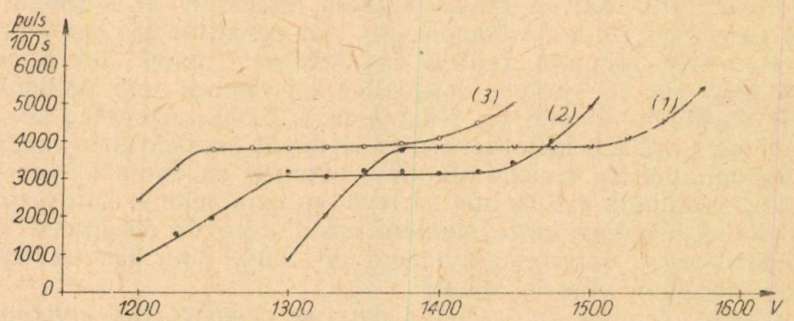


Fig. 2. La variation en temps de la caractéristique de numération des compteurs

dès le remplissage des compteurs la caractéristique de leur numération s'établit pour une période plus longue assurant des conditions très bonnes de travail. Mais, si l'on change l'ancien mélange avec un autre et on introduit immédiatement sans vider de nouveau la chambre des compteurs et on élève puis leur caractéristique de temps, la tendence dont on a parlé plus haut n'apparaît plus. On a considéré que ce phénomène est dû à l'absorption du mélange par les surfaces métalliques

parcequ'on a observé aussi une affaiblissement de la pression dans la chambre des compteurs. Mais on sait que le palier de la caractéristique de numération apparaît aux tension plus grandes, autant que la pression du mélange est plus élevée.

Des études effectués sur les trois mélanges on peut tirer les conclusions suivantes : le mélange argon + cyclohexane est plus instable

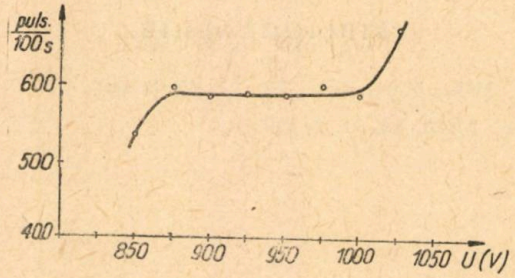


Fig. 3. La caractéristique de numération du compteur.

en temps, force que, peut-être le cyclohexane est absorbé devantage par les parties métallique de l'installation. Le mélange argon + alcool éthylique donne une pente satisfaisante de la caractéristique de numération, mais son palier est étroit (50 V). C'est parce que l'alcool éthylique est très hydroscopique, et les molécules de l'eau gâtent le palier. Il aurait été nécessaire un alcool éthylique pur et une installation de son deshydratation. Avec le mélange argon + isopentane dans les proportions et la pression totale indiquées plus haut, on a obtenu de meilleurs résultats. La caractéristique de numération obtenue a un palier de 100 V avec une pente sous 1% (fig. 3). La stabilité de la caractéristique de numération du mélange argon + isopentane est très bonne pour un intervalle de 45—60 jours.

Ce qu'on veut souligner dans ce travail c'est la construction originale de la chambre qui permet le travail avec celle-ci dans le spectromètre qui emploie une source rectangulaire dont l'image on obtient par la rotation, ainsi que l'efficacité grande des compteurs due à la transparence trés grande des fenêtres (autant aux fenêtres de l'entrée dans la chambre qu'aux fenêtre des compteurs proprement-dits). On considere une réalisation intéressante aussi la construction des compteurs avec les fenêtres longitudinale à dimensions très grandes sans gâter la symétrie de révolution du champ électrique de l'intérieur du condensateur cylindrique qui le constitue, chose permise par la métallisation des fenêtres de matériel plastique V. Y.N.S. Il faut souligner surtout que faisant la mesure du fond des compteurs et de l'ensemble mis en circuit en coïncidence, on a obtenu des résultats très bons. Ainsi le fond de chaque compteur est d'approximativement 60 puls/100 sec. tandis que le fond d'ensemble lié en coïncidence est de 3—4 puls/100 sec, chose

qui améliore beaucoup la statistique des mesures. C'est pourquoi ce dernier résultat a justifié la construction de cette chambre à deux compteurs G.M.

La chaire de physique
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest
Institut de Physique Atomique Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Kern et O. Huber*, Helv. Phys. Acta, 33, 27—52, (1960).
2. *J. Kern*, Nucl. Instr. Meth. 13, nr. 1, (1961).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

CHIMIE

C.Z.: 541.135 : 546.683 : 537.742.7 : 535.5

CONTRIBUȚII LA DEPUNEREA CATODICĂ A TALIULUI *

I. A. ATANASIU, I. C. RĂDUCANU

Obținerea taliului pe cale electrolitică prezintă în prezent un interes deosebit, datorită utilizării acestui metal în diverse domenii ale tehnicii fie în stare pură, fie aliat cu diverse alte metale.

Cercetările efectuate, pînă în prezent, pentru depunerea electrolitică din soluția apoasă au folosit fie soluții alcaline (hidroxid sau carbonat) compușii cei mai solubili în apă, fie perclorat talos a cărui solubilitate este mult mai ridicată față de a sulfatului talos (1)—(6). Soluțiile de azotat au fost puțin cercetate, iar halogenurile, a căror solubilitate este extrem de slabă nu pot fi utilizate din punct de vedere practic.

Cîteva lucrări se ocupă de depunerea taliului pe catod de mercur, sub formă de amalgam de taliu (7)—(11), folosind soluțiile indicate mai sus.

O serie de cercetători au studiat, în procesul de reducere catodică a ionului talos, rolul anionilor prezenți, al soluțiilor tampon, al unor adausuri ca fenol, crezol, peptonă, etilen-glicol etc., precum și rolul adsorbției specifice pe electrodul de platin (3), (22)—(26).

În alte lucrări s-a urmărit procesul catodic cu ajutorul izotopilor radioactivi [28].

În nota prezentă ne propunem să studiem depunerea catodică a taliului și procesul de polarizare catodică din soluții de azotat talos, sare ușor solubilă, procedeu puțin studiat pînă în prezent.

Azotatul de taliu prezintă avantajul că este aproape la fel de solubil ca percloratul, mai ușor de obținut și folosit.

Deși potențialul taliului este negativ (—0,335 V.) supratensiunea hidrogenului pe electrodul de taliu, care este apropiată de cea a hidrogenului pe plumb (12), (19) permite depunerea acestui metal la catod fără inconvenient, din soluții acide.

* Manuscris predat la redacție la 15 mai 1967.

Polarizația catodică la electroliza soluției de $TlNO_3$

Cercetările s-au efectuat asupra a trei soluții de azotat talos de concentrații diferite :

Soluția I . . . . 60 g/l ;
Soluția II . . . . 90 g/l ;
Soluția III . . . . 120 g/l,

toate avînd aceiași activitate a ionului H^+(pH=4).

Ca anolit s-a folosit o soluție de HNO_3 01N.

S-a lucrat la temperaturile de 20°C, 25°C și 30°C ; temperatura a fost menținută constantă cu o precizie $\pm$0,2°C.

Pentru trasarea curbelor de polarizare s-a utilizat o celulă de electroliză în formă de „H" ale cărui compartimente au fost separate printr-o diafragmă de porțelan poros ; s-au utilizat electrozi de platin lucios de suprafețe egale (0,8 cm^2).

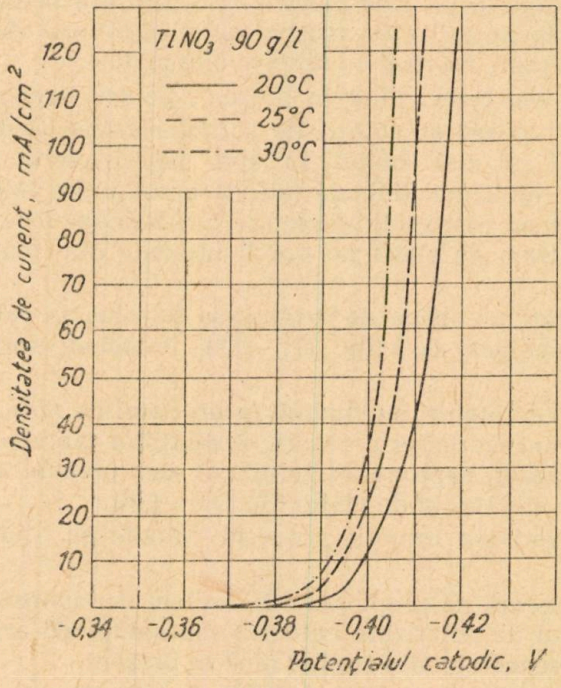


Fig. 1

Rezultatele determinărilor sînt prezentate în diagramele din figurile 1—5.

Diagramele obținute sînt în deplină concordanță cu indicațiile teoretice : polarizația catodică cea mai ridicată are loc în soluția I cea mai diluată (Fig. 1) și la temperatura cea mai joasă (20°C) ; mai departe polarizația scade pe măsură ce concentrația soluție și temperatura cresc, cum se poate urmări din diagramele prezentate în Fig. 2 și Fig. 3.

În soluția cea mai concentrată (120 g/l) și la temperatura de 30°C polarizația catodică este aproape neglijabilă ; ea atinge cam 15 mV pentru o densitate de curent de 120 mA/cm². Această valoare redusă a pola-

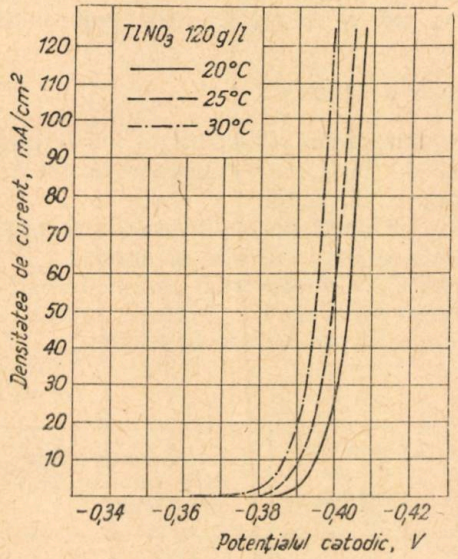


Fig. 2

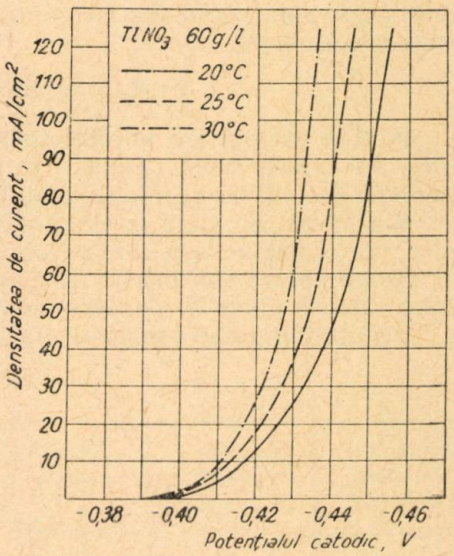


Fig. 3

rizației catodice, chiar la densități de curent mai ridicate, arată că : polarizația de transfer (electrochimică) la depunerea taliului din soluția de azotat este desigur nulă sau în orice caz neglijabilă. Polarizația de concentrație este de asemenea mică.

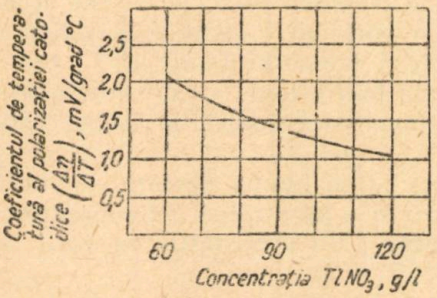


Fig. 4

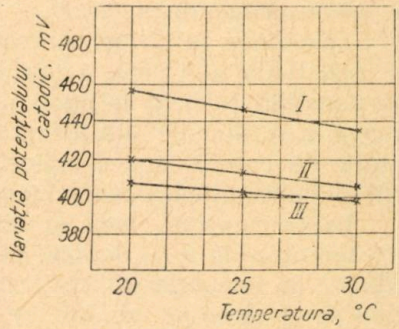


Fig. 5

Figurile 4 și 5 pun în evidență variația coeficientului de temperatură al polarizației catodice în funcție de concentrație și variația potențialului catodic în funcție de temperatură la densitate de curent constantă.

Polarizația de concentrație foarte slabă, pune în discuție prezența compușilor termostabili $H_2[Tl(NO_3)_3]$ și $H_3[Tl(NO_3)_4]$ indicați de F. Ia. Kolba și V. E. Mironov (31) ; ea arată că acești complecși ori sînt foarte disociați și atunci concentrația ionilor Tl^+ la catod este ridicată și nu influențează polarizația de concentrație, ori prezența acestor complecși poate fi contestată.

Separarea catodică a taliului

Pentru extragerea taliului foarte pur, prin electroliza azotatului talos, s-a folosit drept catolit o soluție de $TlNO_3$ de concentrație 90 g/l avînd un pH = 4, iar ca anolit o soluție de HNO_3 0,1N.

S-a folosit o celulă de electroliză prevăzută cu o diafragmă de porțelan poros pentru separarea celor două spații : catodic și anodic.

Temperatura de lucru : 25°C ± 0,5°C. Ca electrozi s-au folosit : drept catod o placă de platin lucios, drept anod un fir de platin lucios.

Rezultatele determinărilor efectuate sînt prezentate în tabela I.

Tabela I

Dens. crt. catodică, mA/cm^2	Randament de curent, %	Tens. la borne, V	Consum specific de energie, kWh/Kg.	Caracterizarea depunerii catodice de taliu
50	33,30	11,2	4,42	Depunerea fină, plastică cu aspect metalic
100	34,00	12,6	4,91	
150	34,80	13,8	5,05	

Randamentul de curent scăzut, la densitățile mari de curent folosite, se explică prin degajarea simultană a hidrogenului pe taliu cît și prin posibilitatea redizolvării taliului depus în electrolitul slab acid, înainte de a-l desprinde de pe catod.

Tensiunea la borne ridicată chiar la densități mici de curent arată că rezistența electrică, a diafragmei de porțelan folosite este ridicată. La densități mici și mijlocii de curent, și temperatura de 20°C, taliul începe a se depune sub formă de cristale foarte fine ; cu creșterea densității de curent și a temperaturii, depunerea catodică ia forma dendritică cu ramificații proeminente.

La concentrații mari și temperaturi joase (20°C) azotatul de taliu are tendința de a se depune pe electrozi și a impurifica depunerea metalică ; la temperatură ceva mai ridicată (30°C) cristalizarea sării de taliu pe electrod nu mai are loc.

Concomitent cu depunerea taliului la catod, pe anod se depune un strat dens, brun-maron închis, întocmai ca la depunerea plumbului din mediu de acid azotic. După unii cercetători (14), (33), (34) acest strat ar fi format dintr-un oxid ($Tl_2O_3.nH_2O$) rezultat prin oxidarea ionilor Tl^+ la anod, ca urmare a prezenței acidului azotic, adică întocmai ca la electroliza plumbului în mediu azotic.

De remarcat că în cazul nostru, taliul apare în spațiul anodic deși se lucrează cu diafragmă și întrebuințînd anolit HNO_3 pur ; prezența ionului taliu în spațiul anodic se poate explica, fie prin difuzie din spațiul catodic fie prin migrarea în spațiul anodic a anionilor complecși $[Tl(NO_3)_3]^{2-}$ sau $[Tl(NO_3)_4]^{3-}$ proveniți din disocierea sărurilor complexe de taliu menționate mai sus.

Concluzii

1) Studiul experimental al proceselor catodice arată că depunerea taliului are loc cu o polarizație deosebit de mică, de ordinul 10—30 mV chiar pentru densități mari de curent și folosind electrozi de platin. Acest lucru dovedește că polarizația de transfer este aproape neglijabilă, adică în etapele care compun procesul catodic nu există nici-o etapă lentă.

Polarizația de concentrație, de asemenea redusă și care arată un proces de difuzie normal este singura care intervine în modificarea potențialului catodic. În același timp se poate admite că complecșii probabili indicați de literatură ca existenți în soluțiile de azotat $H_2[Tl(NO_3)_3]$ și $H_3[Tl(NO_3)_4]$ sînt complecși bine disociați.

2) Variația coeficientului de temperatură al polarizației catodice cu concentrația este normală și urmează indicațiile teoretice.

Astfel scăderea polarizației în funcția de creșterea temperaturii este pentru 1°C și densitatea de curent de 125 mA/cm² ; 2,1 mV în soluția I, 1,4 mV în soluția II și numai 1,04 mV în soluția III.

3) Depunerile de taliu la densități mici de curent sînt fine, plastice și cu aspect metalic ; la densități de curent ridicate, depunerea este plastică, însă formată din cristale mari cu ramificații.

4) O depunere cantitativă la catod din mediu azotic nu pare posibilă din cauza depunerii concomitente, la anod, de oxizi de taliu.

5) Pentru depuneri pure de taliu este preferabil să se folosească soluții de concentrație medie (90 g/l) și temperaturi în jurul a 30°C pentru a evita cristalizarea $TlNO_3$ pe catod.

Catedra de electrochimie și chimie fizică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *W. Kangro*, Z. Ezbergbau u. Metallhuttenw. *11*, 70-2, 1958 (C.A. 52, 8795).
2. * * * C.A. 52, 19599.
3. *V. M. Iluşcenko*. C.A. 55, 21908.
4. *Iu. V. Baimakov, A. I. Jurin*. Electroliz v ghidrometallurghii, Metalurghizdat, Moscova (1963), 15 ; 563-4.
5. *S. T. Takerzhanov și colab*. Patent URSS 169.794 (1965).
6. *P. Pascal*. Nouveau traité de chimie minerale, Tome VI, Paris (1961), 901-5.
7. *Shokol*. Tsvetnye Metally *32*, 52-7, (1959).
8. * * * C.A. 54, 10591.
9. * * * C.A. 55, 24322.

10. Z. physik. chem. (Frankfurt) *28*, 158-67, (1961) (C.A. 55, 25552).
11. *M. G. Mc. Keon.* J. Electroanal. Chem. *4*, No. 2, 93-5 (1962).
12. *Ya. Kolotyrkin.* Jurnalfizicescoi himii *25*, 1355-64 (1951).
13. *L. I. Antropov.* Uspehi himii 25, 1043—56 (1965).
14. *A. Riad Tourky, E. M. Khairy.* J. chim. phys. *53*, 119-24, (1956).
15. *U. Bertocci, S. Ticozzi.* Rend. Ist. Lombardo Sci : Pt. I. Classe sci. mat. e. nat. *91*, 386-96 (1957).
16. *K. J. Vetter.* Z. Elektrochem. *64*, 805-12 (1960).
17. *G. Salie, W. Lorentz.* Z. Physik. Chem. (Frankfurt) *29*, 408-12 (1961).
18. *V. V. Demcenko.* Jurnal fizicescoi himii *36*, 1037-9 (1962).
19. *P. I. Dolin.* C.A. 62, 15759 ; Jurnal fizicescoi himii *37*, 317, (1963).
20. *R. Piontelli.* Z. Elektrochem. *55*, 128 (1951).
21. *T. Mills, G. M. Willis.* J. Electrochem. Soc. *100*, 452-8 (1952).
22. *L. I. Antropov.* Trudî Sovesciania po voprosam vliania poverhnostnoacticnîh vescestv na eletroosajdenie metallov Villnius 1957, 237-242.
23. *E. Bertorelle și colab.* Chimica e industria (Milan) *32*, 517-22 (1950) (C.A. 45, 5043 i).
24. *I. C. Popescu, A. Crăciun.* Rev. Chimie, Acad. RPR (Roumaine) 6, 199—213 (1961).
25. *V. M. Kocegarov.* Jurnal Pricladnoi himii : *38*, (3) 680-2, (1965).
26. *B. I. Bowles.* C.A. 63, 9448h, 9449a ; Ya. Kolotyrkin — C.A. 56, 12656c.
27. * * * C.A. 53, 7821e.
28. *V. G. Voicu.* Z. Physik Chem. (Leipzig) *217*, 299—306 (1961).
29. *S. M. Kocergin.* Jurnal fizicescoi himii *35*, 2093-100 (1962).
30. * * * C.A. 56, 11347g (Ref. Jurnal himii 1961, No. 15B520).
31. *F. Ia. Kolba, V. E. Mironov.* Himia talia, 1963, 114—116.
32. *M. Nardelli și colab.* Gazz, Chim. ital. *87*, 510-18, (1957).
33. *H. Z. Brainina.* Dokl. Acad. Nauk. S.S.S.R. 1964, Tom. 154 No. 3, 665.
34. *H. Terrei.* C.A. **53, 13830.**

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z.: 661.321 : 661.844 : 661.426

ÉTUDE DU DÉSULFATAGE DE LA SAUMURE DANS L'INDUSTRIE DU CARBONATE DE SODIUM À L'AIDE DES COMPOSÉS DU BARYUM *

I. GH. COSTANTINESCU, B. MELEGA

La purification de la saumure employée comme matière première dans l'industrie de la soude amonicale, des ions de calcium et de magnésium, constituants ses principales impuretés, se fait par le procédé à la chaux et à la soude où bien par d'autres procédés similaires.

Ces procédés ne réussissent pas à écarter de la solution les ions sulfates, lesquels dans certaines phases technologiques créent des difficultés, produisant des croûtes qui gâtent les appareils les mettant hors d'usage et causant nombres d'interruptions dans le flux technologique.

Les procédés proposés jusqu'à présent pour écarter les ions de sulfate de la saumure, notamment :

— Le procédé de précipitation des ions sulfates avec des composés solubles de baryum ;

— Le procédé de précipitation des ions sulfate avec des composés insolubes de baryum dans une couche fixe ;

— Le procédé des remplaçants des ions, n'ont pas réussi de s'encadrer complètement dans les nécessités imposées par le règime de fonctionnement des usines de soudes, à des indices technico-économiques acceptables.

L'ouvrage ci-devant se propose d'établir, basé sur les résultats expérimentaux de laboratoire, un procédé technologique de désulfatage des saumures à l'aide du carbonate de baryum en suspension.

L'élimination des ions sulfate à l'aide du carbonate de baryum, trouvé en suspension dans la saumure destinée à la purification, a lieu d'après la réaction :

$$BaCO_3 + SO_4^{--} \rightleftharpoons BaSO_4 + CO_3^{--}$$

La régéneration du carbonate de baryum existant dans le sulfate de baryum s'effectue d'après la réaction inverse :

$$BaSO_4 + Na_2CO_3 \rightleftharpoons BaCO_3 + Na_2SO_4$$

---

* L'ouvrage présenter à la III ème Conférence Républicain de Chimie. Timișoara 1966.

On a effectués des études aussi sur la réaction de régéneration, les résultats étant exposés dans un autre ouvrage [7].

La réaction directe d'élimination des ions sulfate est une réaction hétérogène, dont l'équilibre est pratiquement complètement déplacé dans la direction de la formation du sulfate de baryum, dans les conditions de températures et concentrations utilisés en pratique.

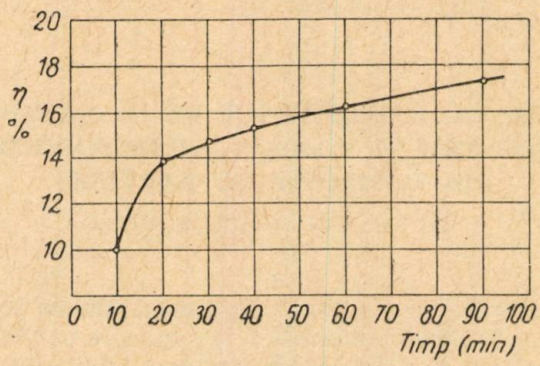


Fig. 1

Les essais expérimentaux effectués ont conduit à la conclusion que la cinètique de la réaction influence beaucoup le rendement d'élimination des ions sulfate. Pratiquement, apres un certain temps de déroulement de la réaction, celle-ci s'arrête à cause que la surface des granules de carbonate de soude se couvrent d'une couche de sulfate de baryum. (Fig. 1).

La vitesse de réaction devient insignifiante après aproximativement vingt minutes.

L'introduction d'un excès de carbonate de baryum par rapport au nécessaire théorique, conduit à une hausse linéaire du rendement du désulfatage exprimé par le rapport :

$$\eta = \frac{SO_4^{--} \text{ passé par la réaction}}{SO_4^{--} \text{ initial}} \times 100$$

Au point de vue expérimental on a constaté qu'une augmentation de l'excès de carbonate de baryum de 100% à 900% conduit à un triplement de la valeur du randament du désulfatage.

L'introduction d'un grand excès de carbonate de baryum est attaquée en pratique à la nécessité de manipuler une quantité plus grande de précipité pour la séparation de la phase solide, fait créeant des difficultés non compensées par l'accroissement du rendement du désulfatage.

Afin d'éliminer cet inconvénient on a essayé deux variantes, notamment :

1. L'introduction d'un courant de bioxide de carbone dans le milieu de la réaction, qui augmentent la concentration des ions de Ba^{2+} en phase liquide.

2. Agiter énergiquement la suspension afin d'écarter mécaniquement la croûte de sulfate de baryum formée sur la surface des particules la croûte de sulfate de baryum formé sur la surface des particules solides.

Dans les détermination expérimentales de laboratoire on a poursuivi :

1. L'influence du temps de contact ;
2. L'influence de l'excès du carbonate de baryum ;
3. L'influence de l'agitation mécanique ;
4. L'influence du barbotage à l'air ;
5. L'influence du barbotage au bioxide de carbone.

On a utilisé de la saumure, provenue de l'installation de purification de l'usine de produits sodés — Govora, ayant la composition suivante :

NaCl	306 g/l
NaOH	0,48 g/l
Na_2CO_3	0,79 g/l
Na_2SO_4	5,76 g/l
Ca^{2+}	0,008 g/l
Mg^{2+}	0,007 g/l
H_2O	890 g/l

et du carbonate de baryum, produit par les usines Solex, ayant la composition suivante :

$BaCO_3$ 98%
BaS 0,35% substances insolubles 0,8%.

Les résultats expérimentaux sont résumés dans le tableau 1 et dans la fig. 2.

Tableau 1

L'excès de $BaCO_3$	%	100	200	300	400
La temperature	°C	20	20	20	20
Le temps de réaction	min.	20	20	20	20
SO_4^{--} initial	g/l	3,89	3,89	3,89	3,89
SO_4^{--} non réactionnée après l'agitation mécanique	g/l	1,149	0,860	0,611	0,269
Le rendement du désulfatage	%	70,5	77,9	84,3	92,4
SO_4^{--} non réactionnée après le barbotage à l'air	g/l	1,058	0,811	0,533	0,252
Le rendement du désulfatage	%	72,5	79,2	86,3	93,3
SO_4^{--} non réactionnée après le barbotage au bioxid de carbone	g/l	0,835	0,538	0,338	0,229
Le rendement du désulfatage	%	78,5	86,1	91,2	94,1

Le barbotage à l'air et au bioxide de carbone a été effectué aux débits spécifiques égaux en gaz, afin de comparer l'effet purement mécanique de l'agitation de la suspension par les bulles de gaz avec l'effet chimique de la dissolution du carbonate de baryum, conformément à la réaction :

$$BaCO_3 + CO_2 + H_2O = Ba(HCO_3)_2$$

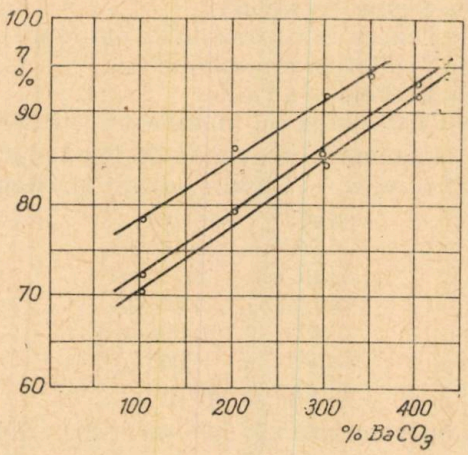


Fig. 2

Comme on peut le remarquer dans les données présentées, l'effet mécanique du barbotage est presque tout aussi important que l'effet chimique.

Une partie des paramètres technologiques comme le seraient par exemple la température et le temps de contact, sont dictés par le spécifique des installations du flux technologique de l'usine de soude, dont le règime de fonctionnement ne doit être nullement troublé.

Basé sur ce critère, ainsi que sur les déterminations expérimentales faites on a établi que les conditions optimes pour le désulfatage de la saumure au carbonate de baryum en suspension, sont :

— température de travail 20°C ;
— temps de contact 20 minutes ;
— rapport entre les réactifs $BaCo_3 : SO_4^{--} = 3,5 : 1$;
— fortement agité ;
— barbotage au bioxide de carbone (2—3% CO_2).

Le suivant schemà technologique a été préconisé pour le désulfatage des saumures — fig. 3.

La saumure brute purifiée des ions de calcium et de magnésium est introduite dans la partie supérieure d'une colonne (1), en contrecourant d'un gaz à contenu réduit de bioxide de carbone assurant la solubilité des ions de baryum et l'agitation de la suspensios. Le débit de gaz doit être élevé afin d'assurer le fonctionnement normal de la colonne, tenant compte de la densité de la phase solide.

La suspension du carbonate de baryum provenue de la régénération est introduite concomittament dans la partie supérieure de la colonne. Après avoir parcouru la colonne dans laquelle a lieu la réaction de précipitation des ions sulfate, la suspension passe dans le décanteur épaississant (2) d'où la solution désulfatée, après un philtrage de contrôle (3), est dirigée pour être amonisée.

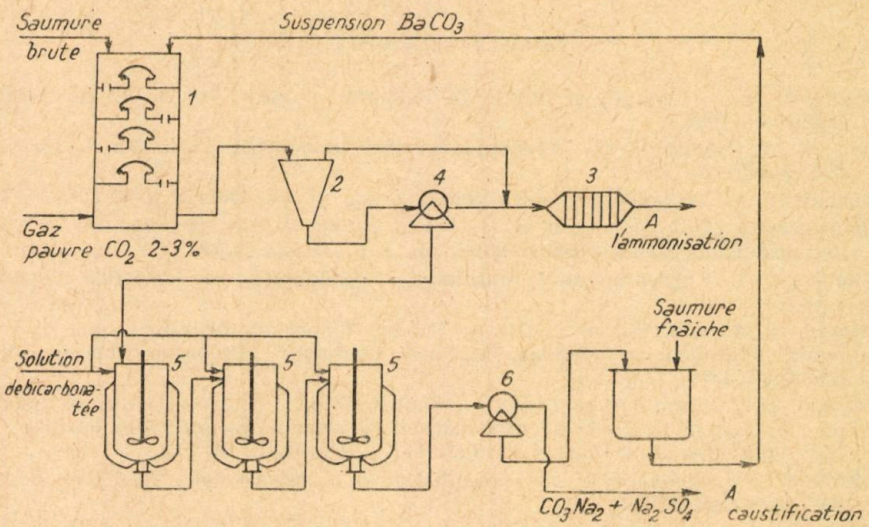


Fig. 3

La suspension épaissie est philtrée par un philtre rotatif (4), d'ou la solution resultée est dirigée vers le philtrage de contrôle (5), celui-ci étant le premier d'une série de réacteurs où a lieu la rèaction de régénération du carbonate de baryum. Ici, la suspension de sulfate de baryum et de carbonate de baryum est diluée avec la solution de carbonate de sodium provenue de la colonne de débicarbonatage.

Après la réaction de régénération, la suspension est philtré sur un philtre rotatif (6), d'où ce qui est solide est dirigés vers un vase de dilution (7), où se prepare la suspension de carbonate de baryum dans la saumure brute.

La suspension este dirigée à nouveau vers la colonne de réeaction (1).

La solution resultée du philtre (6), contenant le carbonate de sodium en excès, accompagnée par une petite quantité de sulfate de sodium (le rapport $\frac{SO_4^{--}}{CO_3^{--}} = 1 : 8$) est dirigée afin de devenir caustique.

Le procédé proposé présente l'avantage qu'il utilise l'outilage caractéristique aux usines de soude et emploie intégralement les sous-produits de réaction.

Le procédé est conçu de telle manièere qu'il puet être apllique avec succèes à la purification des saumure de l'industrie de la soude sans troubles essentiels des paramètres du flux technologique.

Laboratoire de technologie anorganique
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest

BIBLIOGRAFIE

1. *Bratu, E. A.* — Operații și utilaje în industria chimică, vol. I, II, Ed. Tehnică, București, 1960.
2. *Gryeza, W., Kaminski, S.* — Tehnologia sodei amoniacale, Trad. din lb. poloneză, IDT, București, 1958.
3. *Ionescu, T.* — Tehnologia chimică generală, vol. II, Ed. Didactică, București, 1956.
4. *Jeghencenko, G. A., Demiceva, O. D.* — Exp. pentru purificarea saramurii în fabrice de sodă. Himiceskaia promîșlenoști, nr. 3, p. 31—33, 1954.
5. *Lileanu, C.* — Chimie analitică cantitativă — Volumetria. Ed. Didactică, București, 1964.
6. *Melega, B., Constantinescu, I. Gh.* — On the theory of the equilibrium of solid-liquid heterogenous reactions. Bul. Inst. Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 1967.
7. *Melega, B., Constantinescu, I. Gh.* — Contribuții la stabilirea condițiilor tehnologice optime în procesul de producere a carbonului de bariu din baritină. Bul. Inst. Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, 1967.
8. *Mikulin, G. I., Poleakov, E. A.* — Distilarea în industria sodei. Trad. din lb. rusă, IDT. București, 1958.
9. *Petru, I.* — Tehnologia sodei și a produselor sodice. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1960.
10. * * * — Reinigung von Stein Salz — Purificarea sării geme, Chemie und Technick, 32 (1960).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

NOTĂ

C.Z.: 545.2 : 66.028 : 542.951.5 : 547.212 : 546 : 545.81

METODE DE DOZARE A DIMETILAMINOETANOLULUI *

GRIGORE TEODORESCU

NOTA I

Metodă volumetrică de determinare a dimetilaminoetanolului

În prezenta lucrare s-a instituit o metodă argentometrică de dozare a dimetilaminoetanolului, produs intermediar necesar preparării unor substanțe farmaceutice.

Determinarea s-a făcut indirect, prin precipitare cu soluție de sare Reinecke (tetra cianato-diaminocromatul de amoniu).

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4 \cdot H_2O$$

cînd se formează combinația complexă de culoare liliachie, greu solubilă în apă, solubilă în acetonă. Reacția care are loc este următoarea :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4 + HO—CH_2—CH_2—N(CH_3)_2 + H_2SO_4 \rightarrow$$
$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH(CH_3)_2CH_2CH_2OH + NH_4HSO_4.$$

După separarea și solubilizarea complexului format cu acetonă se adaugă exces de $AgNO_3$ 0,1 n cînd se formează :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH(CH_3)_2CH_2CH_2OH + AgNO_3 \rightarrow$$
$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]Ag + CH_2 = CH—N(CH_3)_2 + HNO_3 + H_2O$$

Precipitatul de rainecat de argint format se filtrează, iar excesul de $AgNO_3$ se dozează cu soluție de tiocianat de amoniu.

Modul de lucru. Se iau în pahare Berzelius de 50 cm^3 cu microbiuretă probe între 0,5→4 cm^3 soluție de dimetilaminoetanol conținînd 0,0223→0,1784 g/cm^3, se acidulează cu acid sulfuric și se adaugă prin agitare picătură cu picătură 20→30 cm^3 soluție de sare Reinecke 2% ce conține 0,0168 g/cm^3 proaspăt preparată în așa fel ca soluția de deasupra precipitatului să rămînă intens colorată. După completa precipitare se lasă ca precipitatul să se depună după care se filtrează cantitativ

* Manuscris predat la redacție la 15 martie 1967.

precipitatul pe creuzet G_4 cu soluție de reactiv 1%, spălîndu-se la urmă cu apă distilată rece. Se trage bine la trompă și se șterge fundul creuzetului cu hîrtie de filtru.

Se dizolvă apoi precipitatul direct pe creuzetul filtrant cu acetonă, prinzînd cantitativ filtratul în balon de 100 cm^3 peste care se adaugă 25→30 cm^3 azotat de argint 0,1 n. Se adaugă cîteva picături de acid azotic, se aduce la semn cu apă distilată după care se filtrează pe filtru cantitativ. Filtratul se prinde în sticlă uscată din care se iau cote parte de cîte 20→25 cm^3, în flacoane de titrare. La titrare se adaugă cîteva picături de acid azotic, 1→2 cm^3 alaun feric și se titrează excesul de azotat de argint cu soluție de tiocianat de amoniu.

La 1 cm^3 azotat de argint 0,1 n corespund 0,0089 g de dimetil aminoetanol.

Reactivii folosiți

Soluție de dimetilaminoetanol
Soluție 2% sare Reinecke
Soluție 0,1 n de azotat de argint
Soluție 0,1 n de tiocianat de amoniu
Soluție de alaun feric
Soluție de acid azotic
Soluție de acid sulfuric
Rezultatele obținute sînt indicate în tabela următoare.

Tabela 1

Nr. crt.	cm^3 soluție de analizat	grame substanță de analizat	cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n adăugat	cm^3 NH_4SCN 0,1 n folosiți	cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n reacționat	grame substanță determinată	g/cm^3 substanță determinată	Diferența
1	0,5	0,0223	25	22,50	2,50	0,0223	0,0446	0,0000
2	1,0	0,0446	25	20,00	5,00	0,0446	0,0446	0,0000
3	1,5	0,0669	25	17,50	7,50	0,0669	0,0446	0,0000
4	2,0	0,0892	25	15,00	10,00	0,0892	0,0446	0,0000
5	2,5	0,1115	25	12,40	12,60	0,1107	0,0448	0,0002
6	3,0	0,1338	25	9,75	15,25	0,1347	0,0448	0,0002
7	3,5	0,1553	25	7,50	17,50	0,1553	0,0446	0,0000
8	4,0	0,1784	25	5,05	19,95	0,1775	0,0444	0,0002

NOTA II

Metodă colorimetrică pentru dozarea dimetilaminoetanolului

S-a arătat în nota anterioară că dimetilaminoetanolul este un produs intermediar necesar preparării unor substanțe farmaceutice care formează cu sarea Reinecke o combinație complexă de culoare liliachie după reacție :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4 + HO—CH_2CH_2\,N(CH_3)_2 + H_2SO_4 \rightarrow NH_4HSO_4 + [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\,HN(CH_3)_2CH_2CH_2OH$$

Deoarece produsul este foarte solubil în acetonă, în lucrarea de față se dă o metodă de dozare colorimetrică.

Mod de lucru

Se iau cu microbiureta probe ce conțin 0,0100→0,0300 g substanță, se diluează, se adaugă în picătură soluție sare Reinecke 2% pînă la completa precipitare. Se lasă să se depună precipitatul, apoi se filtrează imediat pe creuzet G_4. Se antrenează cantitativ precipitatul în creuzet folosindu-se soluție de reactiv 1%. Se trage bine la trompă,

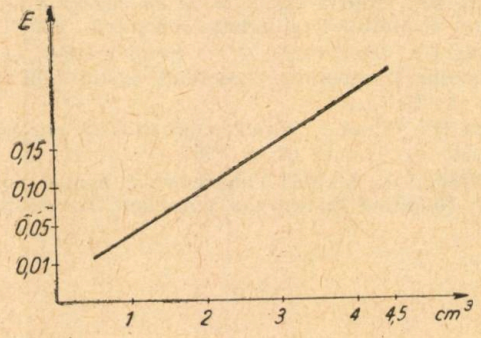


Fig. 1

se șterge fundul creuzetului cu hîrtie de filtru ca precipitatul să nu rețină soluție de sare Reinecke și se dizolvă precipitatul direct pe creuzet cu acetonă prinzîndu-se cantitativ în balon cotat de 100 cm^3. Se completează la semn cu apă distilată, după care se face colorimetrarea soluției astfel obținute la fotocolorimetru tip B. Lange.

S-a lucrat prin metoda curbelor etalon. În acest scop s-a preparat soluție de sare Reinecke cu titru T = 0,0168 g/cm^3, solventul fiind acetona.

S-au luat din această soluție anumite cantități cu microbiureta și s-au adus la balon cotat de 100 cm^3, în așa fel ca soluțiile obținute să aibă concentrațiile : T=0,000112 g/cm^3 ; T=0,000223 g/cm^3 ; T=0,000335 ; T=0,000446. După omogenizarea soluțiilor s-a trecut la colorimetrarea lor și s-a trasat curba de etalonare.

S-a trecut apoi la colorimetrarea soluțiilor de analizat și s-au obținut următoarele rezultate :

Substanță luată g/cm³	Substanță găsită g/cm³	Eroare
0,000112	0,000114	+1,7%
0,000223	0,000226	+1,3%
0,000335	0,000330	—1,5%
0,000446	0,000444	—0,5%

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Spacu, P., Teodorescu, Gr.*, Metodă volumetrică de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului politehnic București, Tomul XVIII, fasc. 1/1956.
2. *Spacu, P., Teodorescu, Gr. Găvănescu, D.*, O nouă metodă volumetrică de dozare a hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului politehnic București, Tomul XVIII, fasc. 1/1956.
3. *Spacu, P., Teodorescu, Gr.*, O nouă metodă volmetrică de dozarea hidrazidei acidului izonicotinic. Revista de Chimie nr. 1, 1957.
4. *Teodorescu, Gr., Dinescu, A.*, Metodă colorimetrică pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului politehnic București, Tomul XXVI, fasc. 1/1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

REȚELE ELECTRICE

C.Z.: 621.311 : 621.316.9 : 621.317 : 621.315.1

SUR L'INTERPRÉTATION UNITAIRE DES RÉSULTATS DES MESURES DES PARAMÈTRES DU COURANT DE FOUDRE *

C. DINCULESCU, G. DRĂGAN, T. MICLESCU

1. La protection des installations électriques contre les préjudices portés par les surtensions d'origine atmosphérique et par conséquent, le choix d'un niveau rationnel de protection, dépendent de la connaissance des grandeurs caractérisant les surtensions atmosphériques. Parmi ces grandeurs, une importance toute particulière présentent les paramètres du courant de foudre : l'impédance caractéristique du canal de la décharge, l'amplitude, la pente, la durée du front, la durée de la semi-amplitude et la polarité du courant de foudre.

Les mesures effectuées ont démontrés que chacune de ces grandeurs a un caractère statistique, ce qui explique le fait que les résultats des mesures sont exprimés comme fréquence d'apparition de la grandeur caractéristique ayant une valeur comprise entre certaines limites, ou comme fréquence cumulée exprimant la fréquence d'apparition de la grandeur caractéristique supérieure à une valeur déterminée.

On utilise dans les calculs de protection les courbes de fréquence (fig. 1, fig. 2, fig. 3).

2. Comme on l'a déjà montré [3] on n'a pas encore effectué un nombre suffisant de mesures concernant les paramètres des courants de foudre ; voilà pourquoi il est nécessaire d'analyser les résultats obtenus par les scientifiques, en vue d'établir les courbes de fréquence qui seront utilisées dans les calculs de protection.

La courbe de fréquence de l'amplitude du courant de foudre est l'un des éléments fondamentaux du calcul de la protection des lignes électriques aériennes et des stations électriques extérieures contre les coups directs de foudre. La majeure parte des mesures effectuées concernent ce paramètre du courant de foudre.

La figure 4 représante la fréquence cumulée de l'amplitude des courants de foudre telle qu'elle résulte des mesures effectuées par des scientifiques [1], [4], ... [17]. On peut y faire trois observations : les courbes ont la même allure ; les courbes sont très différentes l'une par rapport à l'autre, couvrant une grande surface dans le plan de la figure ; les coordonnées initiales et finales sont très différentes l'une de l'autre.

* Communiquée à la IX-ème Conference International pour l'étude du paratonnerre et la protection des surtensions attmosphérique. Lugano, Sept. 1967.

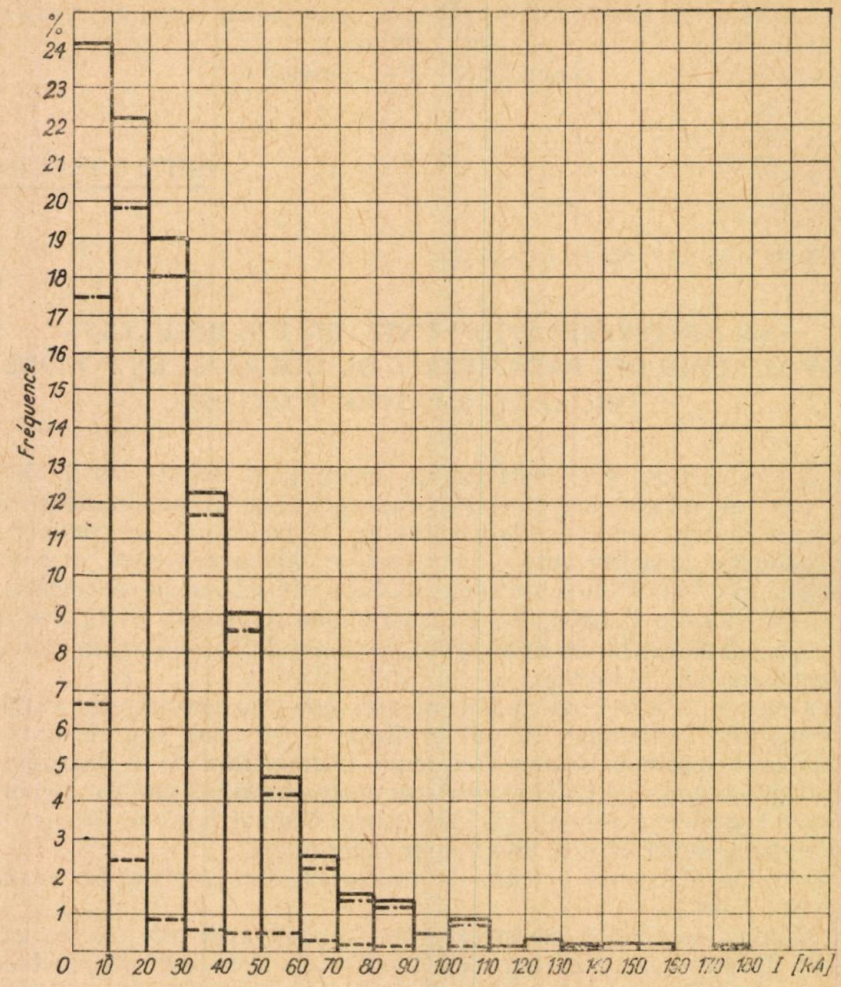


Fig. 1 — La fréquence de l'amplitude du courant de foudre (———), des courants de polarité négative (– · – · –) et de polarité positive (- - -) d'après H. Baatz [1]

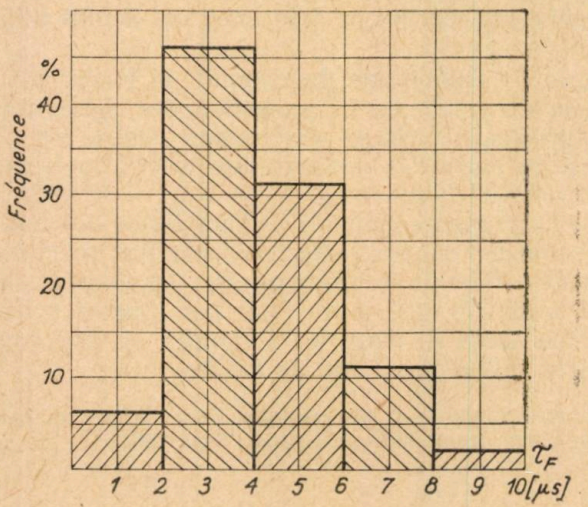


Fig. 2 — La fréquence de la durée du front du courant de foudre [2]

La dispersion relativement grade des valeurs est due aux conditions inégales dans lesquelles on a effectué les mesures ; ele est due également au fait qu'il n'y a pas de critérium unique d'interprétation des résultats obtenus. Il suffit de mentionner que les limites extrêmes des valeurs prises en considération par différents auteurs n'ont pas été toujours les mêmes.

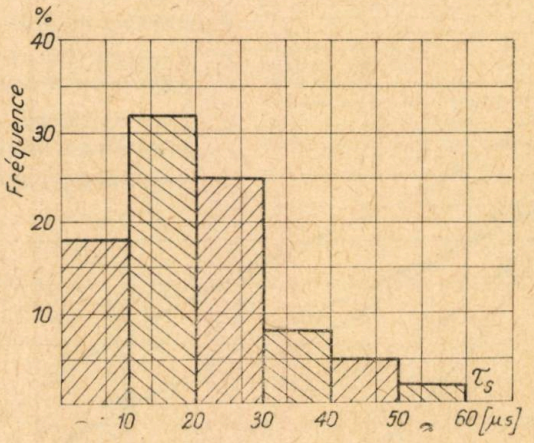


Fig. 3 — La fréquence de la durée de la semi-amplitude du courant de foudre [2]

Il n'est pas possible de comparer les courbes de fréquence d'une grandeur que si les observations ont lieu dans les mêmes conditions, y compris les limites du domaine où l'on enregistre les valeurs de la grandeur étudiée. Par conséquent, les courbes de la figure 4 ne sauraient être comparées sans une transformation préalable.

Il résulte de la figure 4 que l'intervalle 20—60 KA a été accessible aux installations de mesure de tous les scientifigues. Dans la figure 5 on a tracé les courbes de la fréquence cumulée de l'amplitude du courant de foudre de 20 à 60 kA. Le passage de la courbe de la figure 4 à celle de la figure 5 s'effectue de la manière suivante :

Si

$\Psi_I\,\%$ — la fréquence d'apparition d'une valeur de l'amplitude du courant de foudre plus grande que I dans la figure 4.

$\Psi'_I\,\%$ — idem pour la figure 5, alors

$$\Psi'_I\,\% = \frac{\Psi_I\,\% - \Psi_{20}\,\%}{\Psi_{60}\,\%}$$

En les comparant dans les conditions égales du point de vue formel on constate que les courbes obtenues par les scientifiques ne sont pas les mêmes. Afin de pouvoir saisir pour chaque cas l'importance de cette différance, il faut tenir compte du fait que le nombre d'observations correspondant à chaque courbe n'est pas le même. Dans le tableau 1 il est montré pour chaque recherche le nombre des foudres à l'amplitude variant de 20 à 60 kA, déduit du nombre total d'apparitions de la foudre, observées par

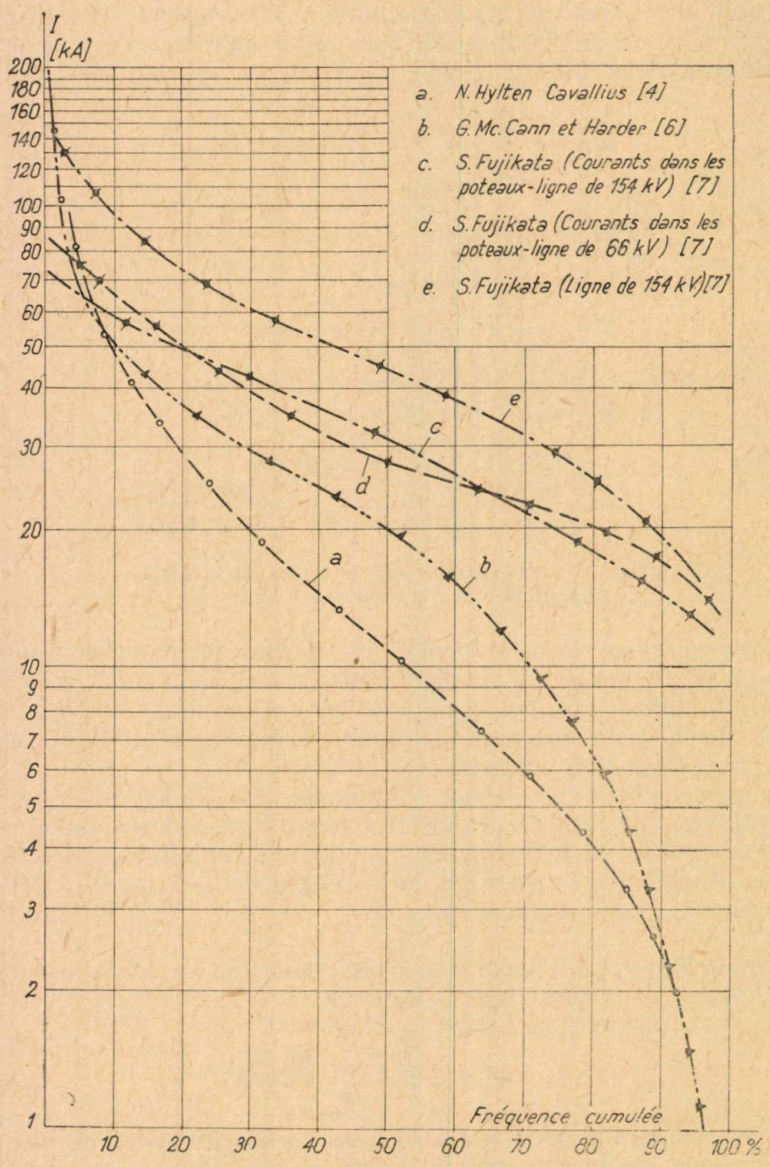


Fig. 4 — La fréquence cumulée de l'amplitude du courant de foudre, d'après divers scientifiques.

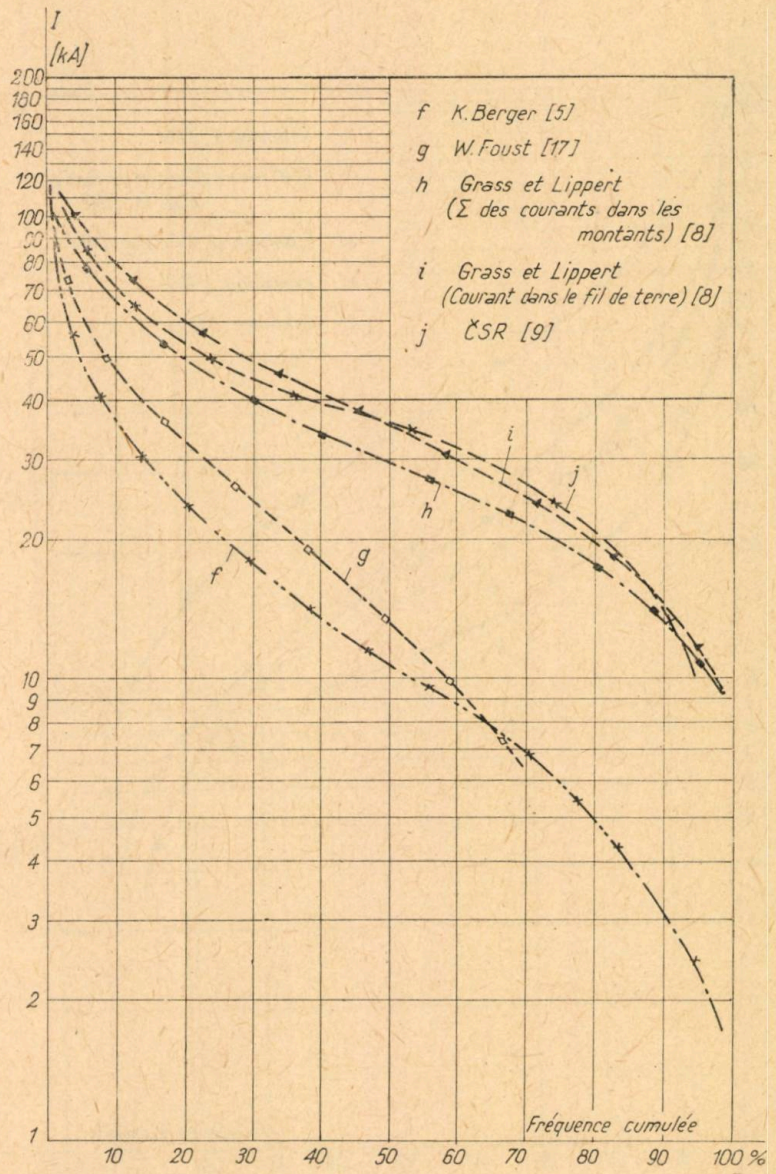

I
[kA]
200
180
160
140
120
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
f K. Berger [5]
g W. Foust [17]
h Grass et Lippert
(Σ des courants dans les montants) [8]
i Grass et Lippert
(Courant dans le fil de terre) [8]
j ČSR [9]
f
g
h
i
j
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 %
Fréquence cumulée

Fig. 4 b

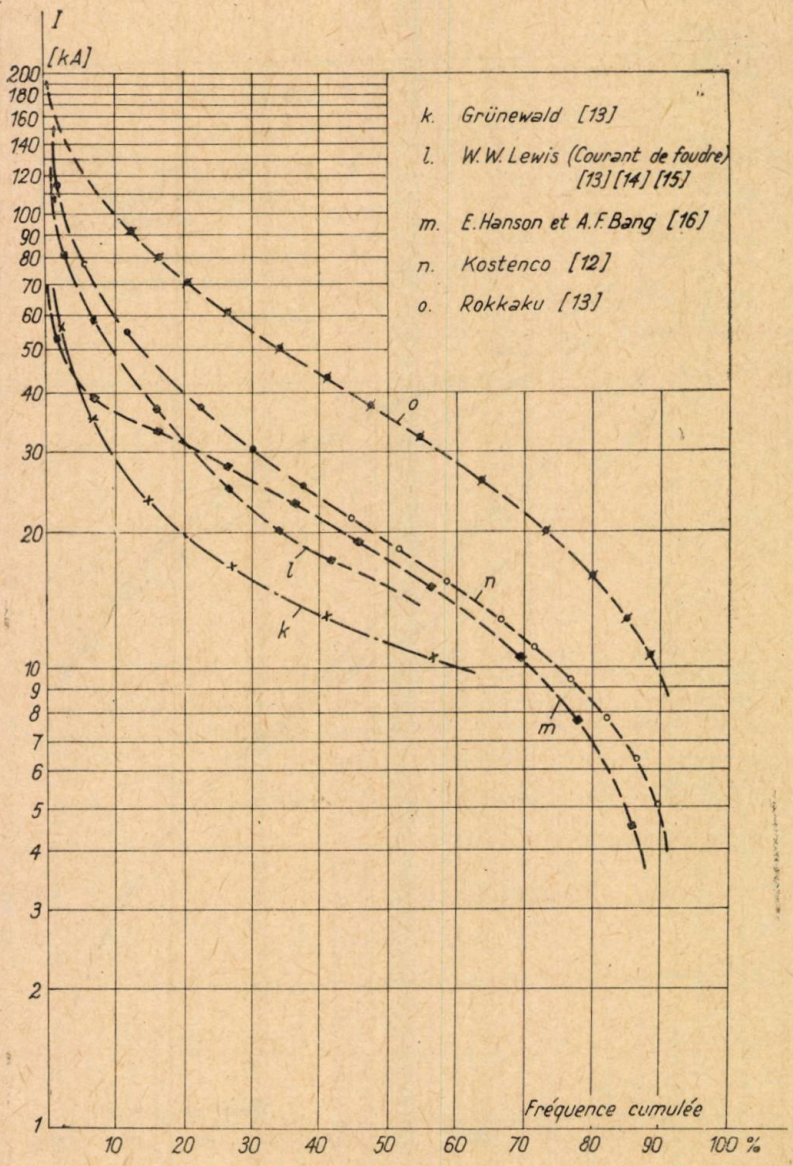

I
[kA]
200
180
160
140
120
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
k. Grünewald [13]
l. W.W. Lewis (Courant de foudre) [13] [14] [15]
m. E. Hanson et A.F. Bang [16]
n. Kostenco [12]
o. Rokkaku [13]
o
l
n
k
m
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 %
Fréquence cumulée

Fig. 4 c

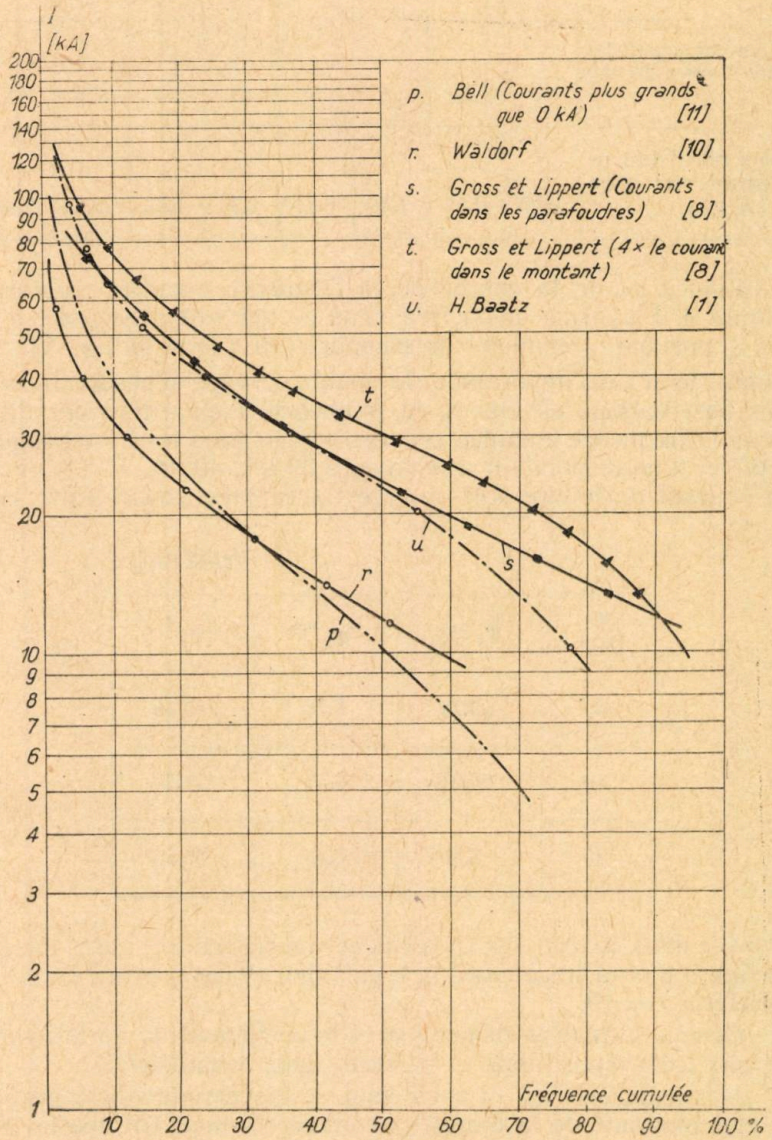

I
[kA]
200
180
160
140
120
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
p. Bell (Courants plus grands que 0 kA) [11]
r. Waldorf [10]
s. Gross et Lippert (Courants dans les parafoudres) [8]
t. Gross et Lippert (4 × le courant dans le montant) [8]
u. H. Baatz [1]
t
u
s
r
p
Fréquence cumulée
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100 %

Fig. 4 d

La lettre de la courbe	a′	b′	c′	d′	e′	f′	g′	h′	i′
Le nombre des amplitudes enregistrées entre 20—60 kA	3	20	55	30	49	63	825	88	30
Le nombre relatif des amplitude enregistrées entre 20—60 kA [%]	0,09	0,52	1,48	0,81	1,30	1,67	22,00	2,35	0,80

un scientifiques, et de la courbe de la fréquence cumulée correspondante de la figure 4. L'analyse qu'on fera dans ce qui suit concerne les courbes amenées à une base commune de comparaison (dans la fig. 5).

Compte tenu de l'importance de chaque groupe d'observations sur la total des observations effectuées, la fréquence d'apparition des différentes valeurs de la fréquence cumulée est représentée dans les hystogrammes des figures 6,7 et 8 correspondant aux valeurs 30 kA, 40 kA, 50 kA de l'amplitude du courant de foudre. On observe un rapprochement entre la répar-

TABLEAU 2

I [kA]	Ψ_I %	$\sigma_{\Psi I}$ %	v_{Ψ_I} %
30	53,74	8,36	15,55
40	24,21	6,57	27,50
50	9,49	3,46	36,50

tition trouvée dans chacun des trois cas et une répartition théorique Poisson. Dans la figure 8 on a tracé aussi la répartition Poisson ayant comme valeur du paramètre $\lambda = 10$.

La valeur moyenne, la dispersion et le coefficient de variation coorrespondant aux trois répartitions se trouvent dans le tableau 2.

3. Les valeurs élevées du coefficient de dispersion allant jusqu'à 36% de la valeur moyenne de la fréquence cumulée démontrent que les résultats obtenus par des scientifiques pour la courbe de la fréquence cumulée de l'amplitude des courants de foudre sont assez différents.

Ces différances observées s'expliquent par : l'emploi de méthodes et de schémas de mesure différents et par conséquent d'une précision différente, l'existence de conditions climatiques, de rélief et de sol différentes.

TABLEAU 1

j′	k′	l′	m′	n′	o′	p′	r′	s′	t′	u′	Le somme
277	297	762	176	38	14	83	514	24	59	344	3749
7,40	7,92	20,3	4,69	1,00	0,38	2,20	13,70	0,64	1,57	9,16	100

Les erreurs dans la mesure des courants de foudre varient selon la méthode employée pour les mesures, selon la valeur de l'amplitude du courant de foudre, selon la vitesse de variation de l'intensité de celui-ci, etc.

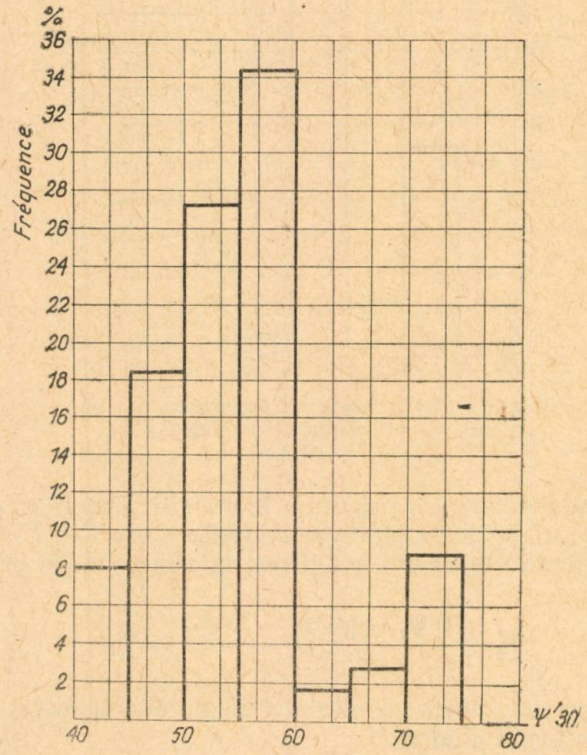


Fig. 6 — La fréquence d'apparition des valeurs de la fréquence cumulée pour $I = 30$ kA.

Lors de la détermination de l'amplitude du courant de foudre, l'erreur de 20% est fréquente. [18, [19]. Il est facile de constater quelles sont les

courbes limite entre lesquelles on doit situer la courbe réelle de la fréquence cumulée au cas où l'on détermine l'amplitude du courant de foudre à l'erreur $\pm \varepsilon$.

Soit en effet

N — le nombre total d'observations

Ψ_I — la fréquence cumulée correspondant à la valeur I mesurée de l'amplitude du courant de foudre.

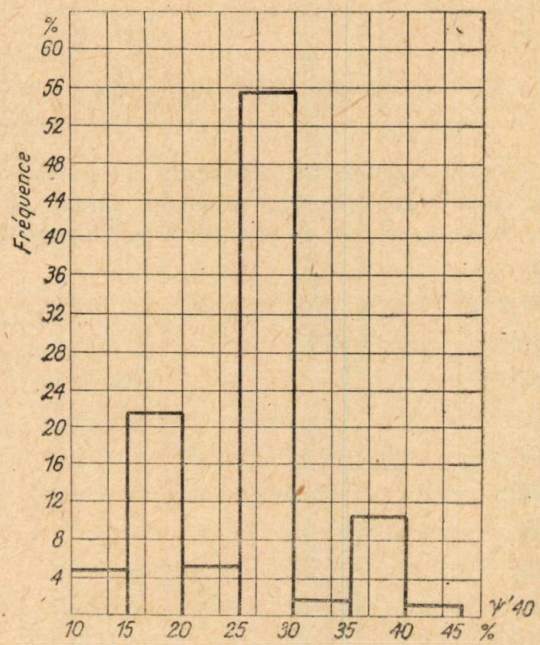


Fig. 7 — La fréquence d'apparition des valeurs de la fréquence cumulée pour $I = 40$ kA.

Si on a mesuré toutes les valeurs à l'erreur $+ \varepsilon$ alors toutes les observations ayant la valeur de l'amplitude comprise entre I et $I' = (1 + \varepsilon)I$ ont en réalité l'amplitude inférieurs à I. Donc la valeur réelle de la fréquence est cumulée

$$\Psi'_I = \frac{N\Psi_I - (N\Psi_I - N\Psi_{I'})}{N} = \Psi_{I'}$$

En supposant que toutes les mesures aient été effectuées à l'erreur $-\varepsilon$, on obtient d'une façon analogue :

$$\Psi''_I = \frac{N\Psi_I + (N\Psi_{I''} - N\Psi_I)}{N} = \Psi_{I''}$$

où

$$I'' = (1 - \varepsilon)\, I$$

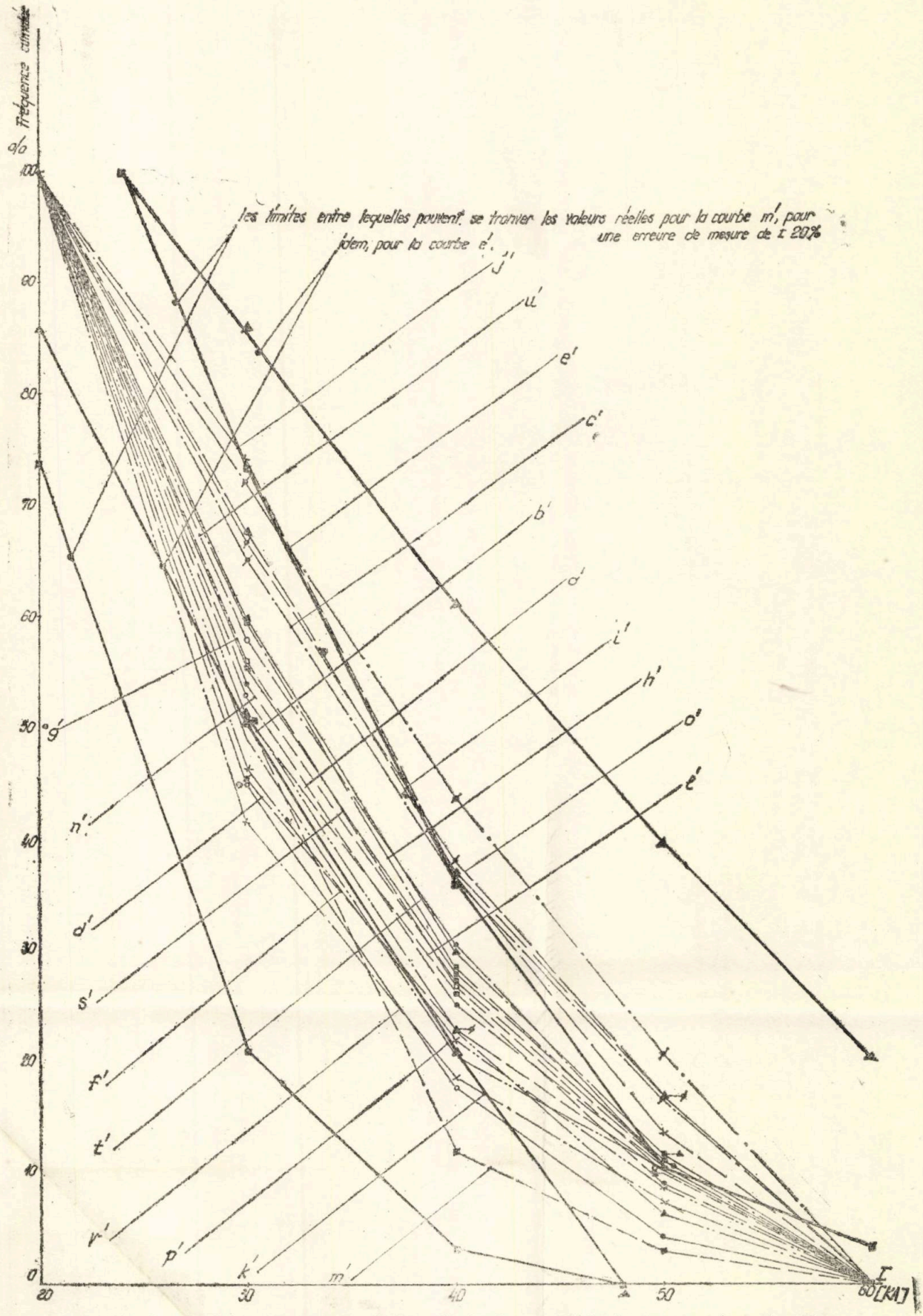
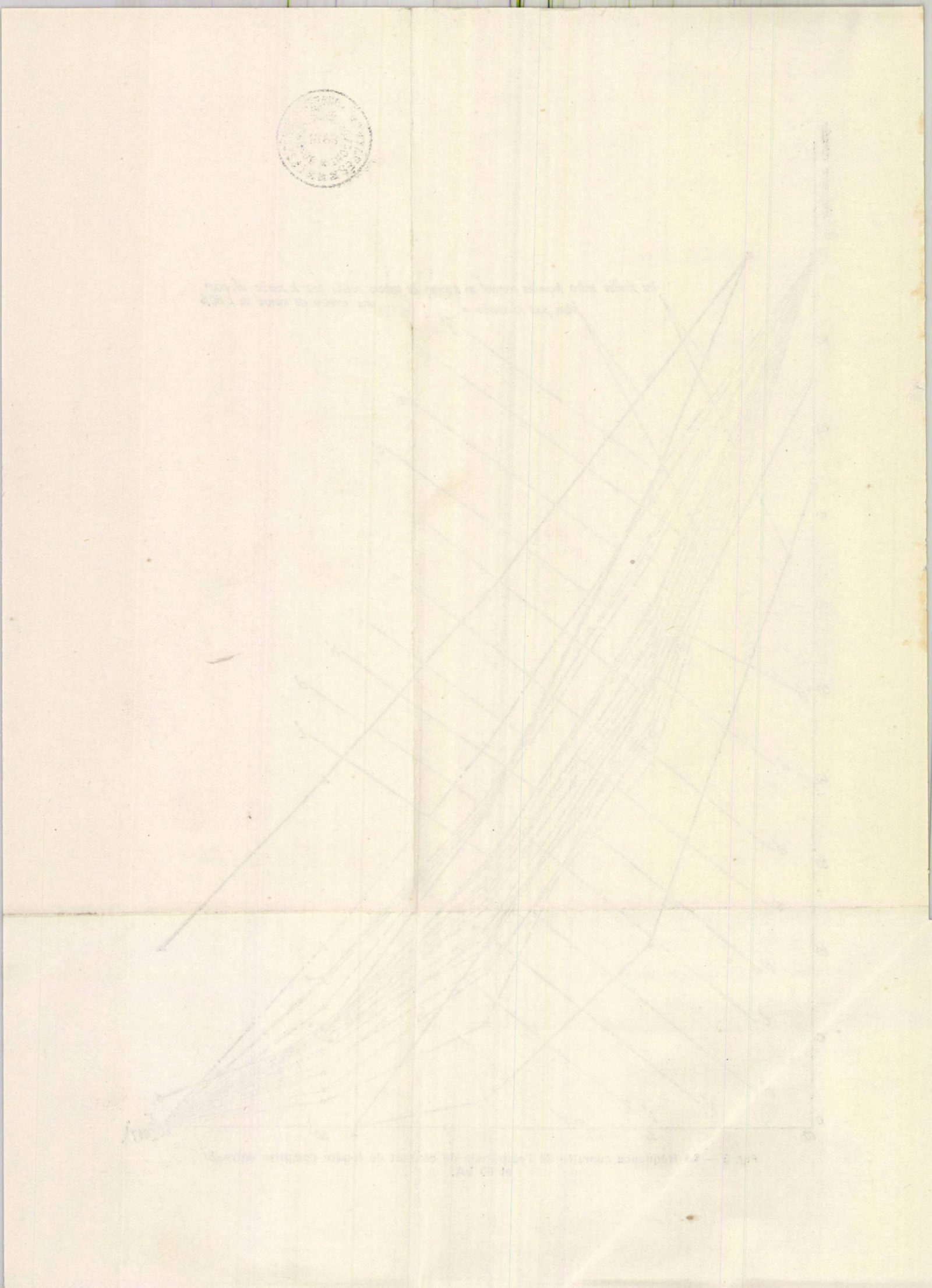


Fig. 5 — La fréquence cumulée de l'amplitude de courant de foudre comprise entre 20 et 60 kA.



Sans avoir pris en considération l'influence du nombre limité d'observations, on a tracé dans la figure 5 les courbes limite dans l'hypothèse de l'erreur de ± 20% appliquée aux deux courbes extrêmes de fréquence.

Si les courbes de fréquence cumulée obtenues par divers scientifiques n'étaient différenciées que grâce aux erreurs de mesure, alors la courbe réelle de fréquence devrait se trouver dans la zone de superposition. On constate que la courbe des valeurs moyennes de même que la majorité des

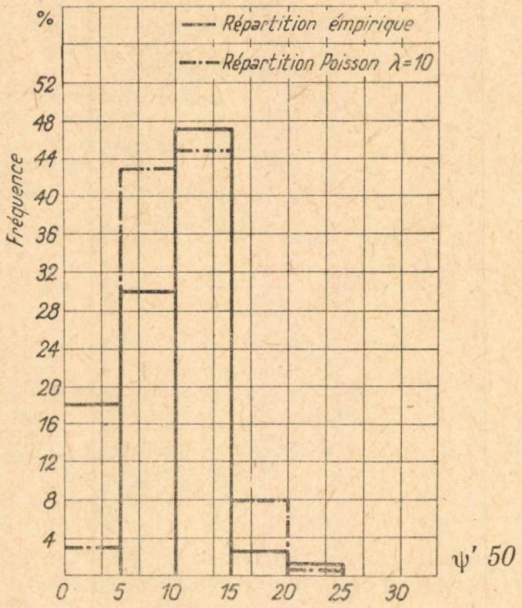


Fig. 8 — La féquence d'apparition des valeurs de la fréquence cumulée pour $I = 50$ kA.

points inscrits sur les courbes comprises entre les deux courbes extrêmes peuvent être encadrés dans cette zone de superposition. Donc, faisant l'hypothèse d'une erreur de mesure de ± 20%, appliquée à toutes les valeurs de l'amplitude comprise dans l'intervalle étudié, ainsi qu'à toutes les recherches, l'erreur de mesure peut expliquer les différences constatées entre les courbes de la fréquence cumulée.

Les différences entre les résultats provenant de la diversité des méthodes et des schémas de mesure peuvent être considérées dans un certain sens subjectives et peuvent être écartées au cas où une commission internationale de spécialité élaboreraient une méthode et des schémas de mesure uniques, capables d'une précision donnée.

Une fois éliminée cette source de différences, les résultats qui seront obtenus (ou les résultats qui peuvent être récupérés sur les observations faites jusqu'à présent) doivent être sélectionés selon le critérium climatique, d'altidue et de sol.

L'analyse qualitative de tous ces critériums doit mener à l'établissement de certains indices quantitatifs correspondants à des coefficients de correction qui permettent l'adaptation d'une courbe universelle aux conditions climatiques, géographiques et géologiques déterminées.

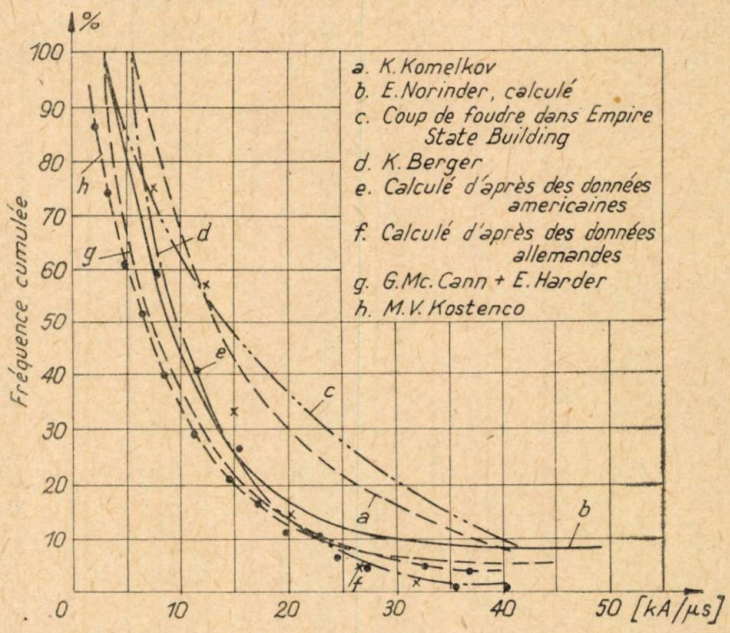


Fig. 9 — La fréquence cumulée de la pente du courant de fudure, d'après les différentes recherches.

4. Des considérations similaires à celles qui ont été faites à l'égard de l'interprétation des données concernant l'amplitude du courant de foudre peuvent être faites également à l'égrad de l'interprétation des données concernant le pente du courant de foudre, la durée du front, la semi-amplitude ou autres caractéristiques du courant de foudre.

En observant les figures 9, 10 et 11 on peut tirer des conclusions similaires à celles du point 2 et la voie à suivre pour interpréter unitairement les résultats existants est la même.

5. L'importance de la connaissance des paramètres du courant de foudre présente en dernier lieu un intérêt de nature économique, parce que les paramètres déterminent tant les caractéristiques constructives des installations énergétiques que la grandeur des dégâts provoqués par les décharges atmosphériques, grandeur acceptée du point de vue économique.

Ainsi, pour une ligne électrique aérienne la détermination de l'angle optimum de protection pour un niveau donné de protection de la ligne (I_{pr} [kA]) est déterminée par une comparaison technique et économique où interviennent par l'intermède des dépences annuelles de calcul concernant la ligne électrique aérienne, les dégâts provoqués par les décharges électriques dans la ligne aerienne.

Pour une ligne électrique aerienne ayant des conducteurs de protection on peut obtenir des réalisations variées en fonction de deux paramètres caracterisant la protection de la ligne contre les surtensions atmosphériques, à savoir : le niveau de protection de la ligne (I_{pr} [kA]) et l'angle de pro-

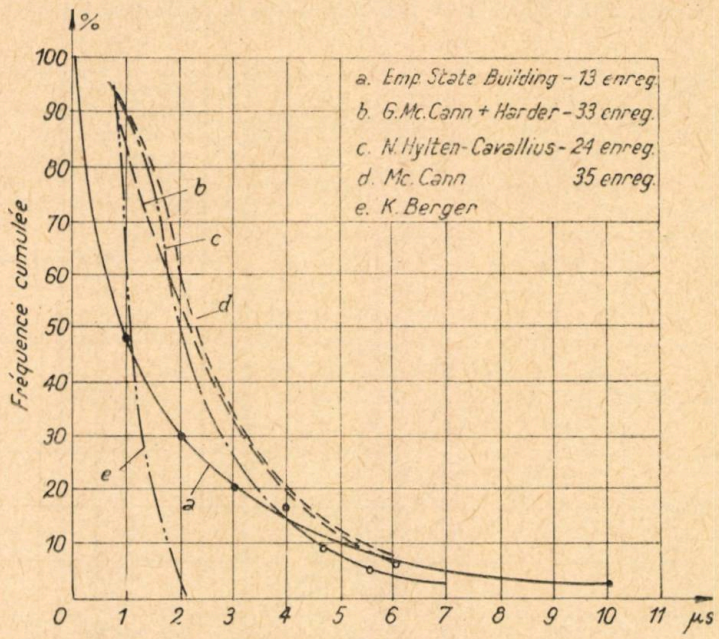


Fig. 10 — La fréquence cumulée de la durée du front, d'après les différentes recherches.

tection entre le conducteur de protection et le conducteur actif (α_{pr} [°]). La détermination, de la variante optimale est faite, conformément aux régles de calcul technique et économique, en rendant optimum les dépenses annuelles de calcul

$$C_{calc.\ an} = C_{an} + I \cdot p_n$$

où

C_{an} — dépenses annuelles
I — investissements
p_n — coefficient normé de l'éfficacité économique.

Les investissements sont en fonction de plusieurs grandeurs, parmis lesquelles le niveau de protection de la ligne et l'angle de protection.

Les dépenses annuelles contiennent également les dégâts produits par les décharges atmosphériques

$$C_{decl} = n\, c_{decl} \qquad \text{où } c_{decl}$$

représente les dégâts provoqués par un déclenchement et n le nombre annuel de déclenchements dus aux surtensions atmosphériques. Ce nombre est proportionnel à la fréquence d'apparition d'un courant plus élevé que I_{pr}, $n = K \cdot \Psi_{I_{pr}}$, [12].

Comme on ne dispose pas encore d'une courbe unique pour Ψ_I il faut considérer pour Ψ_{pr} la valeur moyenne de la fréquence cumulée pour $I = I_{pr}$ determinée au point 2. A cet effet, les courbes de la fig. 4 peuvent être amenées à une base commune de comparaison, en fixant les deux extrémités de l'intervalle à 0 et 220 kA et prenant dans la zone des valeurs extrêmes

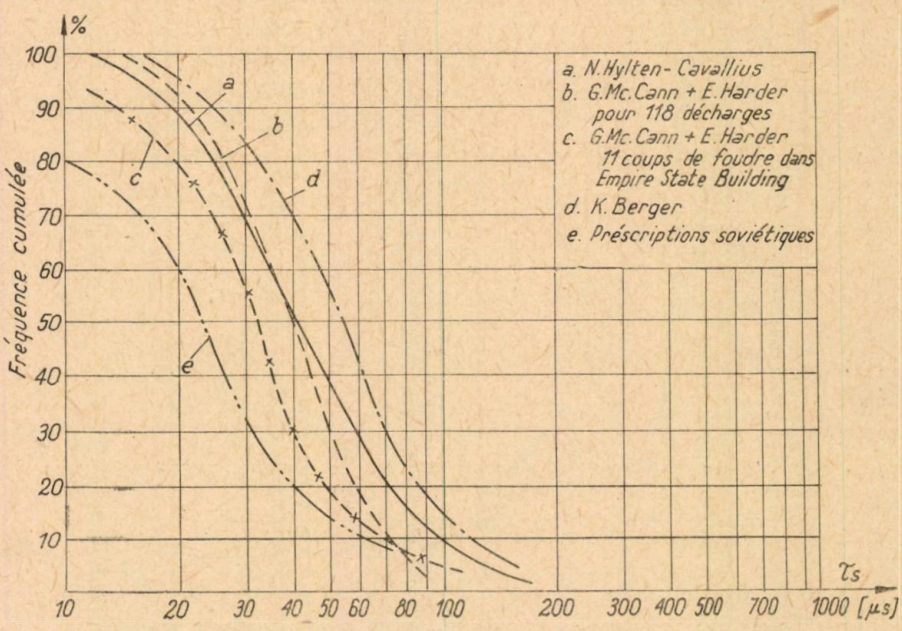


Fig. 11 — La fréquence cumulée de la durée de la semiamplitude, d'après les différentes recherches.

des courants un nombre plus petit d'observations. Pour déterminer le poids relatif des valeurs comprises dans les intervalles 0—20, 20—60 et 60—200 kA il faudra utiliser les recherches qui ont pu observer des valeurs apparues dans tout l'intervalle 0—200 kA.

6. De ce qui précède il résulte les conclusions suivantes :

— Les résultats des mesures concernant les paramètres des courants de foudre effectués par divers scientifiques ont une dispersion relativement étendue.

— Outre les conditions locales, les différences relativement considérables entre les mesures sont aussi dues au fait que les critériums se rattachant à l'execution des mesures et à l'interprétation des résultats ne sont pas les mêmes. Par suite, l'interprétation statistique de ces résultats n'est-elle pas possible pour toute la gamme de valeurs des paramètres des courants de foudre.

Il est à recommander qu'une commission internationale établisse des critériums uniques pour les mesures de paramètres des courants de foudre qui tiennent compte aussi de l'influence de certaines conditions locales (l'altitude de la région considéré, la nature du sol, etc.). De cette façon,

les données obtenues pourront être interpretées statistiquement et en même temps, sur la base d'observations assez nombreuses, on pourra établir des coefficients de correction qui tiennent compte éventuellement de l'influence des conditions locales.

L'établissement des valeurs plus correctes concernant les paramètres des courants de foudre est nécessaire pour une analyse plus exacte du comportement des installations électroénergetiques à l'égard de l'action des surtensions atmosphériques, de même que du point de vue économique.

La chaire de centrales électriques
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Baatz H.* — Blitzeinschlag — Messungen in Freileitungen ETZ, vol. 72, 1951, pg. 191.
2. *Strigel R.* — Elektrische Stossfestigkeit — Springer Verlag — Berlin — 1955, pg. 214.
3. *Drăgan Gleb* — Despre parametrii curentului de trăznet. Analizarea metodelor de măsurare şi a rezultatelor obţinute prin aceste metode, Energetica, nr. 7/959, pg. 296.
4. *Hylten N., Covalius, Strömberg A.* — The Amplitude, Time to halfvalue and Steepness of Lightning Currents — ASEA Journal — vol. 29, 1956, nr. 1, pg. 129—134.
5. *Berger K.* — Recherche suisses sur la foudre. Mesures effectuées au mont San Salvatore, près de Lugano — CIGRE — 1946-R 31 B-18 pag. 15 fig.
6. *Mc. Cann G., Harder E. L.* — Coups de foudre directs et ondes de foudre sur les lignes de transmission — CIGRE 1948-R 322.
7. *Fujitaka S. e.a.* — Étude de la protection contre la foudre des réseaux de transport d'énergie électrique au Japon. CIGRE (1958) R. 392, 23 pag. fig. 14.
8. *Gross, J, W.* and *Lippert G.* — Lightning investigation on 132 kV, Transmission System of the American Gas and Electric Company — AIEE Transactions, vol. 61, 1942, pag. 178.
9. *Gert R., Homa V., Kalousek V., Popolansky F., Vyskocie V.* — Contribution à l'étude des surtensions. Resultats obtenus dans les réseaux Tchécoslovaques — CIGRE (1958) R. 336, 46 pag. fig. 22.
10. *Hanson E., Waldorf* — An eight-year investigation of lightning currents and preventive lightning protection on a Transmission System-AIEE Transactions vol. 63, 1944, pag. 251.
11. *Bell E.* — Lightning Investigation on a 220 kV Sistem 111, AIEE Transactions, vol. 59, 1940, pag. 822.
12. *Costenco M. V.* — Atmosferniie perenapriajenia i grozozaşcita vîsocovoltnîh ustanovoc. GEI (1949) Moscova.
13. *Groupe 35* — Surtensions et foudre — CIGRE 1946.
14. *Lewis W. W.* — Etude des effets de la foudre sur les lignes de transmission — CIGRE (1946) R. 313, 14 pag. fig. 4
15. *Lewis W. W.* — The protection of transmission Systems against Lightning — New-York, 1950.

16. *Hanson E.* et *Bang A. F.* — Lignes de transmission à l'épreuve de la foudre CIGRE (1937) R. 338, 17 pag. 9 fig.

17. *Lewis W. W., Foust L.* — Lightning investigation on transmissions lines. Electrical Engineering, vol. 53 (1934) pag. 1180.

18. *Szpor Stanislaw* — Remarks on oscillographic and simple records of lightning currents — Technical University of Gdansk (Poland) — Avril — 1965 pag. 1—2.

19. *Berger K., Vogelsanger E.* — Messungen und Resultate der Blitzforschung der Jahre 1955—1963 auf dem Monte San Salvatore Bulletin SEV. vol. 56, (1965), nr. 1, pag. 6—7.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

C.Z.: 621.316.5/.54 : 621.3.014/.015.621.3.06 : 621.3.027

INFLUENȚA TIPULUI DE SCURTCIRCUIT ASUPRA TENSIUNII TRANZITORII DE RESTABILIRE LA BORNELE ÎNTRERUPTOARELOR *

GHEORGHE IACOBESCU

Tensiunea tranzitorie de restabilire la bornele întreruptoarelor depinde în principal de două elemente și anume :

a) de rețeaua în care întreruptorul trebuie să funcționeze ;

b) de tipul de întreruptor folosit la deconectare.

Influența rețelei se manifestă nu numai prin elementele constitutive ale acesteia (parametrii R, L, C, G), ci și prin gradul de simetrie al curentului de scurtcircuit, modul de tratare a neutrului și caracteristicile sarcinii electrice.

Influența întreruptorului se manifestă prin conductibilitatea remanentă a spațiului dintre contactele acestuia, după întreruperea curentului, care, uneori, poate amortiza puternic tensiunea tranzitorie de restabilire [1].

În cele ce urmează se studiază influența tipului de scurtcircuit asupra tensiunii tranzitorii de restabilire, determinînd, în funcție de etapa întreruperii, frecvența proprie (sau viteza de creștere a tensiunii tranzitorii de restabilire) și amplitudinea acesteia.

1. Metoda „curentului de injecție" pentru calculul tensiunii tranzitorii de restabilire

În aplicarea acestei metode se consideră că întreruperea circuitului se face în condiții ideale, adică ruperea curentului are loc la trecerea naturală a acestuia prin zero și rezistența spațiului dintre contactele aparatului devine foarte mare, practic infinită, imediat după rupere.

Pentru stabilirea acestei metode generale de calcul [2, 3, 4], fie circuitul electric monofazat prezentat în fig. 1, în care o sursă electromotoare fără impedanță internă debitează un curent într-o rețea simplă, formată dintr-o inductanță și o capacitate.

* Manuscris predat la redacție la 15 ianuarie 1967.

Dacă la momentul $t=0$ intreruptorul rupe curentul de scurtcircuit în prima fază, în acest moment, la bornele polului respectiv, apare o tensiune care reprezintă tensiunea tranzitorie de restabilire. Condiția fizică de rupere a curentului în pol ($I=0$) poate fi obținută dacă, în locul deconectării normale a aparatului, se montează o sursă electromotoare

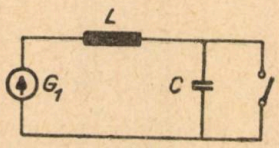


Fig. 1

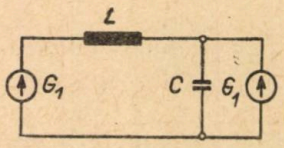


Fig. 2

fără impedanță, G_1 (fig. 2), care produce un curent egal curentului debitat de sursa G ce curge în sens opus în circuitul întrerupt (teorema lui Thevenin). Întreruperea este atunci reprezentată prin acțiunea combinată a celor două surse. Sursa G produce un curent I și o tensiune nulă pe intervalul de rupere (deoarece s-a neglijat tensiunea arcului), iar sursa G_1 produce un curent $-I$ și o tensiune asociată acestuia, care constituie tensiunea tranzitorie de restabilire, a cărei formă este determinată de constantele circuitului privit de la bornele întreruptorului. După un anumit timp, fenomenul tranzitoriu la bornele întreruptorului se amortizează, polii aparatului fiind solicitați de tensiunea de restabilire de frecvență industrială.

Combinarea efectelor celor două surse G și G_1, valabilă numai cînd toate elementele circuitului sînt considerate lineare, permite determinări

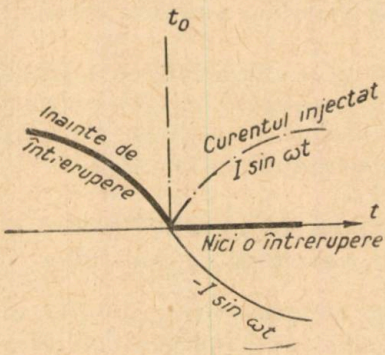


Fig. 3

experimentale și matematice ușoare, putînd scrie totdeauna că tensiunea tranzitorie de restabilire este :

$$\mathfrak{L}(u) = Z(p)\,\mathfrak{L}(i) \qquad (1)$$

în care Z reprezintă impedanța operațională a circuitului văzută de la bornele aparatului. Curentul injectat este sinusoidal, iar ruperea lui este realizată la trecerea prin zero natural, așa cum se arată în fig. 3.

Deoarece în procesul de restabilire a tensiunii la bornele întreruptoarelor interesează ceea ce se întîmplă pe un scurt interval de timp, după trecerea curentului prin zero, pentru valori mici ale lui t, acesta poate fi considerat ca fiind linear crescător, adică

$$I \sin \omega t \simeq I \omega t \tag{2}$$

Simplificarea făcută este foarte importantă, deoarece conduce la o reducere apreciabilă a calculelor și ea este, în general, utilizată.

Ea are o justificare teoretică precisă, care se poate da pornind de la ecuația diferențială obținută la deconectarea circuitului din fig 1.

Într-adevăr, pentru acest circuit, dacă tensiunea electromotoare a sursei generatoare se notează cu E și tensiunea tranzitorie de restabilire cu u, se obțin ecuațiile de funcționare :

$$\begin{aligned} E - L\frac{di}{dt} - u &= 0 \\ u &= u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t idt \end{aligned} \tag{3}$$

În domeniul transformatei Laplace rezultă următoarea formulă generală :

$$\frac{E}{p} - p^2 LC\, \mathfrak{L}(u) + pLCu(0) + LC\left(\frac{du}{dt}\right)0 - \mathfrak{L}(u) = 0 \tag{4}$$

Ținînd seama de condițiile inițiale de lucru ale circuitului, se obține:

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{E}{p}\,\frac{\nu^2}{p^2 + \nu^2} \tag{5}$$

unde

$$\nu^2 = \frac{1}{LC}$$

Această expresie se mai poate pune și sub forma :

$$\boxed{\mathfrak{L}(u) = \left|\frac{E}{L}\,\frac{1}{p^2}\right|\,\frac{1}{C}\,\frac{p}{p^2 + \nu^2}} \tag{5'}$$

Primul factor din membrul drept al ecuației (5') reprezintă transformata Laplace a curentului determinat de expresia (2), ce poate fi considerat — dacă se adoptă semnele corespunzătoare — ca un curent injectat de sursa G_1 în inductanța L.

Al doilea factor din membrul drept al ecuației (5') reprezintă așa numita impedanță operațională a circuitului văzută de la bornele de întrerupere sau operatorul de impedanță. El poate fi obținut prin determinarea impedanței complexe a sistemului bipolar existent în cazul respectiv între bornele întreruptorului și înlocuirea factorului $j\omega$ cu p în expresia găsită.

În practică, ruperea curentului poate avea loc la un moment care diferă de trecerea naturală prin zero. În acest caz, cînd timpul ce interesează în procesul ruperii este scurt, calculul poate fi simplificat dacă injecția curentului este considerată ca fiind :

$$I \sin(\omega t - \theta) \simeq -I \sin\theta + (\omega \cos\theta) I \cdot t \qquad (6)$$

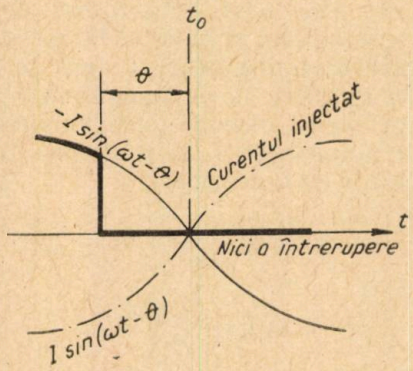


Fig. 4

Primul termen reprezintă un curent rectangular, egal în amplitudine cu curentul întrerupt, iar cel de-al doilea termen este un curent linear crescător, $\omega I\ t$, dacă θ are valori foarte mici. Procesul ruperii în acest caz este arătat în fig. 4.

Dacă întreruperea are loc cînd curentul de rupere este maxim, injecția va presupune că :

$$I \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -I \cos\omega t \qquad (7)$$

care, dacă timpul ce interesează în procesul ruperii este mic, se poate considera egal cu $-I$.

Această analogie a întreruperii circuitului printr-o injecție de curent în sens contrar permite determinarea tensiunii tranzitorii de restabilire din rețelele electrice, utilizînd relația (1). Ea constituie elementul de bază și în aplicarea unor metode experimentale pentru determinarea tensiunii tranzistorii de restabilire, cum ar fi metoda „indicatorului de tensiune" sau cea de „rezonanță la înaltă frecvență".

2. Modul de desfășurare a calculului tensiunii tranzitorii de restabilire

Calculul tensiunii tranzitorii de restabilire, ținînd seama de expresia (1) sau (5'), se poate desfășura în felul următor :

a) Se determină mai întîi curentul care afectează traseul de comutație, pentru care trebuie să se calculeze tensiunea tranzitorie de

restabilire după întreruperea acestuia. Pentru un curent sinusoidal, transformata Laplace a acestuia se poate pune sub forma generală :

$$\mathfrak{L}(i) = \frac{E}{Z(p)} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \tag{8}$$

în care E reprezintă amplitudinea tensiunii de fază a rețelei și $Z(p)$ acea parte a impedanței care este străbătută de curentul de rupere.

În cazul scurtcircuitelor este valabilă, cu aproximație suficientă, relația :

$$Z(p) = pL_t \tag{9}$$

unde L_t este inductanța totală a circuitului scurtcircuitat.

b) Se determină operatorul de impedanță al rețelei deconectate și se formează produsul corespunzător ecuației (1), scrisă sub forma operațională :

$$\mathfrak{L}(u) = Z(p)\, \mathfrak{L}(i) \tag{1'}$$

Acest produs se descompune în fracții parțiale, după regulile calculului operațional, ținînd seama că :

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A}{p - p_2} + \ldots + \frac{B_1 + C_1 p}{p^2 + 2\delta_1 p + \nu_1^2} + \frac{B_2 + C_2 p}{p_2 + 2\delta_2 p + \nu_2^2} + \ldots$$

în care $\delta_K^2 < \nu_K^2$

După cum rezultă de aici, nu este necesar ca toate rădăcinile numitorului să fie reale ; unele dintre ele pot fi imaginare sau complexe.

De remarcat că polinomul de la numitor are numai coeficienți reali, ceea ce înseamnă că dacă el admite rădăcini complexe, acestea trebuie să fie conjugate.

c) După descompunerea fracției (9) în fracții parțiale, acestora li se poate aplica transformata Laplace. Diferitele fracții parțiale pot fi, de cele mai multe ori, transformate imaginare, a căror sumare reprezintă variația tensiunii tranzitorii de restabilirire studiată.

Aplicarea metodei se va face la întreruperea diferitelor tipuri de scurtcircuite, care pot avea loc în rețelele electrice. Ea are avantajul că determinarea constantelor de integrare pe baza condițiilor inițiale, în cazul circuitelor care vor fi studiate, este inutilă.

3. Calculul tensiunii tranzitorii de restabilire în cazul unui scurtcircuit trifazat

Întreruperea circuitelor electrice cu ajutorul întreruptoarelor nu se produce simultan pe toate trei fazele. Din această cauză, există o repartiție inegală a energiilor de întrerupere pe polii întreruptorului [5], [6], care are drept consecință imediată solicitarea mare sau foarte mare a unuia din poli. Solicitările depind de etapa întreruperii sau stingerii ar-

culuí electric în polii întreruptorului și, în general, ele sînt maxime pentru polul care întrerupe primul. Există însă și situații în care polul care întrerupe în etapa a doua sau a treia este cel mai solicitat [6], [7], [8].

În cazul întreruperii unui scurtcircuit trifazat fără punere la pămînt, întreruperea se va produce în două etape, ceea ce corespunde unui aspect fizic bine determinat [5], [6], [7], [8]. Polul care întrerupe primul este cel mai solicitat, în timp ce ceilalți doi poli, care întrerup simultan, sînt mai puțin solicitați.

3.1. *Întreruperea primului pol*

Rețeaua care este considerată în acest caz este prezentată în fig. 5 a. La întreruperea primei faze, schema echivalentă corespunzătoare, care trebuie studiată, corespunde fig. 5 b, în care se observă că inductanța de legare la pămînt a neutrului transformatorului, L_N, face legătură în punte între două divizoare de tensiune, unul inductiv și celălalt capacitiv, care au același raport de divizare. Punctele legate prin linie întreruptă au același potențial, iar inductanța de legare la pămînt a neutrului transformatorului nu este străbătută de nici un curent.

Trebuie menționat însă că acest lucru este valabil numai cînd scurtcircuitul are loc la bornele întreruptoarelor sau foarte aproape de acestea, cînd capacitatea față de pămînt a sectorului de rețea cuprins între locul defectului și întreruptor are o valoare neglijabil de mică. Această condiție este îndeplinită totdeauna în cazul unui defect trifazat într-o stație de transformare, însă nu este îndeplinită în cazul unui defect kilometric, care poate avea loc pe o linie de energie la o distanță de cel mult 10 km de întreruptor.

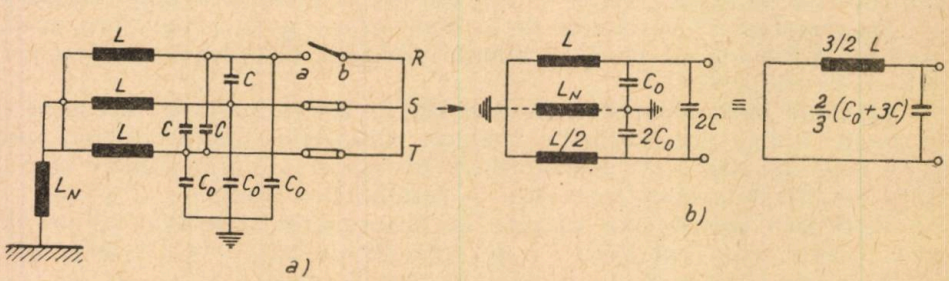


Fig. 5

a — Schema inițială. *b* — Schema echivalentă. *c.* — Schema echivalentă finală.

Schema echivalentă prezentată în fig. 5 b are o singură frecvență proprie de oscilație, determinată de constantele totale ale schemei echivalente finale, prezentată în fig. 5 c, pentru care se poate scrie că :

$$Z(p) = \frac{3}{2} L\nu^2 \frac{p}{p^2 + \nu^2} \tag{10}$$

unde

$$\nu^2 = \frac{1}{\frac{3}{2}L \cdot \frac{2}{3}(C_0 + 3C)} = \frac{1}{LC_b} \tag{11}$$

este pulsația proprie a rețelei și

$$C_b = C_0 + 3C$$

capacitatea de lucru.

Curentul de scurtcircuit în faza întreruptă este sinusoidal, adică

$$i_1 = \frac{E}{\omega L} \sin \omega t$$

sau

$$\mathfrak{L}(i_1) = \frac{E}{\omega L} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{E}{L} \frac{1}{p^2 + \omega^2} \tag{12}$$

Ținînd seama de expresiile (10) și (12) se determină :

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{3}{2} E \frac{\nu^2}{p^2 + \nu^2} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{13}$$

al cărei original este :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{3}{2} E \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2} (\cos \omega t - \cos \nu t) \tag{14}$$

Relația (14) se poate simplifica, dacă se consideră că fenomenul tranzitoriu care interesează are loc într-un timp foarte scurt, cînd este valabilă ecuația (2) a curentului de rupere. În acest caz se obține :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) \cong \frac{3}{2} E(1 - \cos \nu t) = U_r(1 - \cos \nu t) \tag{14'}$$

Primul factor al expresiei (14') reprezintă amplitudinea tensiunii de restabilire de frecvență industrială. Cel de-al doilea factor este determinat de regimul de oscilație la înaltă frecvență. Valoarea maximă a expresiei (14') este :

$$[\mathfrak{L}^{-1}(u)]_{max} = 2U_r = 3E \tag{14''}$$

adică tensiunea tranzitorie de restabilire a polului care stinge primul arcul electric, ținînd seama și de influența fazelor rămase conectate, este egală cu de trei ori tensiunea pe fază.

3.2. *Întreruperea ultimelor două faze*

Întreruperea ultimelor două faze se face simultan. Curentul de întrerupere, în această etapă, este determinat de relația

$$i_{2,3} = \frac{\sqrt{3}\,E}{2\omega L} \sin \omega t = \frac{U}{2\omega L} \sin \omega t \tag{15}$$

a cărei transformată Laplace este :

$$\mathfrak{L}(i_{2,3}) = \frac{U}{2\omega L} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{U}{2L} \frac{1}{p^2 + \omega^2} \tag{15'}$$

Schema echivalentă a întreruperii are aceeași frecvență proprie de oscilație ca și în cazul prezentat la § 3.1.

Într-adevăr, se poate constata ușor că schema echivalentă prezentată în fig. 5 b, în care partea superioară reprezintă faza în care a avut loc mai întîi întreruperea, iar partea inferioară celelalte două faze puse în paralel este identică cu cea din fig. 6.

Astfel, fără a ține seama că punctul neutru este sau nu pus la pămînt, punctele legate prin linie întreruptă au același potențial, iar cele două circuite, care reprezintă tocmai stadiile de întrerupere, au aceleași frecvențe proprii de oscilație.

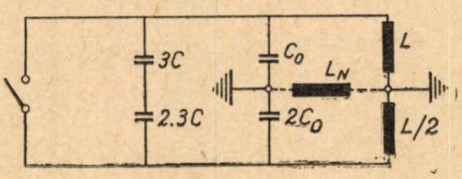


Fig. 6

Impedanța operațională a celui de-al doilea circuit văzută de la borne este dată de expresia :

$$Z(p) = Lv^2 \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{16}$$

iar tensiunea tranzitorie de restabilire rezultă din produsul ecuațiilor (15') cu 16), adică :

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\sqrt{3}\,E}{2} \frac{v^2}{p^2 + v^2} \frac{p}{p^2 + v^2} \tag{17}$$

Originalul ecuației operaționale (17) este de forma (14), adică

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{\sqrt{3}\,E}{2} (\cos \omega t - \cos vt) \tag{18}$$

sau, dacă se consideră condițiile de simplificare de la § 3.1. :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{\sqrt{3}\,E}{2} (1 - \cos vt) \tag{19}$$

Rezultă că tensiunea de restabilire pentru fiecare pol al întreruperii în etapa 2 este mai mică decît cea care solicită polul 1, deși pulsația proprie de oscilație este aceeași.

4. Calculul tensiunii tranzitorii de restabilire în cazul unui scurtcircuit trifazat cu punere la pămînt

În acest caz întreruperea scurtcircuitului se poate efectua în trei etape. Eforturile corespunzătoare, care afectează polii întreruptorului, sînt diferite, depinzînd de schema echivalentă de oscilație și de curentul de întrerupere. Cele trei etape ale întreruperii vor fi considerate în ordinea de succesiune a fazelor.

4.1. *Întreruperea primului pol*

Schema echivalentă corespunzătoare întreruperii primei faze este dată în fig. 7, pentru care se poate scrie că :

$$Z(p) = L_t \nu_e^2 \frac{p}{p^2 + \nu_e^2} = \frac{3}{2} L \frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{2}} \nu_e^2 \frac{p}{p^2 + \nu_e^2} \qquad (20)$$

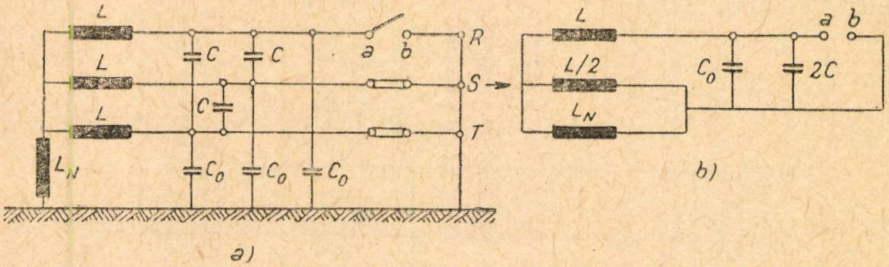


Fig. 7
a — Schema inițială. *b* — Schema echivalentă.

în care s-au introdus următoarele notații :

$$L_t = L + \frac{L \cdot L_N}{L + 2L_N} = \frac{3}{2} L \frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{2}}$$

$$L_N = \frac{L_0 - L}{3}$$

$$\nu_e = \frac{1}{\sqrt{L_t C_t}}; \quad C_t = C_0 + 2C; \quad \lambda = \frac{L_0}{L}$$

Curentul de scurtcircuit fiind de forma (12), rezultă că

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{3}{2} E \frac{\lambda}{\lambda + \frac{1}{2}} \frac{\nu_e^2}{p^2 + \nu_e^2} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \tag{21}$$

al cărei original este dat de o relație de forma (14), în care intervin constantele fizice corespunzătoare schemei echivalente studiate, adică :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{3}{2} E \frac{\lambda}{\frac{1}{2} + \lambda} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\nu_e}\right)^2} (\cos \omega t - \cos \nu_e t) \tag{22}$$

Expresia (22) se poate simplifica în cadrul aceleași condiții expuse în § 3.1. și se obține :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = E \frac{\lambda}{\frac{1}{2} + \lambda} (1 - \cos \nu_e t) \tag{22'}$$

Dacă se consideră că neutrul rețelei este legat la pământ printr-o inductanță pură, adică diferența unghiurilor $\varphi - \varphi_0 = 0$ și că $\frac{\omega}{\nu_e} \ll 1$, atunci valoarea factorului

$$U_r = \frac{3}{2} E \frac{\lambda}{\frac{1}{2} + \lambda} \tag{23}$$

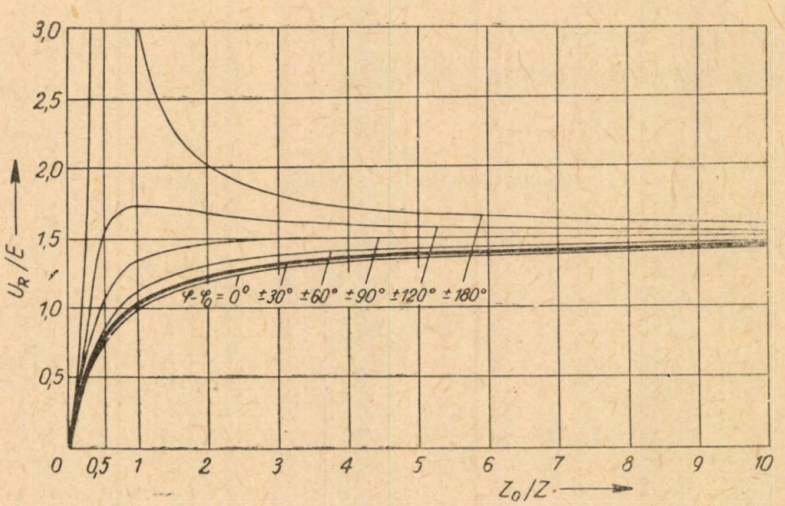


Fig. 8

a — Schema inițială. *b* — Schema echivalentă.

care reprezintă tensiunea de restabilire de frecvență industrială este totdeauna mai mică decît $1{,}5\,E$, iar pentru $\lambda \to \infty$ $U_r \to \frac{3}{2} E$.

Pentru orice alte decalaje $\varphi - \varphi_0 = 0$, variația tensiunii de restabilire la frecvență industrială are loc ca în fig. 8.

Peste curbele reprezentate în fig. 8 se suprapune oscilația de înaltă frecvență.

4.2. *Întreruperea polului al doilea*

După întreruperea primului pol se poate considera că rețeaua este afectată de un scurtcircuit bifazat cu punere la pămînt. În această ipoteză, la deconectarea polului 2 și ținînd seama de toate elementele rețelei, schema echivalentă care se obține [4] este cea din fig. 9 b, pentru care impedanța operațională are valoarea :

$$Z(p) = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{C_b}\,\frac{1}{p^2 + \nu^2} + \frac{3}{C_b + 2C_0}\,\frac{1}{p^2 + \nu_1^2}\right) \tag{24}$$

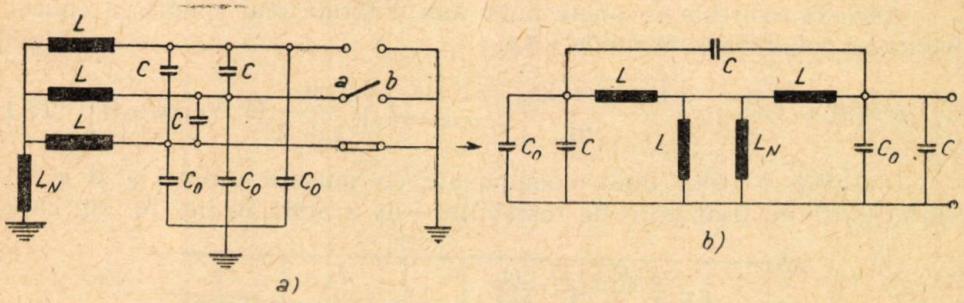


Fig. 9

a — Schema inițială. b — Schema echivalentă.

în care capacitatea C_b și pulsația proprie ν corespund semnificațiilor anterioare, iar pulsația proprie ν_1 are valoarea :

$$\nu_1 = \nu \sqrt{\frac{\lambda + 2}{\lambda\left(1 + 2 \cdot \frac{C_0}{C_b}\right)}} \tag{25}$$

Curentul de rupere al polului 2 este dat de relația :

$$i_{k2} = \frac{E\sqrt{3}}{\omega L}\,\frac{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}}{1 + 2\lambda}\,\sin \omega t \tag{26}$$

iar transformata Laplace a acestuia :

$$\mathfrak{L}\,(i_{k2}) = \frac{\sqrt{3}\,E}{L}\,\frac{\sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}}{1 + 2\lambda} \cdot \frac{1}{p^2 + \omega^2} \tag{26'}$$

Tensiunea tranzitorie de restabilire corespunde produsului celor două expresii (24) și (26') care, prin transformări, se poate pune sub forma :

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{\sqrt{3}\,E}{2}\,\frac{\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}}{1+2\lambda}\left[\frac{\nu^2}{p^2+\nu^2}+\frac{3\lambda}{\lambda+2}\cdot\frac{\nu_e^2}{p^2+\nu_e^2}\right]\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad (27)$$

Originalul ultimei ecuații este de aceeași formă (14), cu observația că are două pulsații proprii, adică :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{\sqrt{3}\,E}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}}{1+2\lambda}\left[\frac{\cos\omega t-\cos\nu t}{1-\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2}+\frac{3\lambda}{\lambda+2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\cos\omega t-\cos\nu_1 t}{1-\left(\frac{\omega}{\nu_1}\right)^2}\right] \qquad (28)$$

Această expresie se poate pune sub o formă mai simplă în cadrul acelorași condiții prevăzute la § 3.1. :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{\sqrt{3}\,E}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+\lambda+\lambda^2}}{1+2\lambda}\left(1-\cos\nu t+\frac{3\lambda}{\lambda+2}\,(1-\cos\nu_1 t)\right) \qquad (28')$$

Contribuția celor două componente de pulsații proprii ν și ν_1 la curba tensiunii tranzitorii de restabilire este arătată în fig. 10, din care

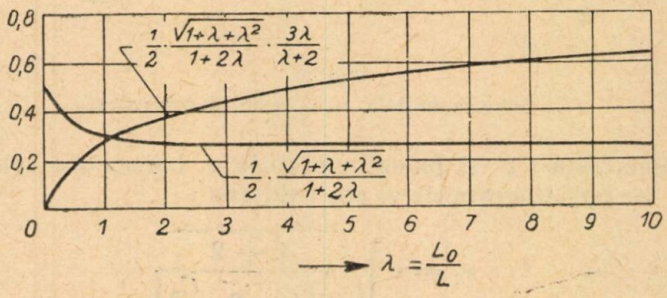


Fig. 10

se observă că influența lor se manifestă în sens invers, adică prima scade repede către o valoare egală cu 0,25 pentru $\lambda\to\infty$, iar cea de-a doua crește.

4.3. *Întreruperea polului 3*

Întreruperea ultimului pol corespunde unui scurtcircuit monofazat, considerînd celelalte două faze întrerupte conform schemei echivalente dată în fig. 11.

Impedanța operațională a schemei echivalente dată în fig. 11 b are expresia :

$$Z(p) = \frac{p}{3}\left(\frac{2}{C_b}\,\frac{1}{p^2+\nu^2} + \frac{1}{C_0}\,\frac{1}{p^2+\nu_0^2}\right) \tag{29}$$

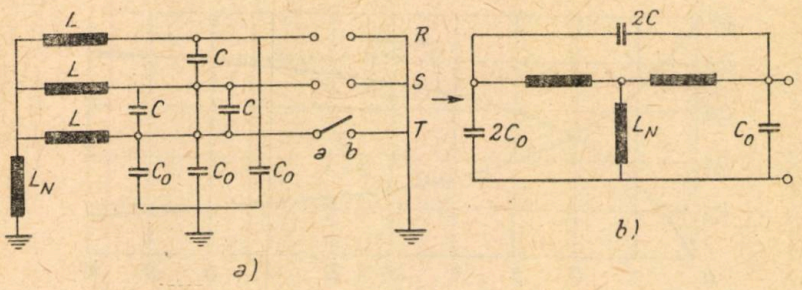


Fig. 11

a — Sahema inițială. b — Schema echivalentă.

unde

$$\nu_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \tag{30}$$

Curentul de rupere al polului 3 este dat de relația :

$$i_{k3} = \frac{E}{\omega L}\,\frac{3}{2+\lambda}\sin\omega t \tag{31}$$

sau

$$\mathfrak{L}(i_{k3}) = \frac{E}{L}\,\frac{3}{2+\lambda}\,\frac{1}{p^2+\omega^2} \tag{31'}$$

Tensiunea tranzitorie de restabilire care rezultă este de forma :

$$\mathfrak{L}(u) = \frac{E}{2+\lambda}\left[2\frac{\nu^2}{p^2+\nu^2} + \lambda\,\frac{\nu_0^2}{p^2+\nu_0^2}\right]\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2} \tag{32}$$

al cărei original este

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = \frac{E}{2+\lambda}\left[\frac{2(\cos\omega t - \cos\nu t)}{1-\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2} + \frac{\lambda(\cos\omega t - \cos\nu_0 t)}{1-\left(\frac{\omega}{\nu_0}\right)^2}\right] \tag{33}$$

care, în cadrul aceleiași condiții prevăzute la § 3.1, se poate pune sub o formă mai simplă :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = E\cdot\left[1 - \frac{2}{2+\lambda}\cos\nu t - \frac{\lambda}{2+\lambda}\cos\nu_0 t\right] \tag{33'}$$

Se observă că și în acest caz tensiunea tranzitorie de restabilire are două pulsații proprii. Una este determinată de inductanța și capacitatea de lucru a rețelei, L și C_b, iar cealaltă este determinată numai de elementele de legare la pământ a neutrului rețelei.

Contribuția celor două componente la valoarea tensiunii tranzitorii de restabilire este arătată în fig. 12.

Din această figură se observă că variația influenței celor două componente asupra curbei tensiunii tranzitorii de restabilire în funcție de parametrul λ are loc în sens invers, adică prima descrește și tinde

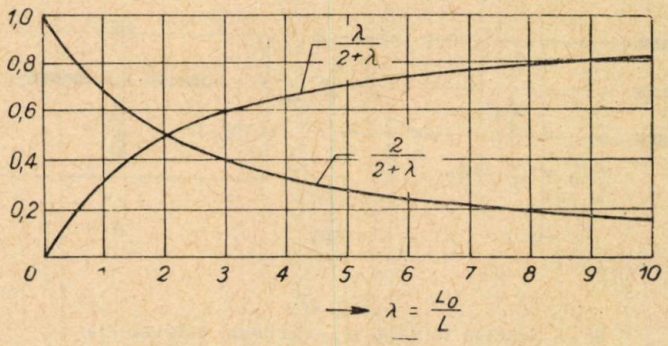


Fig. 12

asimptotic către valoarea zero pentru $\lambda \to \infty$, în timp ce a doua crește și tinde asimptotic către valoarea 1 pentru $\lambda \to \infty$.

5. Calculul tensiunii tranzitorii de restabilire în cazul unei puneri la pământ

Cazul studiat la § 4.3. poate fi particularizat, dacă se consideră un raport λ mare. La baza calculelor se va considera schema echivalentă dată în fig. 13, în care s-au neglijat inductanța L a rețelei și capacitatea C între faze.

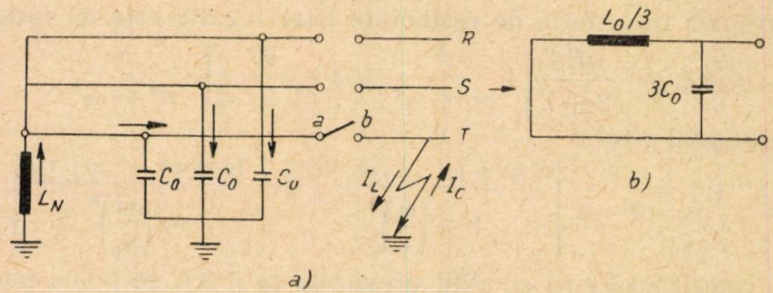


Fig. 13
a — Schema inițială. b — Schema echivalentă.

Impedanța operațională a schemei echivalente din fig. 13 b rezultă imediat :

$$Z(p) = \frac{1}{3C_0} \frac{p}{p^2 + \nu_0^2} \tag{34}$$

Curentul de punere la pământ care circulă prin conductorul afectat de defect are valoarea :

$$i_k = \frac{E}{\omega L_0}\left[1 - 3\left(\frac{\omega}{\nu_0}\right)^2\right] \sin \omega t = -\, 3EC_0\omega \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\omega}\right)^2\right] \sin \omega t \qquad (35)$$

sau

$$\mathfrak{L}(i_k) = \frac{3E}{L_0}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{\omega}{\nu_0^2}\right)^2\right] \frac{1}{p^2 + \omega^2} = -\, 3EC_0\omega \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\omega}\right)^2\right] \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \qquad (36)$$

Tensiunea tranzitorie de restabilire are o singură frecvență proprie și rezultă din produsul ecuațiilor (34) și (36). Originalul ei este de forma (14),
adică

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = E\,(\cos \omega t - \cos \nu_0 t) \qquad (37)$$

sau sub formă simplificată :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = E\,(1 - \cos \nu_0 t) \qquad (37')$$

Se observă că expresiile (37) sau (37') se pot determina și din relațiile (33) sau (33'), dacă se admite $\lambda \gg 2$.

Pulsația proprie, ν_0, a schemei echivalente reprezentată în fig. 13 b, se poate determina în funcție de pulsația industrială și factorul de dezacord al rețelei [1]). Aceasta are valoarea

$$\nu_0 = \omega \sqrt{1 - k} \qquad (38)$$

iar în cazul unui dezacord destul de mic, relația (38) se explicitează sub forma :

$$\nu_0 \simeq \omega\left(1 - \frac{k}{2}\right) \qquad (38')$$

Factorul de dezacord al rețelei

$$k = 1 - \left(\frac{\nu_0}{\omega}\right)^2 \qquad (39)$$

poate varia în funcție de pulsația proprie a sistemului de legare la pământ a neutrului, a cărei valoare $\nu_0 \gtrless \omega$ indică faptul că rețeaua este supracompensată, subcompensată sau compensată total ($\nu_0 = \omega$).

Ținînd seama de pulsația proprie ν_0, exprimată prin relația (38'), tensiunea tranzitorie de restabilire exprimată prin relațiile (37) sau (37') devine :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = E\left[\left(1 - \cos \omega \frac{k}{2} t\right) \cos \omega t - \sin \omega t \cdot \sin \frac{\omega k}{2} t\right] \qquad (37'')$$

[1]) Factorul de dezacord al unei rețele se definește ca fiind raportul între curentul de punere la pământ și curentul capacitiv necompensat.

sau sub formă simplificată :

$$\mathfrak{L}^{-1}(u) = E\left[1 = \cos\omega t \cos\frac{\omega k}{2} t - \sin\omega t \sin\omega\frac{k}{2} t\right] \qquad (37''')$$

Pentru un dezacord k=—0,1, în fig. 14 s-a reprezentat [4] variația tensiunii tranzitorii de restabilire dată de ecuația (37″). Din această fi-

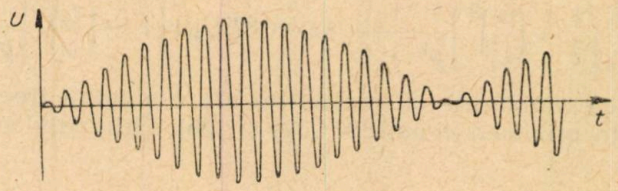


Fig. 14

gură se poate constata că aceasta oscilează, prin interferență, destul de lent. Pentru această solicitare redusă din punctul de vedere al vitezei de creștere a tensiunii tranzitorii de restabilire, se poate stinge singur chiar și un arc electric care arde liber.

6. Concluzii

Din studiul efectuat rezultă că solicitările întreruptoarelor la întreruperea circuitelor electrice depind de tipul de scurtcircuit care le afectează și de etapa întreruperii.

a) În cazul unui scurtcircuit trifazat fără punere la pământ, tensiunea tranzitorie de restabilire este de trei ori mai mare decît tensiunea nominală pe fază a rețelei, indiferent de modul de legare la pământ a neutrului acesteia.

b) Întreruperea celorlalte două faze se face simultan, cu o pulsație proprie egală cu cea din prima etapă a întreruperii. Totuși tensiunea tranzitorie de restabilire care afectează fiecare pol este mult mai mică decît în primul caz.

c) Dacă defectul care afectează rețeaua este pus la pământ, întreruperea acestuia se poate efectua în două sau trei etape. Polii întreruptorului vor fi solicitați în mod diferit, atît ca amplitudine a tensiunii tranzitorii de restabilire, cît și ca pulsație proprie de oscilație.

d) Dacă neutrul rețelei este legat la pământ, în cazul scurtcircuitelor cu punere la pământ, tensiunea tranzitorie de restabilire și pulsația ei proprie de oscilație sînt funcție de parametrul $\lambda = \frac{L_0}{L}$. Cînd $\lambda \to \infty$, condițiile întreruperii se apropie de cele determinate pentru un scurtcircuit fără punere la pământ.

e) Întreruperea polului 3, în cazul deconectării unui scurtcircuit trifazat cu punere la pământ, se face în aceleași condiții ca și în cazul

unei puneri la pământ, dacă se presupune $\lambda \gg 2$. În acest ultim caz solicitarea este redusă din punctul de vedere al vitezei de creștere a tensiunii tranzitorii de restabilire, ceea ce conduce la stingeri rapide ale arcului electric.

Catedra de rețele electrice
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Bercovici M. și Iacobescu Gh.* Tensiunea tranzitorie de restabilire, factor important în alegerea întreruptoarelor din sistemele electroenergetice — Energetica nr. 2, 1967.
2. *Fourmarier P.* a) Méthode experimentale nouvelle de détermination de la tension de rétablissement — CIGRÉ 1950, rapp. 117.
b) La détermination des fréquences des réseaux — Bull. Montefiore 63—1950.
3. *Mortlock R. J., A. C. Switchgear* — A Survey of Requiriments vol. I — Cap. 8 — 1956.
4. *Slamecka Ernest.* Prüfung von Hochspannungs — Leistungsschaltern — Cap. 6 — 1966.
5. *Rüdenberg R.* Fenomene tranzitorii în sistemele electroenergetice — Cap. 41 — 1955.
6. *Bercovici M. și Iacobescu Gh.* Influența rețelei asupra puterii de rupere a întreruptoarelor la deconectarea scurtcircuitelor trifazate — St. și cerc. de Energ. și Electr. nr. 2 — Acad. R.S.R. — 1967.
7. *Iacobescu Gh.* Solicitările întreruptoarelor la deconectarea scurtcircuitelor trifazate complexe din rețele ieșite din sincronism — Energetica nr. 10 — 1966.
8. *Vogelsanger E.* Untersuchung der grössten Ströme und Spanungen, die einen Leitungsschalter in einem Einphasen — oder Mehrphasennetz bei der Ausschaltung von Kurzschlüssen beauspruchen können — CIGRE — 1946 — Rapp. 119.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

MAȘINI TERMICE

C.Z. : 621.431 : 621.43.06 : 621.43.01 : 621.43.043

CU PRIVIRE LA EFECTUL TERMIC AL RECIRCULĂRII GAZELOR EVACUATE LA MOTORUL CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE *

B. GRÜNWALD, N. APOSTOLESCU

1. *Avantajele recirculării gazelor evacuate.*

Prin recircularea gazelor evacuate se înțelege prelevarea unei fracțiuni din gazele evacuate și reintroducerea ei în cilindru, împreună cu încărcătura proaspătă.

Procedeul de recirculare atrage după sine, evident, impurificarea încărcăturii proaspete cu gaze de ardere și creșterea temperaturii acesteia. Întrucît în motorul cu aprindere prin comprimare se utilizează excese importante de aer, gradul de impurificare a încărcăturii proaspete este atenuat de prezența unei fracțiuni de aer în gazele de ardere recirculate.

Recircularea gazelor evacuate influențează procesul de ardere pe două căi : pe cale termică și cinetică. Aceste efecte se manifestă atît în faza întîrzierii la aprindere, cît și în fazele arderii propriu-zise. În faza întîrzierii la aprindere, recircularea modifică viteza de vaporizare a combustibilului (întîrzierea fizică la aprindere) precum și viteza reacțiilor chimice premergătoare aprinderii (întîrzierea chimică). În fazele arderii propriu-zise, recircularea antrenează modificări asupra mecanismelor de reacție și asupra corelației dintre ele.

În ceea ce privește efectul termic, ar putea fi menționate mai multe avantaje.

Este cunoscută tendința de sporire a puterii litrice a motorului prin mărirea turației. La motoarele cu aprindere prin comprimare, creșterea turației pretinde utilizarea unor rapoarte de comprimare ridicate și a unor combustibili cu cifră cetanică superioară, pentru limitarea vitezei de creștere a presiunii și a duratei totale a arderii. Astfel, motoarele Mitsubishi Nippon 4 DPl și Peugeot-Indenor TMD 4-85, care funcționează la turațiile nominale de 4400 rot/min și respectiv 4000 rot/min, au raportul de comprimare egal cu 21. Ambele procedee atrag însă dezavantaje. Mărirea raportului de comprimare conduce la creșterea forțelor de presiune, ceea ce impune, în general, sporirea grosimii pereților organelor motorului ; se obține astfel creșterea greutății motorului și tot-

* Material predat la redacție la 20 aprilie 1967.

odată, mărirea forțelor de inerție. Pe de altă parte, sporirea cifrei cetanice ridică un ansamblu de probleme cu aspect economic. În fine, trebuie menționat că cele două căi clasice au un caracter limitat. Aplicarea procedeului de recirculare a gazelor evacuate, ca mijloc de control al întîrzierii la autoaprindere, permite obținerea unor efecte similare, fără dezavantajele pe care le antrenează mărirea raportului de comprimare. Ca urmare, procedeul de recirculare se poate substitui, sau poate fi asociat procedeelor precedente.

Motoarele cu cameră de ardere unitară manifestă o dependență puternică față de proprietățile fizico-chimice ale combustibilului, care influențează vaporizarea și ușurința aprinderii. Această dependență se accentuează în condițiile funcționării la temperaturi scăzute (iarna) ; reducerea necesară a viscozității combustibilului se realizează în general prin diluarea motorinei cu petrol lampant, ceea ce reduce cifra cetanică a amestecului. Prin efectul termic al recirculării gazelor evacuate, aceste neajunsuri pot fi eliminate sau atenuate. Sub acest aspect, procedeul se impune cu deosebire în cazul utilizării combustibililor grei, deziderat de mare actualitate.

În fine, recircularea gazelor evacuate poate constitui un procedeu de reducere a duratei de încălzire a motorului după pornire, micșorînd astfel gradul de uzură al motorului, în deosebi în condițiile anotimpului rece.

În cele ce urmează, se studiază efectul termic al recirculării gazelor evacuate, luîndu-se în considerare efectele limitative impuse de necesitatea menținerii unui anumit exces de aer.

2. *Calculul procesului de umplere a cilindrului în condițiile recirculării gazelor evacuate.*

Procedeul de recirculare prezintă interes numai în cazul motoarelor cu aprindere prin comprimare, deoarece acestea utilizează excese mari de aer. De aceea, în cele ce urmează se stabilesc ecuațiile de calcul al procesului de umplere numai pentru acest caz.

2.1. *Parametri caracteristici.*

Pentru calculul procesului de umplere în condiții de recirculare, se adoptă următoarele notații (fig. 1) :

n_{ev} — numărul de kmoli de gaze evacuate ;
n_{ev}^{a} — numărul de kmoli de aer din gazele evacuate ;
n_{ev}^{ga} — numărul de kmoli de gaze de ardere, corespunzătoare aerului teoretic (CO_2, H_2O, N_2), în gazele evacuate ;
n_r — numărul de kmoli de gaze recirculate ;
n_r^a — numărul de kmoli de aer din gazele recirculate ;
n_r^{ga} — numărul de kmoli de gaze de ardere, corespunzătoare aerului teoretic, în gazele recirculate ;
n_f^a — numărul de kmoli de aer proaspăt, aspirat prin filtru ;
n_{as} — numărul de kmoli de încărcătură proaspătă, aspirat în cilindru ;

Sînt evidente următoarele relații de bilanț masic:

$$n_{ev} = n_{ev}^{a} + n_{ev}^{ga}, \tag{1}$$

$$n_r = n_r^{a} + n_r^{ga}, \tag{2}$$

$$n_{as} = n_f^{a} + n_r^{a} + n_r^{ga}. \tag{3}$$

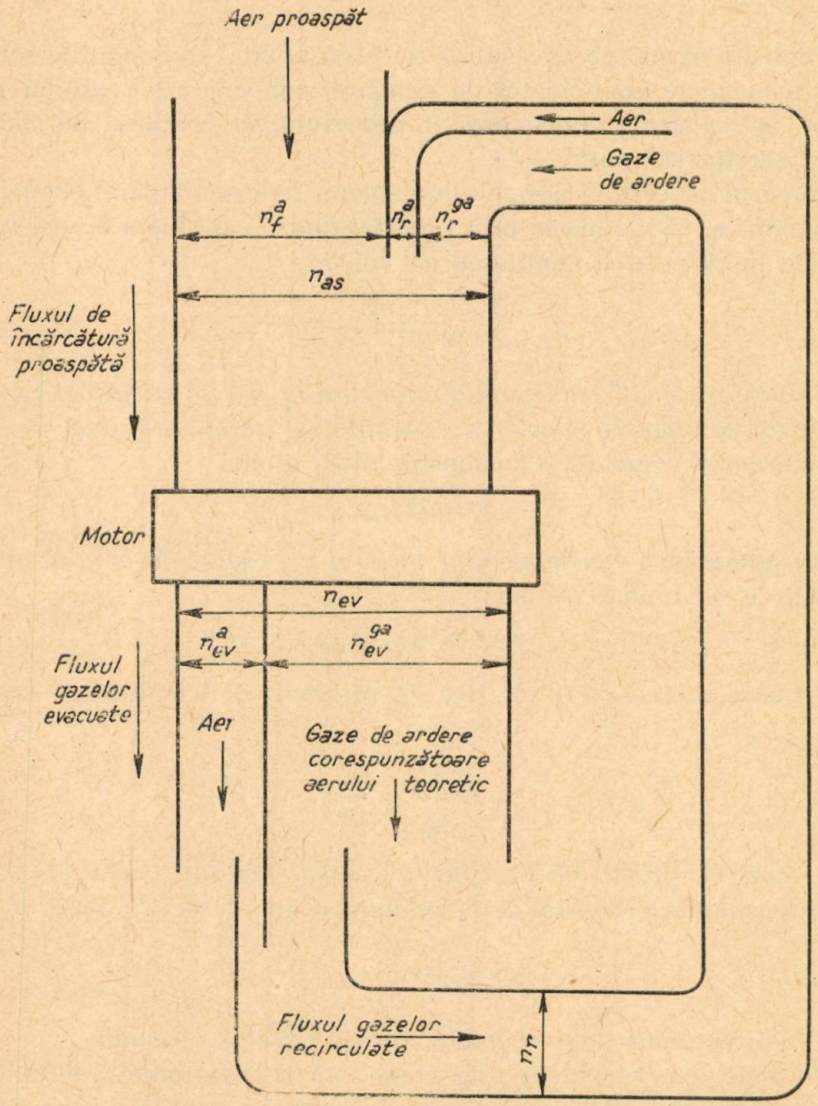


Fig. 1. Schema de bilanț masic a gazelor care evoluează în cilindru.

Eficiența procesului de umplere se caracterizează, ca și în cazul procesului normal de umplere, prin coeficientul de umplere η_v^r, care se definește prin raportul dintre cantitatea totală de aer $(n_f^a + n_r^a)$ disponibilă în cilindru în condiții de recirculare, și cantitatea de aer (n_0), care ar umple cilindrul în condiții inițiale de stare,

$$\eta_v^r = \frac{n_f^a + n_r^a}{n_0} \cdot \tag{4}$$

Pentru a evidenția excesul de aerul disponibil în condițiile recirculării, se compară coeficientul de umplere, corespunzător cazului recirculării, η_v^r cu acela corespunzător procesului de umplere normală (la aceiași sarcină și turație), η_v^n.

În cazul procesului normal de umplere, fără recirculare, coeficientul de umplere η_v^n se definește prin raportul dintre cantitatea de aer n_f^n disponibilă în cilindru și cantitatea n_0, adică

$$\eta_v^n = \frac{n_f^n}{n_0} \cdot \tag{5}$$

Se notează cu λ^n *coeficientul excesului de aer în condițiile procesului normal de umplere* și cu l_{teor}, cantitatea teoretică de aer necesară pentru arderea completă a combustibilului ; atunci

$$n_f^n = \lambda^n l_{teor} \cdot \tag{6}$$

Se notează cu λ^t *coeficientul total al excesului de aer*, rezultat în condiții de recirculare ; atunci

$$n_f^a + n_r^a = \lambda^t l_{teor} \cdot \tag{7}$$

Pe baza relațiilor (4), (5), (6), (7), raportul coeficienților de umplere va fi

$$m = \frac{\eta_v^r}{\eta_v^n} = \frac{\lambda^t}{\lambda^n}; \tag{8}$$

m se numește *gradul de modificare a coeficientului excesului de aer.*

Intensitatea procesului de recirculare se apreciază prin raportul

$$\varrho_{ev} = \frac{n_r}{n_{ev}},$$

care va fi denumit *grad de recirculare a gazelor evacuate.*

Pe cale experimentală este comod să se determine cantitatea de aer aspirată prin filtru (măsurători de debit) și cantitatea de aer prezentă în gazele recirculate (măsurători de compoziție a gazelor evacuate).

De aceea, este convenabil să se compare cantitatea de aer din gazele recirculate, cu cantitatea de aer aspirată din mediul ambiant. În acest scop se utilizează raportul

$$\varrho_a = \frac{n_r^a}{n_f^a}, \tag{9}$$

numit *grad de aditivare a aerului aspirat prin filtru*. Astfel definit, ϱ_a poate fi determinat pe cale experimentală.

Între gradul de recirculare ϱ_{ev} și gradul de aditivare ϱ_a există o relație de legătură. Întrucît proporția de aer în gazele evacuate este aceeași ca și în gazele recirculate, se poate scrie evident

$$\varrho_{ev} = \frac{n_r}{n_{ev}} = \frac{n_r^a}{n_{ev}^a},$$

sau, pe baza relației (9),

$$\varrho_{ev} = \varrho_a \frac{n_f^a}{n_{ev}^a}.$$

Cantitatea de aer disponibilă în gazele evacuate este evident

$$n_{ev}^a = (\lambda^t - 1)\, l_{teor}. \tag{10}$$

Cu relația (10), gradul de evacuare ϱ_{ev}, devine

$$\varrho_{ev} = \varrho_a \frac{n_f^a}{(\lambda^t - 1)\, l_{teor}}. \tag{11}$$

Din relațiile (4) și (9) rezultă

$$n_f^a = n_0 \frac{\eta_v^r}{1 + \varrho_a}, \tag{12}$$

iar din relațiile (5) și (6) se obține

$$l_{teor} = n_0 \frac{\eta_v^n}{\lambda^n}. \tag{13}$$

Substituind cantitățile n_f^a și l_{teor}, precizate de relațiile (12) și (13) în relația (11), rezultă

$$\varrho_{ev} = \varrho_a \frac{\eta_v^r}{\eta_v^n} \cdot \frac{\lambda^n}{(1 + \varrho_a)(\lambda^t - 1)},$$

sau, cu relația (8),

$$\varrho_{ev} = \varrho_a\, m \frac{\lambda^n}{(1 + \varrho_a)(m\lambda^n - 1)}. \tag{14}$$

Relația (14) prezintă un interes deosebit, deoarece permite evaluarea gradului de recirculare a gazelor evacuate prin măsurători care se efectuează relativ comod.

Întrucît efectele recirculării se urmăresc în raport cu gradul de recirculare a gazelor evacuate, ϱ_{ev} trebuie considerat ca parametru variabil, iar ultima relație se scrie sub forma

$$\varrho_a = \frac{1}{\frac{m\lambda^n}{\varrho_{ev}(m\lambda^n - 1)} - 1}. \tag{15}$$

Dacă arderea are loc cu un dozaj stoichiometric, la aplicarea procedeului de recirculare, evident $\varrho_a = 0$. În acest caz relația (15) își pierde semnificația. Deoarece procedeul de recirculare este interesant numai pentru motoarele cu aprindere prin comprimare, care lucrează întotdeauna cu exces de aer, în continuare, se studiază numai cazurile pentru care $\varrho_a > 0$.

Pentru calculul procesului de umplere este necesar să se definească o noțiune nouă și anume *coeficientul aerului disponibil din gazele arse*, care reprezintă raportul dintre cantitatea de aer din gazele evacuate, către cantitatea de gaze de ardere, corespunzătoare aerului teoretic (CO_2, H_2O, N_2), adică

$$\pi_{ev} = \frac{n_{ev}^a}{n_{ev}^{ga}}. \tag{16}$$

În continuare, se urmărește stabilirea unei relații de calcul convenabile pentru coeficientul π_{ev}.

Cantitatea de gaze de ardere corespunzătoare aerului teoretic, prezentă în gazele evacuate, este suma dintre cantitatea de gaze de ardere, corespunzătoare aerului teoretic, din gazele recirculate, care nu participă la reacția chimică, și cantitatea de gaze de ardere corespunzătoare aerului teoretic, rezultate prin arderea combustibilului,

$$n_{ev}^{ga} = n_r^{ga} + \mu\lambda^t l_{teor} - (\lambda^t - 1) l_{teor}, \tag{17}$$

unde μ este coeficientul de variație molară, iar λ^t excesul de aer. Pe baza relațiilor (10) și (17), relația (16) devine

$$\pi_{ev} = \frac{(\lambda^t - 1) l_{teor}}{n_r^{ga} + l_{teor}[1 + \lambda^t(\mu - 1)]} \tag{18}$$

Relația (16) poate fi scrisă evident și sub forma

$$\pi_{ev} = \frac{n_r^a}{n_r^{ga}}. \tag{19}$$

Pe baza relațiilor (9) și (19) rezultă numărul de kmoli n_r^{ga}

$$n_r^{ga} = n_f^a \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}}; \tag{20}$$

se introduce apoi relația (20) în relația (18) și se explicitează π_{ev}:

$$\pi_{ev} = \frac{(\lambda^t - 1)\, l_{teor} - n_f^a \varrho_a}{l_{teor}\,[1 + \lambda^t (\mu - 1)]}. \tag{21}$$

Din relațiile (7) și (9) rezultă

$$\lambda^t = \frac{n_f^a}{l_{teor}} (1 + \varrho_a),$$

care, substituită în (21), dă

$$\pi_{ev} = \frac{1 - \dfrac{l_{teor}}{n_f^a}}{\dfrac{l_{teor}}{n_f^a} + (1 + \varrho_a)(\mu - 1)}. \tag{22}$$

Din relațiile (12) și (13), prin împărțire, se obține

$$\frac{l_{teor}}{n_f^a} = \frac{\eta_v^n}{\eta_v^r} \cdot \frac{1 + \varrho_a}{\lambda^n},$$

care substituită în relația (22) și avînd în vedere relația (8), dă

$$\pi_{ev} = \frac{m \dfrac{\lambda^n}{1 + \varrho_a} - 1}{1 + m \lambda^n (\mu - 1)}. \tag{23}$$

Se observă că la stabilirea relațiilor de definiție a unor parametri caracteristici, sau a relațiilor de legătură dintre aceștia (relațiile 4, 8, 14, 15, 23), s-a urmărit corelarea lor cu parametri caracteristici corespunzători procesului de umplere normală (fără recirculare), deoarece funcționarea motorului fără recirculare trebue considerată ca element de referință.

2.2. *Calculul procesului de umplere*

Calculul procesului de umplere are ca obiective : 1 — determinarea coeficientului de umplere η_v^r, pentru a aprecia, la un regim de funcționare dat, gradul de modificare al excesului de aer în funcție de gradul de recirculare ; 2 — determinarea temperaturii amestecului la sfîrșitul cursei de admisiune, pentru a aprecia efectul termic al recirculării.

Limitîndu-se numai la aceste două obiective, calculul se bazează pe două ecuații fundamentale și anume : ecuația de bilanț masic și ecuația de bilanț energetic.

La sfîrșitul cursei de admisiune, amestecul din cilindru cuprinde n_{as} kmoli substanță aspirată și n_g kmoli gaze reziduale. Ținînd seama de relația (3), ecuația de bilanț masic ia forma

$$n_f^a + n_r^a + n_r^{ga} + n_g = n_a, \tag{24}$$

unde n_a este numărul de kmoli de substanță la sfîrșitul cursei de admisiune (punctul a, fig. 2).

Numărul de kmoli de gaze reziduale se poate exprima în funcție de coeficientul gazelor γ astfel

$$\gamma = \frac{n_g}{n_f^a + n_r^a},$$

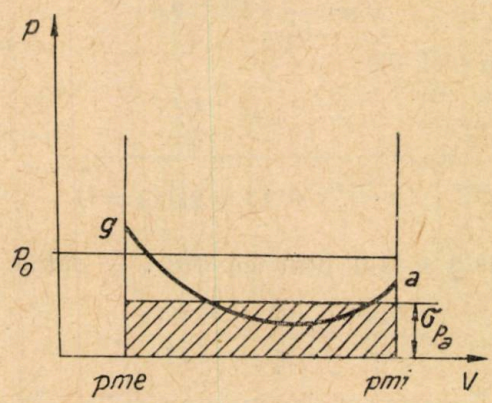


Fig. 2. Variația presiunii în cursa de admisie.

sau, cu relația (9)

$$n_g = n_f^a \gamma (1 + \varrho_a). \tag{25}$$

Numărul de kmoli de substanță n_r^a și n_r^{ga} se precizează cu ajutorul relațiilor (9) și (20) și se obține în final

$$n_f^a [1 + \varrho_a + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} + \gamma (1 + \varrho_a)] = n_a,$$

sau

$$n_f^a \left[(1 + \varrho_a)(1 + \gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} \right] = n_a. \tag{26}$$

Se substituie n_f^a din relația (12) în relația (26) și rezultă

$$n_0 \eta_v^r \left[(1 + \gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}(1 + \varrho_a)} \right] = n_a. \tag{27}$$

Se precizează cantitățile molare n_0 și n_a pe baza ecuațiilor de stare

$$n_0 = \frac{p_0 V_s}{R T_0} \text{ și } n_a = \frac{p_a V_a}{R T_a}, \tag{28}$$

în care V_s este cilindreea, V_a este volumul cilindrului la sfîrșitul cursei de admisiune, p_0 și T_0 parametrii de stare ai mediului ambiant iar p_a și

T_a parametrii de stare la sfîrșitul cursei de admisiune (punctul a). Ținînd seama că $V_a/V_s = \varepsilon/(\varepsilon-1)$ și substituind relațiile (28) în relația (27), rezultă expresia de calcul pentru temperatura T_a.

$$T_a = T_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{p_a}{p_0} \cdot \frac{1}{\eta_v^r \left[(1+\gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}(1+\varrho_a)} \right]} \cdot \tag{29}$$

Se observă că, dacă gradul de aditivare a aerului ϱ_a este nul, se regăsește formula cunoscută pentru determinarea temperaturii în condițiile procesului normal de umplere.

Dacă se substituie în relația (29) coeficientul aerului disponibil în gazele arse π_{ev} din relația (23), se obține temperatura T_a în funcție de gradul de aditivare a aerului, ceea ce este mai convenabil pentru calcul

$$T_a = T_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{p_a}{p_0} \cdot \frac{1}{\eta_v^r \left\{ (1+\gamma) + \frac{\varrho_a [1 + m\lambda^n (\mu - 1)]}{m\lambda^n - (1+\varrho_a)} \right\}} \cdot \tag{30}$$

Ecuația bilanțului energetic se scrie sub forma

$$n_f^a i_f^a + n_r^a i_r^a + n_r^{ga} i_r^{ga} + \Delta Q_p + n_g u_g = n_a u_a + AL_{ga}, \tag{31}$$

unde

$n_f^a i_f^a$ — este entalpia aerului proaspăt aspirat prin filtru ;

$n_r^a i_r^a$ — entalpia aerului din gazele recirculate ;

$n_r^{ga} i_r^{ga}$ — entalpia gazelor de ardere, corespunzătoare aerului teoretic, în gazele recirculate ;

ΔQ_p — căldura cedată de pereți amestecului aspirat ;

$n_g u_g$ — energia internă a gazelor reziduale ;

$n_a u_a$ — energia internă a amestecului la sfîrșitul cursei de admisiune ;

AL_{ga} — lucrul mecanic cedat de amestecul aspirat în cursa de admisiune.

Se menționează că încălzirea aerului proaspăt aspirat prin filtru, care se realizează prin amestecarea cu gazele recirculate, depășește cu mult efectul similar care se obține prin contactul cu pereții ; ca urmare se poate simplifica ecuația (31), considerînd $\Delta Q_p = 0$.

Lucrul mecanic L_{ga} (reprezentat în fig. 2 prin aria de sub curba g_a) poate fi exprimat prin produsul $\sigma p_a V_s$, unde σp_a este presiunea medie în cursa de admisiune. Substituind numărul de kmoli din relațiile (9), (20), (25), (26), în relația (31), se obține

$$n_f^a \left[i_f^a + \varrho_a i_r^a + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} i_r^{ga} + \gamma (1+\varrho_a) u_g \right] =$$

$$= n_f^a \left[(1+\varrho_a)(1+\gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} \right] u_a + A \sigma p_a V_s .$$

Se grupează convenabil termenii ecuației după simplificarea cu n_f^a

$$i_f^a + \varrho_a i_r^a + \gamma(1+\varrho_a) u_g = \frac{A \sigma p_a V_s}{n_f^a} +$$

$$+ \left[(1+\varrho_a)(1+\gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}}\right] u_a - \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} i_r^{ga}.$$

Substituind pe π_{ev} din relația (23), rezultă

$$\left[(1+\varrho_a)(1+\gamma) + \frac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\dfrac{\lambda^n}{1+\varrho_a} - 1}\right] u_a$$

$$- \frac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\dfrac{\lambda^n}{1+\varrho_a} - 1} i_r^{ga} + \frac{A\sigma p_a V_s}{n_f^a} = E, \tag{32}$$

unde

$$E = i_f^a + \varrho_a i_r^a + \gamma(1+\varrho_a) u_g.$$

Folosind relațiile (12) și (28), se obține

$$\frac{A\sigma p_a V_s}{n_f^a} = 1{,}986\,\sigma \frac{p_a}{p_0} T_0 \frac{1+\varrho_a}{\eta_v^r},$$

iar relația (32) devine

$$\left[(1+\varrho_a)(1+\gamma) + \frac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\dfrac{\lambda^n}{1+\varrho_a} - 1}\right] u_a - \frac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\dfrac{\lambda^n}{1+\varrho_a} - 1} i_r^{ga} +$$

$$+ 1{,}986\,\sigma \frac{p_a}{p_0} T_0 \frac{1+\varrho_a}{\eta_v^r} = E. \tag{33}$$

Relațiile (30) și (33) formează un sistem de două ecuații, care descrie procesul de umplere în ipotezele admise, și care conține ca necunoscute temperatura T_a și coeficientul de umplere η_v^r, sau gradul de modificare a coeficientului excesului de aer m.

Sistemul de ecuații se rezolvă după cum urmează.

În ipoteza variației liniare a căldurilor specifice cu temperatura, energia internă a amestecului la sfîrșitul cursei de admisiune este determinată de relația

$$u_a = C_{va} T_a = (M_a + N_a T_a) T_a. \tag{34}$$

Constantele M_a și N_a se determină în funcție de compoziția amestecului, format din CO_2, H_2O, N_2 și aer, adică

$$n_a = n_{aer} + n_{CO_2} + n_{H_2O} + n_{N_2} = n_f^a \left[(1+\varrho)(1+\gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}}\right], \tag{35}$$

în care

$$n_{aer} = n_f^a (1 + \varrho_a), \tag{36}$$

și

$$n_{CO_2} + n_{H_2O} + n_{N_2} = n_f^a \left[\frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} + \gamma (1 + \varrho_a) \right]. \tag{37}$$

Pentru o compoziție a combustibilului cunoscută — precizată prin participația gravifică c (kgf carbon), h (kgf hidrogen), o (kgf oxigen) — se determină pe baza calculului stoichiometric proporția de CO_2, H_2O, și N_2, în gazele de ardere, rezultate la arderea unui kg de combustibil. Notînd cu π_{CO_2}, π_{H_2O} și π_{N_2} proporțiile corespunzătoare, cantitățile molare care alcătuiesc gazele arse recirculate *), vor fi :

$$\left.\begin{aligned} n_{CO_2} &= \pi_{CO_2} n_f^a \left[\frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} + \gamma (1 + \varrho_a) \right], \\ n_{H_2O} &= \pi_{H_2O} n_f^a \left[\frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} + \gamma (1 + \varrho_a) \right], \\ n_{N_2} &= \pi_{N_2} n_f^a \left[\frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} + \gamma (1 + \varrho_a) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Cu relațiile (35), (36), (37) și (38), căldura specifică a amestecului C_{va} are expresia finală

$$C_{va} = \frac{1}{(1 + \varrho_a)(1 + \gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}}} \left\{ (1 + \varrho_a) C_{v_{aer}} + \left[\gamma (1 + \varrho_a) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [\pi_{CO_2} C_{vCO_2} + \pi_{H_2O} C_{vH_2O} + \pi_{N_2} C_{vN_2}] \right\}. \tag{39}$$

Pe baza relației (39), constantele M_a și N_a din relația (34) au expresia

$$M_a = \frac{1}{(1 + \varrho_a)(1 + \gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}}} \left\{ (1 + \varrho_a) M_{aer} + \left[\gamma (1 + \varrho_a) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [\pi_{CO_2} M_{CO_2} + \pi_{H_2O} M_{H_2O} + \pi_{N_2} M_{N_2}] \right\},$$

$$N_a = \frac{1}{(1 + \varrho_a)(1 + \gamma) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}}} \left\{ (1 + \varrho_a) N_{aer} + \left[\gamma (1 + \varrho_a) + \frac{\varrho_a}{\pi_{ev}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [\pi_{CO_2} N_{CO_2} + \pi_{N_2O} N_{H_2O} + \pi_{N_2} N_{N_2}] \right\},$$

*) Aerul din gazele recirculate este inclus în cantitatea n_{aer}, relația (36).

unde $M_{aer}, M_{CO_2} \ldots, N_{aer}, N_{CO_2} \ldots$, sînt constantele care intră în expresia liniară a căldurilor specifice.

Substituind pe T_a din relația (30) și pe u_a din relația (34) în relația (33) se obține

$$\left[(1+\varrho_a)(1+\gamma)+\frac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\dfrac{\lambda^n}{1+\varrho_a}-1}\right]\left\{M_a\frac{T_0\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\cdot\dfrac{p_a}{p_0}}{\eta_v^r\left[(1+\gamma)+\dfrac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\lambda^n-(1+\varrho_a)}\right]}+\right.$$

$$\left.+N_a\frac{\left(T_0\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\dfrac{p_a}{p_0}\right)^2}{(\eta_v^r)^2\left[(1+\gamma)+\dfrac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\lambda^n-(1+\varrho_a)}\right]^2}\right\}-\frac{\varrho_a[1+m\lambda^n(\mu-1)]}{m\dfrac{\lambda^n}{1+\varrho_a}-1}i_r^{g_a}+$$

$$+1{,}986\,\sigma\frac{p_a}{p_0}T_0\frac{1+\varrho_a}{\eta_v^r}=E\,. \tag{40}$$

Ecuația (40) conține două necunoscute, ϱ_a și η_v^r. În legătură cu soluționarea sa, se fac următoarele observații.

Gradul de aditivare a aerului aspirat ϱ_a este o funcțiune de η_v^r, ϱ_{ev} și λ^n (ecuația (15). Întrucît măsura recirculării gazelor evacuate se exprimă prin ϱ_{ev}, este rațional ca parametrii fundamentali ai procesului de umplere, η_v^r și T_a, să fie exprimați în raport cu acesta. Deoarece eficiența recirculării se cercetează în raport cu procesul normal de umplere, coeficientul excesului de aer λ^n trebuie considerat cunoscut. Astfel, pentru un grad de recirculare dat, ϱ_a devine o funcțiune numai de η_v^r. Soluționarea ecuației (40) se face prin încercări, considerînd η_v^r ca necunoscută; pentru fiecare valoare cu care se efectuează încercarea, valoarea lui ϱ_a se determină din ecuația (15). După stabilirea soluției ecuației (40) — (valoarea η_v^r) — se calculează temperatura T_a cu relația (30).

3. *Studiul efectului termic al recirculării asupra întîrzierii la aprindere*

3.1. *Efectele recirculării asupra procesului de umplere*

Prin recirculare se obține o creștere a temperaturii amestecului la sfîrșitul procesului umplerii și o reducere a cantității de aer disponibil în cilindru, atît prin impurificarea încărcăturii proaspete cu gaze arse, cît și prin încălzirea ei. Întrucît reducerea excesului de aer afectează în continuare desfășurarea arderii în ansamblu și a arderii difuzive în special, se ridică problema limitării gradului de recirculare. Această limitare trebuie să ia în considerare valoarea minimă a excesului de aer la care arderea decurge cu un grad de fum încă admisibil. În consecință, au fost dezvoltate calcule pe baza metodei elaborate, care evidențiază va-

riația temperaturii T_a, a coeficientului de umplere η_v^r și a coeficientului total al excesului de aer λ^t în funcție de gradul de recirculare. Pentru valorile entalpiilor specifice și a energiilor interne specifice s-au folosit tabelele din lucrarea [2].

Pentru comparație s-au considerat două cazuri caracteristice:

a — cazul funcționării motorului cu coeficientul excesului de aer $\lambda^n = 1{,}5$ și b — cazul funcționării motorului cu coeficientul excesului de aer $\lambda^n = 3{,}0$.

Primul caz este ilustrativ pentru motoarele rapide, funcționînd la sarcini ridicate, iar al doilea caz este ilustrativ fie pentru motoarele lente, motoarele de viteze medie sau generatoarele de gaze cu piston, care lucrează în aceleași condiții de sarcină, fie pentru motoarele rapide care lucrează la sarcini parțiale. În concordanță cu cele două cazuri considerate, s-au ales temperaturile gazelor evacuate T_{ev}. Pe baza datelor experimentale (fig. 3), s-a ales pentru $\lambda^n = 1{,}5$ — $T_{ev} = 750°K$, iar pentru $\lambda^n = 3$ — $T_{ev} = 500°K$.

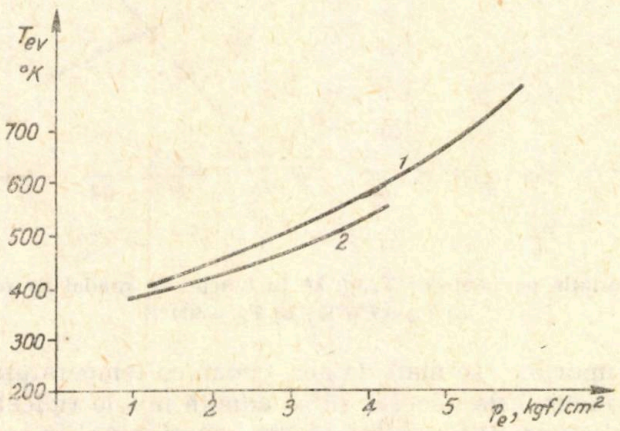


Fig. 3. Variația temperaturii gazelor evacuate cu sarcina motorului: 1) la turația 1500 rot/min. (motor 6 Ci 10,5/13, $P_{en} = 60$ CP); 2) la turația 300 rot/min. (motor 4 DR 30/50, $P_{en} = 400$ CP).

Rezultatele obținute sînt prezentate în fig. 4a,b care corespund celor două cazuri considerate. Gradul de recirculare ϱ_{ev} a fost modificat în primul caz în limite mult mai restrînse, impuse de condiția conservării unui exces de aer; această condiție este mult mai largă pentru al doilea caz.

Se observă că în ambele cazuri temperatura T_a și coeficientul total de exces de aer variază liniar cu ϱ_{ev}. Pentru valori reduse ale gradului de recirculare temperatura T_a înregistrează o creștere rapidă, ceea ce atrage atenția asupra eficacității procedeului de recirculare chiar la valori reduse ale lui ϱ_{ev}.

În cazul unor excese de aer reduse (fig. 4a), gradul de recirculare, trebuie limitat la valori mici, pentru a nu afecta sensibil coeficientul ex-

cesului de aer. Se observă că dacă se acceptă o reducere a lui λ^t cu 13,13% ($\lambda^t = 1{,}3$), gradul de recirculare trebuie să fie de aproape 4%. Este interesant de remarcat că deşi gradul de recirculare are valori atît de reduse, se obţine un efect termic substanţial. Astfel, în condiţiile menţionate, temperatura T_a creşte de la 314°K (temperatura determinată pentru procesul de umplere normală) la 355°K, ceea ce reprezintă 13%.

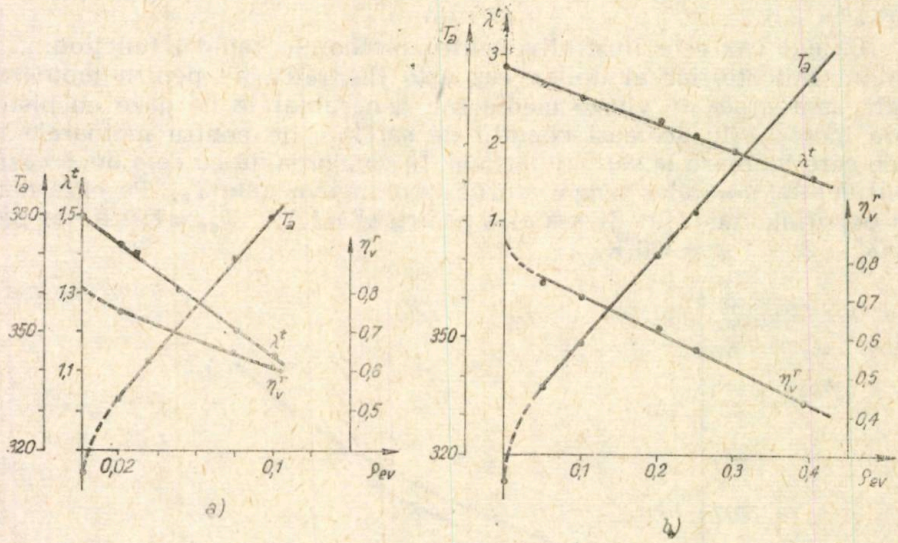


Fig. 4. Variaţia parametrilor T_a, η_v^r, λ^t în funcţie de gradul de recirculare
a) $T_{ev} = 750$°K; b) $T_{ev} = 500$°K

În cazul unor excese mari de aer, deoarece temperatura T_{ev} are un nivel relativ redus, este necesar să se admită nivele ridicate ale gradului de recirculare, pentru a obţine efecte importante. Din cauza valorilor mari ale lui λ^n, această cerinţă poate fi uşor satisfăcută. Astfel, se observă că chiar pentru $\varrho_{ev} = 40\%$, λ^t nu scade sub 1,5. Efectul de temperatură este considerabil : T_a creşte de la 314°K la 418°K, ceea ce reprezintă 33%.

3.2. *Efectele recirculării asupra vaporizării combustibilului*

Ameliorarea vaporizării combustibilului prezintă interes la funcţionarea motorului în anumite condiţii particulare. Astfel funcţionarea cu combustibili mai puţin volatili, sau cu viscozitate ridicată, precum şi funcţionarea pe timp de iarnă antrenează creşterea importantă a duratei de vaporizare. De aceea apare interesant să se evalueze efectul recirculării gazelor evacuate asupra duratei de vaporizare. În acest scop, s-a calculat gradul de vaporizare a unei picături de combustibil, cu un diametru iniţial $d_0 = 20$ μm. Pentru efectuarea calculelor, s-au utilizat formu-

lele lui Vîrubov [3], [4]. Durata vaporizării complete a picăturii, se exprimă prin relația

$$\tau_v = d_0^2 \left[34{,}2 \frac{\gamma_c p_i e^{\frac{B}{T_p}}}{A D_0 T_p} \right],$$

unde γ_c este greutatea specifică a combustibilului (kgf/m³) ;

p_i — presiunea gazelor din cilindru în momentul injecției. (kgf/cm²) ;

T_p — temperatura de echilibru a picăturii în timpul vaporizării (°K);

D_0 — coeficient de difuzie, raportat la gradientul presiunii parțiale, la O°C și 1 ata (m/h) ;

A, B — constante care depind de natura combustibilului.

Temperatura de echilibru a picăturii rezultă din ecuația de bilanț termic :

$$\lambda (T_i - T_p) = D \cdot \Delta i \cdot A e^{-\frac{B}{T_p}},$$

unde λ este coeficientul de conductivitate termică a aerului la temperatura respectivă (kcal/mhgrad) ;

T_i — temperatura gazelor din cilindru în momentul injecției (°K) ;

D — coeficientul de difuzie raportat la gradientul presiunii parțiale, la temperatura de echilibru a picăturii T_p și presiunea gazelor p_i ,

$$D = D_0 \frac{T_p}{273 p_i};$$

Δi — creșterea totală de entalpie a picăturii (kcal/kgf).

Calculele au fost efectuate pentru doi combustibili de volatilitate diferită, cărora le corespund constantele fizice din tabela 1 [4].

Tabela 1

Natura combustibilului	γ_c, kgf/m³	D_0, m/h	A, kgf/m²	B, °K
combustibil 1	850	$0{,}121.10^{-4}$	6.10^7	$4{,}15.10^3$
combustibil 2	900	$0{,}140.10^{-4}$	$2{,}76.10^7$	$3{,}97.10^3$

Temperatura T_i , în momentul injecției, a fost calculată considerîndu-se evoluția de comprimare drept politropă, de exponent 1,38, pentru un raport de comprimare $\varepsilon = 15$ și un avans la injecție de 20°RAC. În fig. 5a se arată rezultatele calculelor. În abscisă s-a reprezentat temperatura T_a la începutul cursei de comprimare ; pe axe orizontale supli-

mentare s-a indicat valoarea echivalentă a gradului de recirculare, care determină temperaturile T_a, pentru cele două cazuri considerate ($\lambda^n = 1{,}5$—$T_{ev} = 750°K$ și $\lambda^n = 3{,}0$—$T_{ev} = 500°K$). În ordonată s-au reprezentat temperatura T_i la începutul injecției și temperatura T_p, de echilibru a picăturii ; pe o axă verticală suplimentară s-a indicat durata de vaporizare τ_v. Se observă că creșterea gradului de recirculare antrenează o reducere masivă a duratei de vaporizare, pentru ambii combustibili utilizați.

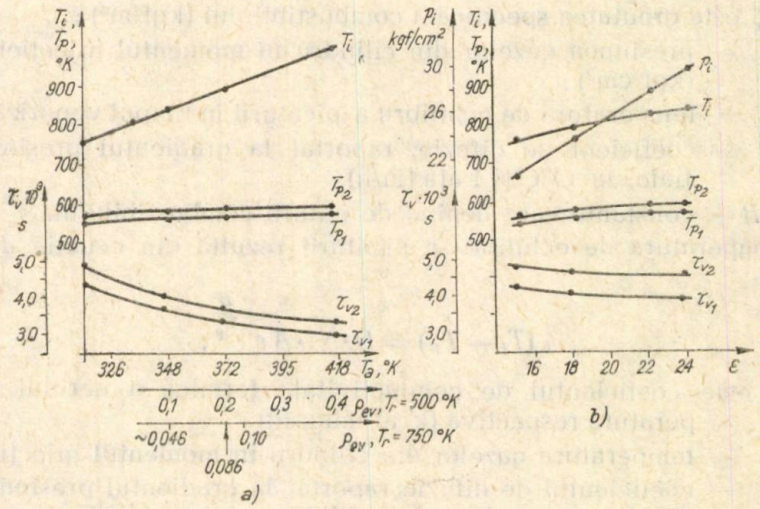


Fig. 5. Variația parametrilor T_i, T_p, τ_v în funcție de : *a)* temperatura de admisie și gradul de recirculare : *b)* raportul de comprimare.

Pentru a aprecia eficiența procedeului de recirculare, s-a considerat interesant să se compare duratele de vaporizare, cu cele care ar rezulta ducere masivă a duratei de vaporizare, pentru ambii combustibili utiplere normal.

Rezultatele calculelor (fig. 5b) subliniază eficiența superioară a procedeului de recirculare. Astfel, la utilizarea combustibilului 1, pentru $\varepsilon = 15$ și $\varrho_{ev} = 0$, durata de vaporizare a unor picături cu diametrul de 20 μm este de 4,30 ms ; dacă se mărește raportul de comprimare la 24, pentru $\varrho_{ev} = 0$, durata de vaporizare scade la 3,87 ms. Aceleași rezultate pot fi obținute prin aplicarea procedeului de recirculare, fără schimbarea raportului de comprimare ($\varepsilon = 15$). În condițiile $\lambda^n = 1{,}5$ și $T_{ev} = 750°K$, este suficient un grad de recirculare de 3%, ceea ce micșorează coeficientul excesului de aer numai cu 6%, adică $\lambda^n = 1{,}4$; în condițiile $\lambda^n = 3{,}0$ și $T_{ev} = 500°K$, este suficient un grad de recirculare de 5%, ceea ce conduce la o reducere a lui λ^t pînă la 2,75. În ceea ce privește condițiile funcționale caracterizate prin $\lambda^n = 3{,}0$ și $T_{ev} = 500°K$, se remarcă posibilitatea reducerii mult mai importante a excesului de aer, pînă la limita de fum acceptabil. Ca urmare, în acest caz pot fi admise grade de recirculare cu

mult mai mari ; pentru $\varrho_{ev} = 30\%$, durata de vaporizare scade la 3,1 ms, deci cu 28%. Pentru a obține rezultate echivalente prin mărirea raportului de comprimare, ar fi necesar să se ajungă la valori inacceptabile, de 35—40 unități.

Efecte similare se obțin și în cazul combustibilului greu. Astfel, la utilizarea combustibilului 2, pentru a obține o durată de vaporizare de 4,3 ms, este necesar să se recicleze circa 5% din gazele evacuate (pentru $\lambda^n = 3{,}0$ și $T_{ev} = 500°K$) sau să se mărească raportul de comprimare mult peste valoarea de 24.

Efectul modest obținut pe calea măririi raportului de comprimare se explică prin efectele contrarii pe care le exercită creșterea presiunii și temperaturii asupra duratei de vaporizare. În schimb, recircularea este extrem de eficientă, oferind în plus avantajul important al menținerii unui nivel redus al presiunilor maxime.

3.3. *Modificarea întîrzierii la aprindere prin recircularea gazelor evacuate.*

Pentru a pune în evidență efectul recirculării asupra întîrzierii la aprindere, s-au calculat duratele întîrzierii la aprindere în funcție de gradul de recirculare ϱ_{ev}, determinat pentru cele două condiții de calcul precizate anterior. Ținînd seama de rezultatele diferite la care conduc formulele publicate în literatura de specialitate, s-a considerat util să se efectueze calculele pe baza a două dintre cele mai răspîndite relații de determinare a întîrzierii la aprindere, care diferă între ele numai prin valorile constantelor :

— formula lui Wolfer [5],

$$\tau_a = 0{,}44 \frac{1}{p_i^{1,19}} \cdot e^{\frac{4650}{T_i}} \cdot 10^{-3},\ s,$$

— formula lui Serbinov [6],

$$\tau_a = 0{,}2 \frac{1}{p_i^{0,4}} \cdot e^{\frac{3200}{T_i}} \cdot 10^{-3},\ s.$$

În ambele cazuri, constantele sînt determinate pentru combustibili Diesel cu proprietăți fizico-chimice apropiate, iar mărimile de stare p_i și T_i au fost determinate pentru momentul începutului injecției, în condițiile precizate în paragraful precedent. Ca și în cazul vaporizării, efectul procedeului de recirculare se compară cu efectul obținut la mărirea raportului de comprimare. De data aceasta comparațiile sînt cu atît mai interesante, cu cît prin mărirea raportului de comprimare se acționează în același sens, atît prin creșterea presiunii cît și prin creșterea temperaturii.

La funcționarea motorului în condițiile $\lambda^n = 1{,}5$ și $T_{ev} = 750°K$, prin recircularea a 5% din gazele evacuate se obține (fig. 6a) o durată a întîrzierii la aprindere după Wolfer, $\tau_a^w = 3{,}0$ ms iar după Serbinov, $\tau_a^s = 2{,}7$ ms, ceea ce echivalează cu o creștere a raportului de compri-

mare (fig. 6b) pînă la $\varepsilon = 19{,}6$ (calculat după Wolfer) şi $\varepsilon = 19{,}2$ (calculat după Serbinov). Dacă se admite un grad de recirculare $\varrho_{ev} = 25\%$, în condiţiile $\lambda^n = 3$ şi $T_{ev} = 500°K$, creşterea echivalentă a raportului, de comprimare trebuie să fie de 9 unităţi calculat după Wolfer şi circa 15 unităţi, calculat după Serbinov.

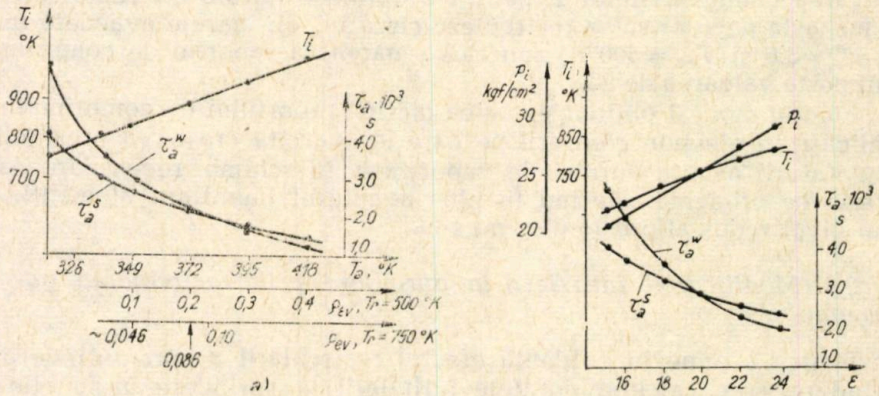


Fig. 6. Variaţia parametrilor T_i, p_i, τ_a^w, τ_a^s în funcţie de: *a)* temperatura de admisie şi gradul de recirculare; *b)* raportul de comprimare.

4. *Concluzii.*

1. În lucrare s-a elaborat o metodă de calcul care permite determinarea efectului de recirculare a gazelor evacuate asupra coeficientului de umplere şi a temperaturii gazelor la sfîrşitul cursei de admisie.

2. Calculele efectuate evidenţiază eficienţa recirculării gazelor evacuate ca metodă de control a vitezei de vaporizare a combustibilului şi a duratei de întîrziere la aprindere, în limitele impuse de menţinerea nivelului excesului de aer la valori raţionale.

3. Comparînd rezultatele obţinute prin recirculare cu cele care se obţin prin mărirea raportului de comprimare se observă:

a. pentru motoarele rapide, care lucrează cu excese mici de aer, un grad redus de recirculare (3—5%) echivalează cu o creştere importantă a raportului de comprimare (4—6 unităţi), obiecţionabilă sub aspectul creşterii greutăţii şi forţelor de inerţie ale organelor mecanismului motor.

b. pentru motoarele lente şi de viteză medie care lucrează cu excese de aer ridicate, se pot reduce prin recirculare exigenţele faţă de calităţile de vaporizare şi aprindere ale combustibilului.

Este de aşteptat ca recircularea gazelor evacuate să modifice cinetica reacţiilor chimice, ceea ce trebuie cercetat pe cale teoretico-experimentală.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *Bărănescu G., Soare M., Teodorescu L., Vasilescu C. A.* — O metodă pentru îmbunătățirea funcționării motoarelor cu aprindere prin compresie la sarcini reduse. În: „Studii și cercetări de energetică", 1959, 4, p. 603—622.

2. *Bărănescu G.* — Calculul proceselor de ardere. București, Ed. Academiei R.S.R., 1955.

3. *Vîrubov D. N.* — O metodike rasciota isparenia topliva. În culeg: Dvigateli vnutrennego sgorania. Moskva, Maşghiz, 1954, Nr. 25, p. 20—34.

4. *Vîrubov D. N.* — Smeseobrazovanie v dvigateliah Dizelia. În culeg: „Rabocie proțessî dvigatelei vnutrennego sgorania". Moskva, Maşghiz, 1946.

5. *Wolfer H.* — Le retard à l'allumage dans le moteur Diesel. In: „Revue technique Sulzer", nr. 3, pag. 1—11.

6. *Serbinov, I.* — Roli fiziceschih i himiceschih prosessov pri samovosplamenenii raspîlennîh jidchih topliv. In culeg: „Sgoranie v transportnîh porşnevîh dvigateliah". Moskva., Izd. Akad. Nauk SSSR, 1951.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 5

ELECTRONICĂ

C.Z. : 621.385 : 621.314.7 : 621.375

THE STABILITY OF THE NEGATIVE IMPEDANCE CONVERTERS *

MIRCEA PETRESCU

One of the most important problems resulting from the practical use of various types of negatives impedance converts — obtained with the help of some positive feedback amplifiers — is the stability of their working. The present work will briefly examine the causes that may lead to the instability of the circuits containing negative impedance converters.

The analysis of the shunt and series variants of impedance sign conversion performed in (1) shows that the presence of parasite elements of the amplifier used for carrying out the converter (input impedance having a finite value and output impedance differing from zero) causes the appearance at the converter input of a supplementary negative impedance, irrespective of its working frequency. In the input circuit there is a negative impedance directly proportional to the output impedance (Z_e) of the amplifier used in the case of the shunt type converter (Fig. 1 a), while in case of the series type converter (Fig. 1 b) there is a negative impedance directly proportional to the input impedance (Z_i) of the amplifier. Besides it, if the sign of certain capacities and inductances is modified in the field of high frequencies — where the open circuit amplifier modulus and phase are dependent on frequency — at the converter input appear supplementary negative resistances (2).

The appearance in the network of certain parasite negative impedances, on the one hand and the incorrect choosing of the raport between the value of the impedance, sign of which is to be converted and the value of the converter load impedance, on the other hand, may result in breaking the stability conditions of the converter — load ensemble. That's why it is important to be established proper correlations between the elements of the impedance sign conversion networks and the load parameters for observing its stability conditions. We point out that „load" means, in this case, output impedance of the circuit where the converter input clamps are connected.

* Manuscris predat la redacție 7 ianuarie 1967.

First of all, let us examine the connection of a shunt type converter with Y_s (Fig. 2) as load admittance. As it is seem, the converter was replaced by its input equivalent circuit, corresponding to the relation expressing the input admittance Y (Fig. 1 a).

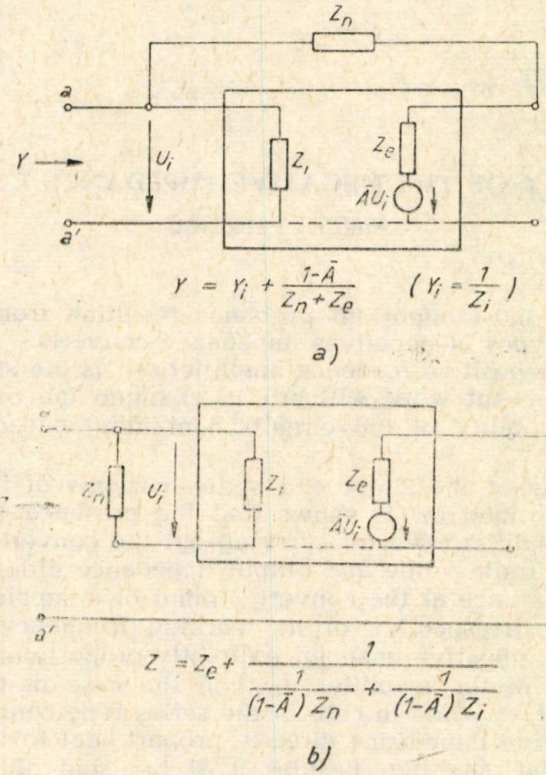


Fig. 1

The stability analysis can be easily carried out with the help of immittance criterion (3). The network represented in Fig. 2 becomes passive and obviously stabile in case of the short circuit of the clamps a a'. That's why making use of the immittance criterion will understand by immittances the converter input admittance, connected between the clamps a and a' and the load admittance, connected between the same clamps. It is rational too, to consider the network part placed to the right of the clamps a a' as being an active dipole of the input admittance Y_a and the network part placed to the left of the clamps a a' — respectively the load — as being a passive dipole of admittance Y_p. The admittances Y_a and Y_p are the following :

$$Y_a = Y = Y_i + \frac{1-\bar{A}}{Z_n+Z_e}, \qquad (1)$$

$$Y_p = Y_s,$$

According to the immitance criterion, the absolute stability of connection of an active dipole of admittance Y_a with a passive dipole of admittance Y_p is secured if the following inequality is complied with:

$$Re\, Y_p + Re\, Y_a > 0, \tag{2}$$

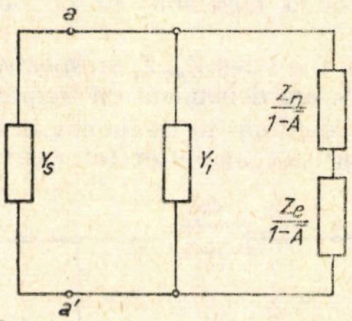


Fig. 2

for frequencies where the following condition is observed :

$$Im\, Y_p + Im\, Y_a = 0. \tag{3}$$

We supposed here that the nature of network containing the admittances Y_a and Y_p is such that the derivative of imaginary part of the total admittance in relation to frequency is positive in the neighbourhood of the stability limit. Under these conditions relation (2) is sufficient to assure the stability of the network [4].

In this case the absolut stability condition is the following :

$$Re\, Y_s + Re\, Y_i + Re\, \frac{1-\bar{A}}{Z_n + Z_e} > 0; \tag{4}$$

the inequality (4) has to be observed for the frequency having satisfied the following relation :

$$Im\, Y_s + Im\, Y_i + Im \frac{1-\bar{A}}{Z_n + Z_e} = 0, \tag{5}$$

Should the connection stability of a series type converter of the load Z_s (Fig. 3) is examined, the immitance criterion has to be applied to impedances. In Fig. 3 the converter was replaced by its input equivalent circuit, corresponding to the input impedance expression Z of Fig. 1 b. The absolute stability conditions is written so :

$$Re\, Z_s + Re\, Z_e + Re \frac{1}{\frac{1}{(1-\bar{A})\, Z_n} + \frac{1}{(1-\bar{A})\, Z_i}} > 0, \tag{6}$$

for

$$Im\, Z_s + Im\, Z_e + Im \frac{1}{\frac{1}{(1-\bar{A})\, Z_n} + \frac{1}{(1-\bar{A})\, Z_i}} = 0. \tag{7}$$

Similarly, (6) is a sufficient condition to maintain the stability of the circuit in Fig. 3 if the derivative in relation to frequency of total reactance of the network is positive about the frequency for which equality (7) is accomplished.

The relations obtained above enable us to chose the circuit elements so that the converter-load ensemble to be stabile at the working frequency wished for.

Generally speaking, the sizes Z_n, Z_i (respectively Y_i), Z_e, $\bar{A}$ — used in the deduced relations, are dependent on frequency. Particularly complex is the variation according to frequency of the sizes Z_i, Z_e and $\bar{A}$ in case of using a transistor amplifier for carryng out the converter.

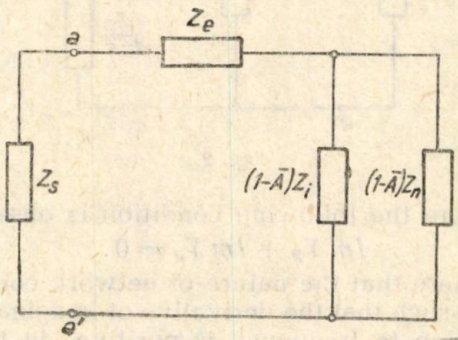


Fig. 3

Therefore the using of the expressions (4), (5), (6), (7) for analysing transistor converter stability raises great calculus difficulties. However, as till now there are no simpler methods of studying the converter stability, the method described above remains the most rational one.

A particular interes offers the analysis of the working stability of converters in the field of low frequencies, where Z_i, Z_e and $\bar{A}$ are real sizes; in this case the relations (4), (5), (6), (7) take a simpler form. At the beginning, let us examine the connection of a shunt type converter with a pure resistive load; we admit that the sign of a resistive impedance is converted too. In this case $Y_s = G_s$, $Z_n = R_n$ and $Y_i = G_i$, $Z_e = R_o$ as it is working at low frequencies. The sizes Y_a and Y_p have the following expression:

$$\gamma_a = G_i + \frac{1-\bar{A}}{R_n + R_0}, \tag{8}$$

$$\gamma_p = G_s.$$

The absolute stability condition in the field of low frequencies is expressed by the following inequality:

$$G_s + G_i + \frac{1-\bar{A}}{R_n + R_0} \geqslant 0. \tag{9}$$

If $\bar{A}=2$ (what corresponds to the appearance at the converter input of a negative resistance, $-Rn$), it becomes so :

$$G_s + G_i \geqslant \frac{1}{R_n + R_0}, \tag{10}$$

where the equality sign corresponds to the stability limit.

We have made above the remark that the ensemble examined here in is obviously stabil in the short circuit situation, that is, when $G_s=\infty$. The same conclusion can be arrived at starting from the last relation too. Since the connection examined herein is frequently used for finite values of the conductance G_s (for instance in case of increasing the quality factor of the resonant circuits) it is rational the equalities (9) and (10) to be examined for finite values given to the sizes G_s and R_n.

The stability margin of the analysed connection depends on the degree of observing the inequality (9). Therefore, the stability margin will be the larger so as G_i and R_o wil take larger values. On the other hand, from conditions of the exact sign impedance conversion [1], results that the sizes G_i and R_o should be of a value as small as possible. Thus we arrive to an important conclusion : the absolute stability condition is contradictory to the condition of the exact sign impedance conversion and therefore the ensuring of an important stability margin involves limitting to a great extent the field of the impedances, sign of which can be correctly converted.

In case of connecting a series type converter to a resistive load ($Z_s=R_s$, $Z_n=R_n$), the absolute stability condition is given by the following inequality (when $\bar{A}=2$) :

$$R_s + R_0 \geqslant \frac{1}{\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_i}}. \tag{11}$$

It results from (11) that the series type converter-resistive load ensemble is obviously stabil in open circuit situation, that is when $R_s=\infty$. The margin satisfying the absolut stability condition will be the larger so as the output resistance of the used amplifier has larger values and the input resistance smaller one, what limits us again to enlarge the field of the exact sign impedance conversion.

In case of converting reactive impedance sign, the stability conditions have another aspect. Let us admit a parallel type converter inverting the sign of a capacitance C_n and at the converter input being connected a positive capacitance C_s. Maintaining the supposition that Z_i, Z_o and $\bar{A}$ are real sizes (it means that the frequency of the possible oscillations is low, what corresponds to large values of the capacitance C_n), we can write the absolute stability condition in the following form :

$$G_i + \frac{(1-\bar{A})\,R_0\,(\omega\,C_n)^2}{1+(\omega\,C_n\,R_0)^2} \geqslant 0, \tag{12}$$

for :

$$\omega C_s + \frac{(1-\bar{A})\omega C_n}{1+(\omega C_n R_0)^2} = 0. \tag{13}$$

From the last equality, when $\bar{A}=2$, we deduce the pulsation of the possible oscillations :

$$\omega = \frac{1}{R_0 C_n}\sqrt{\frac{C_n}{C_s}-1}. \tag{14}$$

Taking into account (14), the stability conditions becomes :

$$G_i \geqslant G_0\left(1-\frac{C_s}{C_n}\right). \tag{15}$$

First of all it is seen that the oscilations are possible only when $C_n > C_s$ (in this case ω from (14) takes a real value). If $C_n < C_s$, the inequality (15) becomes :

$$G_i \geqslant -G_0\left(\frac{C_s}{C_n}-1\right). \tag{16}$$

the last relation being always observed, because $G_i > 0$.

Secondly, the expression (15) show that the stability margin is the larger so as input conductance of the used amplifier is larger and the output conductance smaller. Therefore, in this case too, the absolute stability condition of working of the converter is cotradictory to the conditions of the exact conversion in a wide field of impedance values.

We arrive to the same conclusion if we examine the connection of a series type converter inverting the sign of a capacity with the help of a positive capacity $\left(Z_n = \frac{1}{j\omega C_n}, Z_s = \frac{1}{j\omega C_s}\right)$.

In this case the stability condition is written as follows :

$$R_0 + \frac{1}{1-\bar{A}} \cdot \frac{R_i}{1+(\omega C_n R_0)^2} \geqslant 0, \tag{17}$$

for

$$\frac{1}{\omega C_s} + \frac{1}{1-\bar{A}} \cdot \frac{\omega C_n R_i^2}{1+(\omega C_n R_i)^2} = 0. \tag{18}$$

From (18) we deduce :

$$\omega = \frac{1}{R_i C_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{C_s}{C_n}-1}}. \tag{19}$$

Introducing (19) into (17), the stability condition is expressed by the following inequality :

$$R_0 \geqslant R_i\left(1-\frac{C_n}{C_s}\right). \tag{20}$$

It is easy to understand that for the first three cases which were examined above, the stability conditions (10), (11), (15) are sufficient. In fourth case condition (20) is not sufficient to assure always the stability of operation of the system composed of converter and load impedance. If we suppose that R_l is large enough to accomplish the inequality $(\omega C_n R_l)^2 \gg 1$, restriction (20) is sufficient only if $C_n > C_s$; then the derivative in relation to frequency of total reactance of the network is positive.

The analysis effectuated above obviously points out the close relation between the condition of the exact sign impedance conversion and the stability conditions of the converter-load ensemble. It is worth emphasizing the conclusion that in all events of practical use of the impedance sign converters, it is necessary to look for carrying out a proper compromise ensuring the stability margin necessary to a field of values, as wide as possible, of the impedances, sign of which is to be converted.

Chair of Electron Tubes and Transistors
Polytechnic Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucharest

LITERATURE:

1. *M. Petrescu*, Upravliaemîe immitansî na poluprovodnikovîh priborah, Dizertație, Moscova, MEI, 1963.
2. *M. Petrescu*, Dependența de frecvență a admitanței de intrare a invertoarelor semnului impedanței, Buletinul IPB, Nr. 4, 1967.
3. *A. A. Kulikovskii*, Ustoicivosti aktivnîh liniarizovannîh țepei s usilitelnîmi priborami novîh tipov, Gosenergo izdat, M-L, 1962.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ★ DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT ★ 1883

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREŞTI — c. 6433

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text si se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1968 JUN 9

F 1130

REFERÁLVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

TOMUL XXIX NUMĂRUL 6 ANUL 1967
NOIEMBRIE — DECEMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et apliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu redacția și administrația Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC
„GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ" BUCUREŞTI

TOMUL XXIX — NUMĂRUL 6

NOIEMBRIE — DECEMBRIE

1967

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. Docent *I. Agârbiceanu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. Dr. Docent *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *G. Bărănescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. *M. Bercovici* ; Prof. Dr. Docent *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Acad. Prof. Dr. Docent *E. Carafoli* ; Prof. Dr. *S. Călin* ; Acad. Prof. Dr. Docent *D. Dumitrescu* ; Prof. *S. Gâdea* ; Conf. Dr. *I. Grădișteanu*, Prof. *C. Ionescu-Bujor* ; Prof. Dr. Docent *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *N. Manolescu* ; Prof. *St. Mantea* ; Prof. Dr. *N. Marinescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *C. Nenițescu* ; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *M. Postelnicescu* ; Acad. Prof. Dr. Docent *R. Rădulet* ; Prof. *Al. Rău* ; Prof. *Al. Spătaru* ; Prof. *L. Stoicescu* ; Prof. Dr. Docent *R. Voinea*, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România ; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei Republicii
Socialiste România

OSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

Sumar

MATEMATICA

Po-Fang Hsieh, O. D. Shouse

Reduction of Order of a System of Linear Nonhomogeneous Ordinary Differential Equations 20

Har. P. Ionescu

Metode aproximative pentru integrarea unor ecuații diferențiale . 25

I. M. Miu

Contributions sur les zéros des solutions des certaines équations différentielles 35

A. Tănăsescu, R. Theodorescu

Graphische Lösung der Matrizialspiele von der Grössenordnung 3×n 43

CHIMIE

Gr. Teodorescu

Metodă volumetrică pentru dozarea dimetilaminoetanol în prezență de 2-dietilamino-1 cloretan 55

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

Contribuții la stabilirea condițiilor tehnologice optime în procesul de producere a carbonatului de bariu din baritină 59

I. Ganea, S. Lică

Comportarea electrozilor grafit/O_2 și Pt/O_2 în mediu de acid sulfuric și hidroxid de potasiu 71

HIDRAULICĂ

D. Tașcă, G. Zidaru

Définition du vecteur-vitesse de référence dans les réseaux circulaires de profils, en mouvement plan irrotationnel 79

REZISTENȚA MATERIALELOR

V. Drobotă

Studiul stabilității elastice a grinzilor continue pendulare pentru încărcări oarecare 87

AUTOMATICĂ

S. Florea, I. Dumitrache

Unele probleme privind dinamica sistemelor hidraulice . . . 101

C. I. Nitu

Method for Improving the Performances of Control Systems with Digital Controllers 113

TERMOTEHNICĂ

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

Une caractéristique pour exprimer la qualité du processus frigorifique à absorption ammoniac-eau 121

NOTE

The Republican Conference of Internal Combustion Engines . . 135

Резюме

По-Фанг Хсиех, О. Д. Схоусе Д. К. 517.9

Приведение порядка системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений

В работе „Reduction of Order of a System of Linear Nonhomogeneous Ordinary Differential Equations" авторы разрабатывют более общий случай, когда известно некоторое число линейно независимых решений. Благодаря использованию матрициального расчета достигоют результата менее трудоемким путем.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom XXIX, Nr. 6/1967

Хар. П. Ионеску Д. К. 517.9

Приближенные методы для интегрирования некоторых дифференциальных уравнений

Работа содержит метод для построения приближенного решения линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d_y^2}{d_x^2} + g(x) - \frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = 0.$$

где $g(x)$ и $h(x)$ являются функциями действительной изменяемой, данными и определенными по крайней мере для $x \in [\alpha, \beta]$. Используется характерное свойство частного случая этого уравнения для $g(x) = \frac{a}{x}$, $h(x) = b$, где a и b являются данными постоянными, комбинированными с особенностью, предлагаемой сулчаем $a = 0$, $b \neq 0$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej". Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

И. М. Миу Д. К. 517.9

Относительно нулей решений некоторых дифференциальных уравнений

Применяется теорема автора (1), опубликованная в 1963 г., а именно: С данными:

1. Функция $f(x)$ непрерывная на (a, b) и производимая на (a, b).
2. Функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$ ограниченные и определенные на $(a, b,)$ и непрерывные на $(a, b,)$.

Между двумя последовательными нулями функции $f(x)$ $(a, b,)$ находится по крайней мере один нуль одной из функций:

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x); \varphi(x)$$

С помощью этой теоремы даются два обобщения теоремы Штурма относительно уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и изучается случай, когда уравнение является линейным n-го порядка. С помощью вышеуказанной теоремы изучается также отделение нулей решений системы дифференциальных уравнений, а также перемесения решений этой системы с одной кривой $y = g(x)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Summary

Po-Fang Hsieh, O. D. Shouse D.C. 517.9

The Reduction of Order of a System of Linear Non-homogeneous Ordinary Differential Equations.

In the paper „Reduction of Order of a System of Linear Non-homogeneous Ordinary Differential Equations', the authors are treating the more general case when a certain number of linear independent solutions are known. Due to the utilization of matrix algebra, the result is attained in a fairly easy way.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Har. P. Ionescu D.C. 517.9

Approximate Methods for the Integration of Some Differential Equations.

The paper contains a method for the construction of aproximate solutions for linear differential equations in the form :

$$\frac{d_y^2}{d_x^2} + g(x) - \frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y + 0$$

where $g(x)$ and $h(x)$ are functions of a true variable, given and defined at least for $x \in [\alpha, \beta]$. A caracteristic property of the particular case for this equation is used for $g(x) = \frac{a}{x}$, $h(x) = b$, where a and b are given constants, combined with the particularity offered by the case $a = 0$, $b \neq 0$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

I. M. Miu D.C.517.9

Contributions to the Zeros of Some Differential Equation Solutions.

The author uses his own theoreme [1] published in 1963 ; Being given ;

1. One function $f(x)$ continuous on $[a, b]$ and derivable on (a, b).
2. The functions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ limited and defined by $[a, b]$ and continuous on (a, b).

Between two consecutive zeros of the function $f(x)$ from $[a, b]$, there is at least one zero of one of the functions ;

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; \varphi(x).$$

By means of this theorem two generalizations are given for Sturm's theorem referring to the equation $y'' + py' + qy = 0$ and the case is studied when the equation is linear of n order. With the above theorem, the author studies also the separation of the zeros of the solutions of a system of differential equations, as well as the intersection of the solutions of this system with a curve $y = g(x)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti. Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 518.9

А. Тэнэсеску, Р. Тхеодореску

Графическое решение матрициальных игр $3 \times n$-го порядка

В настоящей работе излагаются четыре графических метода для решения матрициальных игр $3 \times n$-го порядка, которые не основываются только на использование эпюры Монжа, а также и на эпюры геометрии с числовыми отметками либо на модулярные эпюры.

Таким образом, решение задач обладает широким полем действия путем устранения недоступных несовершенств, имея решение с двумя точными десятичными, что для нужд практики представляет большое преимущество по сравнению с алгебрическим методом.

Таким путем в данных примерах были решены матрициальные игры $3 \times n$-го порядка, в которых средний выигрыш является отличным или равным нулю. В этом последнем случае была графически изучена и стратегия противника. определяясь также и в данном предположении частоты p_1, p_2, p_3, стратегий B_1, B_2, B_3 а также и значение игры.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 545.2 : 66.028 : 546.13 : 547.212 : 546.623.26-81

Гр. Теодореску

Обьемный метод дозировки диметиламин этаноля в присутствии двух диэтиламинов и одного хлор этана

В данной заметке установлен метод дозирови указанных веществ, когда они наличествуют. В пробе, содержащеи оба вещества, дозируются два дуэтиламина один хлор этан с азотнокислым серебром. На второй пробе дозируют сумму этих двух веществ с использованием соли Рейнеке в качестве осадочного реактива. После фильтрования осадок растворяется в ацетоне и затем обрабатывается пересыщенным раствором азотнокислого серебра, а остаток титритуют раствором роданистого аммония.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 66.0 : 661.8...622 : 546.431 : 661.844

Б. Мелега, И. Г. Константинеску

К установлению оптимальных технологических условий в процессе производства углекислого бария из барита

Современные способы получения углекислого бария непосредственно из барита характеризуются большой затратой щелочных карбонатов и значительной продолжительностью.

Изучение реакции, лежащей в основе процесса, привело к разработке более рациональной технологии, основанной на применении катализирующих примесей и максимальном использовании особенностей системы в целях ускорения конверсии и уменьшения расхода щелочного карбоната.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

A. Tănăsescu, R. Theodorescu D.C. 518.9

Graphic Solution of Matrix Games of $3\times n$ Order.

In this paper, the authors show four graphic methods for the solution of matrix games of $3\times n$ order, which are based not only upon the utilization of the Monge epure, but also on dimensioned geometry epures or modular epures.

Thus, the solution of the problems has a larger field of action by the removal of inaccessible incidences, obtaining the solution with two exact decimals, which has for practical requirements, a particular advantage compared to the algebraic method.

In the given exemples, the matrix games of $3\times n$ order, in which the average gain is equal to, or different from, zero have been shown in this way. In this latter case, the authors have studied graphically the strategy of the opponent, determining in this hypothesis too, the frequencies p_1, p_2, p_3 of strategies B_1, B_2, B_3, as well as the value of the game.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

DC. 545.2:66.028:546.13:547.212:546.623.26-81

Gr. Teodorescu

Volumetric Method for Dosing Dimethylaminoethanol in the Presence of 2 Diethylamino 1 Chlorethane

The author establishes in the present paper a method of dosing these substances when they are brought together. On one sample containing both substances, 2 diethylamino 1 chloreethane are dosed wilh silver nitrate. The sum of both. substances is dosed on the second sample, the Reinecke salt being used as precipitating reagent. After filtration the precipitate is dissolved with acetone, then treated with silver nitrate solution in excess, the excess being titrated with a solution of ammonium thiocyanate.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.C. 66.0:661.8...622:546.431:661.844

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

Contributions to the Establishment of the Best Technologic Conditions in the Process of Producing Barium Carbonate from Barytine.

The present proceedings to obtain barium carbonate directly from barytine are characterized by a high alkaline carbonate consumption and by the long time it takes.

The study of the reaction on which the process is based has led to the elaboration of a more rational technology, based on the utilization of catalytic additives and the maximum use of the particularities of the system, aiming at accelerating the conversion and reducing the alkali carbonate consumption.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 541.135 : 621.35 : 661 : 666 : 546.226-35 : 546.32-36 : 661.312 : 661.25

И. Ганя, С. Лика

Поведение графитных электродов $(O_2N\ Pt)O_2$ в среде серной кислоты и гидроокиси калия

В работе представлены линии Тафеля для графитного (O_2 электрода, как в кислой, так и в основной средах, сравнительно с линиям Тафеля, установленными для платинового)O_2 электрода в кислой среде Хором (3), а в щелочной среде — авторами настоящей работы.

Были определены потенциалы отдыхаграфитных и платиновых электродов, поляризованных как в кислой, так и в основной средах, и были измерены коротко замыкающие токи.

Выяснено что на поверхности графитных или платиновых электродов не образуются стабильные окиси, а происходит адсорбция кислорода в виде газа.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 532.13 : 512.6 : 533 : 531.1

Д. Ташкэ, Г. Зидару

Определение вектора скорости отсчета в круговых решетках профилей в плоско-потенциальном движении

В отличие от линейных решеток профилей, в которых скоростью расчета является сама асимптотическая скорость, в круговых решетках профилей такой вектор не был определен.

В работе предлагается в качестве скорости отсчета вектор, перпендикулярный на отклоняющую силу, в смысле теоремы Кутта-Жуковского. и выводится математическое выражение, уточняющее, кроме того, и направление.

Результат является общим и может быть распространен на любой вид круговой решетки профилей, изученной любым методом.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 539.3/.4 : 624.023.9 : 624.04 : 624.072.2

В. Дробота

Изучение упругой устойчивости сплошных маятниковых балок для некоторых нагрузок

Рассматривается ряд соотношений, удовлетворяемых в том случае, когда на сплошную маятниковую балку действуют поперечные нагрузки. Данные соотношения, принятые как функциональные уравнения, интегрируются потом, а решения применяется для определения критических нагрузок продольного изгиба в весьма общем виде для различных случаев нагрузки и опоры балки.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.C. 541.135:621.35:661:666:546.226-35:546.32-36:661.312:661.25

I. Ganea, S. Lică

Behaviour of Graphite/O_2 and Pt/O_2 Electrodes in Sulphuric Acid and Potassium Hydroxide Media.

The authors present in the work the Tafel lines for the graphite/O_2 electrode in acid medium, as well as in basic medium, as compared with the Tafel lines determined for the platium/O_2 electrode in acid medium by Hoare [3], and in alkali medium by the authors of this work.

The authors have determined the rest potentials of the polarized graphite and platinum electrodes in acid medium, as well as in basic medium and they have measured the shortcircuit currents.

It results that on the graphite electrodes or the platinum electrode surface no stable oxides, are formed, but the oxigen is adsorbed as gas.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.C. 532.13:512.6:533:531.1

D. Taşcă, G. Zidaru

The Definition of the Reference Speed Vector in Circular Profile Networks, in the Potential Plane Movement.

Unlike the linear profile networks, where the reference speed is the very asymptotic speed, such a vector has not been defined for circular profile networks.

În the paper, the authors suggest, as reference speed the vector which is perpendicular to the deviation force, in terms of the Kutta-Jukovsky theoreme, and they deduce the mathematical expression, specifyng moreover its direction and sense.

The result is fully general and can be extended to any type of circular profile network, studied by any method.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

V. Drobotă D.C. 539.3/.4:624.023.9:624.04:624.072.2

The Study of the Elastic Stability of Pendular Continuous Beams for Some Loadings.

The author shows a series of relations which are satisfied in the case in which a pendular continuous beam is actuated by (transverse) loads. These relations interpreted as functional equations are then integrated, and the solutions are used to determine the critical buckling loads in a very general pattern for various cases of loading and sustaining the beam.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 621-34/-38 : 531.3 : 532 : 621-52 : 621-12 : 621.
375 : 621-82

С. Флоря, И. Думитраке

Вопросы динамики гидравлических систем

В работе изучается гидравлическая система управления, составленная из элемента коробчатого типа и исполнительного поршневого элемента, с учетом главных нелинейностей, появляющихся в работе этой системы. Решение уравнения нелинейной работы системы производится с помощью приспособлений аналогичного расчета.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 621-55.: 621.38 : 621.374 : 621.3.06 : 621.376 :
621.314.7

К. И. Ниту

Метод улучшения показателей автоматических систем с цифровыми регуляторами

В статье описывается новый метод улучшения показателей качества автоматических систем с цифровыми регуляторами, основанный на автоматическом изменении параметров настройки. Для анализа достигнутых результатов применяется метод фазовых координат.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Д. К. 621.1.01 : 662.998 : 621.56/.59 : 546.
171.1 : 661.518

К. Стаматеску, М. Григориу, Т. Дуйку

Качественная характеристика процесса производства холода путем абсорбции в аммиачном растворе

На основе схемы экзергетического баланса устанавливается расчетное соотношение экзергетического коэффициента полезного действия производства холода абсорбциеи.

Установленное соотношение применяется в двух случаях: простой процесс с аммиачным раствором и процесс с аммиачным раствором, улучшенным ректификацией в теплообмене в аммиачном растворе. В каждом случае получается изменение экзергетического коэффициента полезного действия с определенными параметрами, области совместимых процессов и условия для экзергетичесого максима коэффициента полезного действия.

Определяется по одной качественной характеристике для каждого случая и составляются номограммы, применяемые для выбора наилучших параметров для этих процессов.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.C. 621-34/-38:531.3:532:621-52:621-12:621.375:621-82

S. Florea, I. Dumitrache

Problems Concerning the Dynamics of Hydraulic Systems.

The authors study in the paper a hydraulic control system composed of a drawer type element and an execution element provided with a piston, taking into consideration the main nonlinearities occuring in the operation of the system. The solution of the non-linear operation of the system is performed by means of the analogue computation devices.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.C. 621-55:621.38:621.374:621.3.06:621.376:621.314.7

C. Nitu

Method for Improving the Performance of Control Systems with digital controllers.

The author shows a new method for improving the performance of automatic systems with specialized computers, on the basis of the automatic variation of the tuning parameters. In order to analyze the performances obtained, the state — space method is extended.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.C. 621.1.01:662.998:621.56/.59:546.171.1:661.518

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

A Feature of Quality in the Production of Cold Through Absorption in Ammonia Solution.

On the basis of the exergetic balance sheet diagram, the authors establish the calculation relation of the exergetic output of the process of producing cold through absorption.

The established relation is applied to two cases; the simple process with ammonia solution and the process with ammonia solution improved by rectification and heat exchange in the ammonia solution. The result in each case is the variation of the exergetic output with the determining parameters, the ranges of compatible processes and the maximum exergetic output conditions..

The authors determine one feature of quality for each case and elaborate available nomograms for the selection of the best parameters for these processes.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Résumé

Po-Fang Hsieh, O. D. Shouse C.D. 517.9

Réduction de l'ordre d'un système d'équations différentielles linéaires non homogènes

Dans l'ouvrage „Reduction of order of a System of Linear non homogenous Ordinary Differential Equations", les auteurs traitent le cas, plus général, lorsqu'on connaît un certain nombre de solutions linéaires indépendantes. Grâce à l'utilisation du calcul matriciel, on aboutit au résultat par une voie assez peu laborieuse.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Har. P. Ionescu C.D. 517.9

Méthode approximative pour l'intégration de quelques équations différentielles.

L'ouvrage contient une méthode pour la construction de solutions approximatives pour les équations différentielles linéaires de forme ;

$$\frac{d_y^2}{d_x^2} + g\,(x) + \frac{dy}{dx} + h\,(x) \cdot y = 0$$

où $g(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions d'une variable réelle données et définies au moins pour $x \in [\alpha, \beta]$. L'auteur utilise une propriété caractéristique du cas particulier de cette équation, pour $g(x) = \frac{a}{x}$, $h(x) = b$, où a et b sont des constantes données, combinées avec la particularité offerte par le cas $a=0$, $b \neq 0$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

I. M. Miu C.D. 517.9

Contributions sur les zéros des solutions de certaines équations différentielles.

L'auteur utilise un de ses théorèmes [1] publié en 1963 :
Etant données :
1. Une fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b).
2. Les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$, bornées et définies sur $[a, b]$ et continues sur (a, b).
Entre deux zéros consécutifs de la fonction $f(x)$ de $[a, b]$, se trouve au moins un zéro de l'une des fonctions ;

$$\Phi\,(x) = \psi\,(x)\, f\,(x) + \varphi\,(x)\, f'\,(x)\,;\ \varphi\,(x),$$

et les fonctions $\psi\,(x)$, $\varphi(x)$ ont en tout un nombre impair de zéros. A l'aide de ce théorème, l'auteur donne deux généralisations du théorème de Sturm concernant l'équation $y'' + p\,(x)\, y' + q\,(x)\, y = 0$ et il étudie le cas dans lequel l'équation est linéaire de l'ordre n. En même temps, à l'aide des théorèmes précédents, il étudie la séparation des zéros des solutions d'un système d'équations différentielles, et aussi les intersections des solutions de ce système par une courbe $y = g(x)$.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Zusammenfassung

Po-Fang Hsieh, O. D. Shouse D.K. 517.9

Reduktion der Ordnung eines Systems von nichthomogenen linearen Differentialgleichungen.

In der Arbeit "Reduction of Order a System of Linear Nonhomogeneous Ordinary Differential Equations", behandeln die Verfasser den Allgemeinfall, in dem eine gewisse Anzahl von linear unabhängigen Lösungen bekannt sind. Durch die Benützung der Matrixberechnung wird das Ergebnis auf einem mühelosen Weg erhalten.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

Har. P. Ionescu D.K. 517.9

Annähernde Methoden zur Integrierung von Differentialgleichungen.

Die Arbeit enthält eine Methode zur Gestaltung von annähernden Lösungen für die linearen Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{d_y^2}{d_x^2} + g(x) - \frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = 0$$

wo $g(x)$ und $h(x)$ Funktionen gegebener Realveränderlicher und wenigstens für x $[\alpha, \beta]$ bestimmt sind. Es wird eine kennzeichnende Eigenschaft des besonderen Falls dieser Gleichung für $g(x) = \frac{a}{x}$, $h(x) = b$ benütz, wo a und b gegebene Konstante, verbunden mit der durch den Fall $a=0$, $b\neq 0$ gebotenen Eigenheit darstellen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

I. M. Miu D.K. 517.9

Beiträge betreffend die Nullen der Lösungen von Differenzgleichungen.

Es wird ein Satz des Verfassers [1] benützt, der in 1963 veröffentlicht wurde und zwar: Es wurde gegeben:

1. Eine Funktion $f(x)$ kontinuierlich auf $[a, b]$ und ableitbar auf (a, b).
2. Die Funktionen $\psi(x)$, $\varphi(x)$, begrenzt und bestimmt auf $[a, b]$ und unterbrochen auf (a, b).

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullen der Funktion f(x) aus $[a, b]$ wird wenigstens eine Null der nachfolgenden Funktionen festgestellt:

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x); \quad \varphi(x)$$

Mittels dieses Satzes werden zwei Verallgemeinerungen Sturm-Satzes betreffend die Gleichung $y'' + py' + qy = 0$ gegeben und der Fall, in dem die Gleichung linear der Ordnung n ist studiert Gleichzeitig wird mit dem oben angegebenen Satz die Trennung der Nullen aus den Lösungen eines Systems von Differenzgleichungen, sowie auch die Schnitte der Lösungen dieses Systems mit einer Kurve $y=g(x)$ studiert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

A. Tănăsescu, R. Theodorescu C.D. 518.9

La résolution graphique des jeux matriciels de l'ordre $3 \times n$.

Dans cet ouvrage, les auteurs exposent quatre méthodes graphiques pour résoudre les jeux matriciels de l'ordre $3 \times n$ qui ne sont pas fondés seulement sur l'utilisation de l'épure Monge, mais aussi sur des épures de géométrie cotée ou sur des épures modulaires.

De cette manière, la résolution des problèmes a un large champ d'action en écartant les incidences inaccessibles et en obtenant la solution à deux décimales exactes ce qui constitue pour les nécessités de la pratique un avantage particulier par rapport à la méthode algébrique.

Par cette voie, dans les exemples donnés, on a résolu les jeux matriciels de l'ordre $3 \times n$ dans lesquels le gain moyen est égal ou différent de zéro. Dans ce dernier cas, les auteurs ont aussi étudié graphiquement la stratégie de l'adversaire en déterminant, dans cette hypothèse aussi, les fréquences p_1, p_2, p_3 des stratégies B_1, B_2, B_3, ainsi que la valeur du jeu.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 545.2:66.028:546.13:547.212:546.623.26-81

Gr. Teodorescu

Méthodes volumétriques pour le dosage du diméthylaminoéthanol en présence de 2 diéthyl amino 1 chloréthane.

Dans cette note on a établi une méthode de dosage de ces deux substances lorsqu'elles sont mises en présence. Sur un échantillon qui contient les deux substances, on dose 2 diéthylamino 1 chlore éthane avec de l'azotate d'argent. Sur le second échantilon, on dose la somme des deux substances en utilisent comme réactif précipitant le sel Reinecke. Après filtrage, on dissout le précipité avec de l'acéttone et on le traité ensuite avec un excédent de solution d'azotate d'argent; on titre ensuite l'excédent avec une solution de thiocynate d'ammonium.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 66.0:661.8...622:546.431:661.844

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

Contributions à la détérmination des conditions technologiques optima dans le processus de production du carbonate de baryum à partir de la barytine.

Les procédés actuels d'obtention du carbonate de baryum directement de la barytine sont caractérisés par une grande consommation de carbonates alcalins et par une durée appréciable.

L'étude de la réaction qui est à la base du processus a mené à l'élaboration d'une technologie plus rationnelle, bassé sur l'utilisation des additions catalytiques et sur l'utilisation au maximum des particularités du système dans le but d'accélérer la conversation et de réduire la consommation de carbonate alcalin.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

A. Tănăsescu, R. Theodorescu D.K. 518.9

Graphische Lösung der Matrizialspiele von der Grössenordnung 3×n.

In dieser Arbeit werden vier graphische Methoden zur Lösung der Matrizialspiele der $3 \times n$ Ordnung beschrieben, die nicht nur auf den Monge-Zeichenriss, sondern auch auf den Geometrie-Masszeichenriss, oder auf dem Abwandlungszeichenriss beruhen.

Auf diese Art hat die Lösung der Aufgaben durch Beseitigung der unerreichbaren Inzidenzen ein grösseres Wirkungsfeld und man erhält die Lösung mit zwei genauen Dezimalzahlen. Dieses stellt für die Notwendigkeiten der Praxis, in Verhältnis zu der algebrischen Methode, einen besonderen Vorteil vor.

Auf diesem Weg wurden in den gegebenen Beispielen die Matrizialspiele der $3 \times n$ Ordnung in denen der Mittelgewinn gleich, oder verschieden von Null ist gelöst. In diesem letzten Fall wurde auf graphischem Weg auch die Strategie des Gegners studiert und auch in dieser Hypothese die Frequenzen p_1, p_2, p_3 der Strategien B_1, B_2, B_3, sowie auch der Wert des Spieles bestimmt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 545.2:66.028:546.13:547.212:546.623.26-81

Gr. Teodorescu

Volumetrische Methode zur Dosierung des Dimethylaminäthanol in Anwesenheit von 2 Diätilamino 1 Chloräthan.

In vorliegender Notiz wurde eine Dosierungsmethode dieser vorhandenen Stoffe geschaffen. Auf einem Prüfling, der diese zwei Stoffe enthält werden 2 Diäthilamino 1 Chloräthan mit Silbernitrat dosiert. Auf dem zweiten Prüfling wird die Summe der zwei Stoffe dosiert, indem als fällendes Reagens das Reinecke-Salz benützt wird.

Nach der Filtrierung, wird der Niederschlag mit Azeton gelöst und darauf mit Silbernitratlösung-Überschuss behandelt und der Überschuss mit Ammoniumthiozyanatlösung titriert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 66.0:661.8...622:546.431:661.844

B. Melega, I. Gh. Constantinescu

Beiträge zur Bestimmung der optimalen technischen Bedingungen im Herstellungsprozess des Bariumkarbonats aus Baryt.

Die gegenwärtigen Verfahren zur Erlangung des Bariumkarbonats direkt aus Baryt, kennzeichnet sich durch einen grossen Verbrauch an alkalischem Karbonat und die beträchtliche Zeitdauer.

Das Studium der Reaktion, die dem Verfahren zu Grunde liegt, hat zur Ausarbeitung einer rationellen Technologie geführt, die sich auf die Benützung der katalitischen Zusätze und die maximale Anwendung der Eigenheiten des Systems stützt und zur Beschleunigung der Umwandlung und zur Herabsetzung des Verbrauchs an alkalischen Karbonats dient.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 541.135:621.35:661:666:546.226-35:546 32-36:661.312:661.25

I. Ganea, S. Lică

Comportement des électrodes graphite/O_2 et Pt/O_2 en milieu d'acide sulfurique et hydroxide de potassium.

Les auteurs présentent dans l'ouvrage les lignes Tafel pour l'électrode de graphite/O_2, tant en milieu acide qu'en milieu basique, comparativement aux lignes Tafel déterminées pour l'électrode de platine/O_2 en milieu acide par Hoare [3] et en milieu alcalin par les auteurs de cet ouvrage.

Les auteurs ont déterminé les potentiels de repos des électrodes de graphite et de platine polarisés, tant en milieu acide qu'en milieu basique et ils ont mesuré les courants de court-circuit.

Il résulte qu'il ne se forme pas d'oxydes stables sur les surfaces des électrodes de graphite ou de platine, mais que l'oxygène est adsorbé sous forme de gaz.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 532.13:512.6:533:531.1

D. Taşcă, G. Zidaru

Définition du vecteur-vitesse de référence pour les réseaux circulaires de profils dans le mouvement potentiel plan.

À la différence des réseaux linéaires de profils où la vitesse de référence est la vitesse asymptotique, on n'a pas défini un tel vecteur pour les réseaux circulaires de profils.

Dans l'ouvrage, les auteurs proposent en tant que vitesse de référence le vecteur perpendiculaire sur la force déviatrice — dans le sens du théorème Kutta-Joukovsky — et en déduisent l'expression mathématique, précisant en outre la direction et le sens du vecteur.

Le résultat est tout général, pouvant s'étendre à tout réseau circulaire de profils, étudié par n'importe quelle méthode.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 539.3/4:624.023.9:624.04:624.072.2

V. Drobotă

Etude de la stabilité élastique des poutres continues pendulaires pour chargements quelconques.

L'auteur présente une série de relations qui sont satisfaites dans le cas où une poutre continue pendulaire est actionnée par des charges transversales. Ces relations interprétées comme équations fonctionnelles sont ensuite intégrées et les solutions sont utilisées pour la détermination des charges critiques de flambage sous une forme très générale pour divers cas de chargement et d'appui de la poutre.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 541.135:621.35:661:666:546.226-35:546.32-36:661.312:661.25

I. Ganea, S. Lică

Das Benehmen der Graphit —/O_2 und Platinelektroden/O_2 in Schwefelsäure- und Kaliumhydroxydmedium.

In der vorliegenden Arbeit werden die für die Graphitelektrode/O_2 Tafel-Linien sowohl in Säuremedium als auch in basischem Medium, im Vergleich zu den für die Platinenelektrode/O_2 in Säuremedium von Hoare (3) und in Alkalimedium von den Verfassern dieser Arbeit festgestellten Tafel-Linien, dargestellt.

Es wurden die Ruhepotenzialen der polarisierten Graphit- und Platinelektroden, sowohl in Säuremedium, als auch in basischem Medium bestimmt, und die Kurzschlussströme gemessen.

Es ergibt sich dadurch, das sich auf der Oberfläche der Graphit- oder Platinelektrode keine stabile Oxyde bilden, sondern wird das Oxygen als Gase absorbiert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 532.13:512.6:533:531.1

D. Taşcă, G. Zidaru

Erklärung des Vektors Bezugsgeschwindigkeit bei den Profilkreisgitter, in ebener Potentialbewegung.

Zum Unterschied von den linearen Profilgittern, wo die Bezugsgeschwindigkeit die asymptotische Geschwindigkeit ist, wurde solcher Vektor bei Profil-Kreisgitter bis jetzt nicht bestimmt.

In der Arbeit wird der senkrechte Vektor auf die abweichende Kraft, im Sinne des Kutta-Jukowskische-Satzes vorgeschlagen; auch wird es der mathematische Ausdruck gefolgert und ausserdem ihr Richtung und der Sinn festgestellt.

Das Ergebnis ist ganz allgemein und kann auf jede Art der kreisförmigen Profilgitter erweitert werden, die durch jede Methode studiert werden können.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 539.3/.4:624.023.9:624.04:624.072.2

V. Drobotă

Studium der elastischen Stabilität der kontinuierlichen Pendelbalken für gewisse Ladungen.

Es wird eine Reihe von Verhältnissen augeführt, die im Fall eines von Querbelastungen angetriebenen kontinuierlichen Pendelbalken erfüllt werden. Diese Verhälnisse sind als Funktionsgleichungen ausgelegt, werden nachfolgend integriert und die Lösungen werden in einer allgemeinen Form für verschiedene Fälle der Verladung und Auflagerung der Balken zur Bestimmung kritischen Knickungsbelastung benützt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 621-34/-38:531.3:532:621-52:621-12:621.375:621-82

S. Florea, I. Dumitrache

Problèmes concernant la dynamique des systèmes hydrauliques.

Dans l'ouvrage, les auteurs étudient un système de commande hydraulique formé par un élément de type tiroir et un élément d'éxécution à piston tenant compte des principales non-linéarités qui apparaissent dans le fonctionnement de ce système. L'équation de fonctionnement non-linéaire du système est résolue à l'aide des dispositifs de calcul analogique.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 621-55:621.38:621.374:621.3.06:621.376:621.314.7

C. I. Nitu

Méthode pour l'amélioration des performances des systèmes automatiques à calculateurs spécialisés.

L'auteur présente une nouvelle méthode pour l'amélioration des performances des systèmes automatiques des paramètres d'accord Pour l'analyse des performances obtenues l'auteur utilise la méthode à l'espace des états.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

C.D. 621.1.01:662.998:621.56/.59:546.171.1:661.518

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

Une caractéristique pour exprimer la qualité du processus frigorifique á absorption ammoniac-eau.

A partir du schéma de bilan éxergétique, on établit la relation de calcul du rendement exergétique du processus de production du froid par absorption.

On applique la relation déterminée à deux cas : le processus à solution ammoniacale, simple, et le processus à solution ammoniacale amélioré par rectification et échange de chaleur entre les solutions ammoniac-eau. Il résulte, dans chaque cas, la variation du rendement exergétique avec les paramètres déterminants, les domaines des processus compatibles et les conditions pour un maximum de rendement éxergétique.

On définit une charactéristique de qualité pour chacun des cas et on établit des nomogrammes utilisables pour le choix des paramètres optima pour ces processus.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 621-34/-38:531.3:532:621-52:621-12:621.375:621-82

S. Florea, I. Dumitrache

Über die Dynamik der hydraulischen Systeme.

In der Arbeit wird ein hydraulisches Schaltsystem studiert, das aus einem Element vom Schieber-Typ und einem Ausführungselement mit Kolben besteht und unter Berücksichtigung der Hauptnichtlinearitäten die in der Anwendung dieses Systems auftreten. Die Auflösung der nichtlinearen Betriebsgleichung des Systems wird mittels der analogen Berechnungsvorrichtungen durchgeführt.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 621-55:621.38:621.374:621.3.06:621.376:621.314.7

C. Nitu

Methode zur Leistungsverbesserung der selbsttätigen Spezialrechner.

Es wird eine neue Methode zur Leistungsverbesserung der selbsttätigen Systeme mit Spezialrechner gezeigt, die sich auf selbsttätige Änderung der Abgleichparameter stützen Zur Analyse dererreichten Leistungen wird die Methode des Zustandraums erweitert.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

D.K. 621.1.01:662.998:621.56/.59:546.171.1:661.518

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu

Eine Qualitätskennlinie des Kälte-Erzeugungsprozesses durch Absorption in Ammoniaklösung.

Auf Grund des energetischen Bilanzschemas wird die Berechnungsbeziehung der energetischen Leistung des Kälte-Erzeugungsprozesses durch Absorption bestimmt.

Das festgestellte Verhältnis wird in zwei Fällen angewendet: im einfachen Prozess mit Ammoniaklösung und den durch Rektifikation und Wärmeaustausch in Ammoniaklösung verbesserten Prozess mit Ammoniaklösung.

In jedem Fall ergeben sich die Änderung der exergetischen Leistung mit bestimmenden Parametern, die Bereiche der vereinbaren Prozesse und die Bedingungen der maximalen exergetischen Leistungen.

Es wird je eine Qualitätskarakteristik für jeden einzelnen Fall bestimmt und anwendbare Nomogramme aufgestellt, die zur Wahl der optimalen Parameter für diese Prozesse dienen.

Bul. Inst. politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti, Tom. XXIX, Nr. 6/1967

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

OSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLYA 1883

MATEMATICĂ

C.Z. : 517.9

REDUCTION OF ORDER OF A SYSTEM OF LINEAR NONHOMOGENEOUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS *

PO-FANG HSIEH, Western Michigan University
OTIS D. SHOUSE, Western Illinois University

1. *Introduction.* The reduction of order of either a scalar n-th order linear homogeneous differential equation when m ($<n$) linearly independent solutions are given or a system of n linear homogeneous equation when m ($<n$) independent solutions are given is well known. The case of a scalar n-th order equation can be found in any elementary textbook of ordinary differential equations when $m=1$; if $m>1$, one can get desired reduced equation by applying the same technique m times. In the case of a system of homogeneous equations (eg. see P. Hartman [1]), by the use of some simple theorems of linear algebra, one can reduce the given system directly to a system of n-m equations. As the former can be regarded as a special case of the latter, and the proof of the latter appears to be shorter and neater, one would be convinced by this fact that sooner linear algebra is introduced in the undergraduate curriculum the better.

Recently, I. M. Miu [2] shows that a scalar n-th order linear nonhomogeneous differential equation can be reduced to an $(n-m)$-th order linear nonhomogeneous equation if m ($<n$) linear independent solutions of the associated homogeneous equation are known. Moreover, a particular solution of the original equation can be obtained if a particular solution of the reduced equation is found. He applies the variation-of-constants method and the computation is rather tedious and laborious. In this paper, we shall prove a theorem which generalizes Miu's result to a system of equations. Again the proof in our theorem will use linear algebra and will be more elegant than that in scalar case.

The statement of the theorem is as follows :

Theorem. Consider a system of linear nonhomogeneous equations

$$dy/dt = A(t)\,y + f(t) \tag{1.1}$$

* This paper is partially based on the second author's Thesis for the Degree of Educational Specialist in Mathematics at Western Michigan University, April, 1967.

where y and $f(t)$ are n-dimensional vectors, $A(t)$ in an n by n matrix such that the entries of $A(t)$ and $f(t)$ are continuous on a t-interval $[a, b]$. Assume that $y_1, y_2 \ldots, y_m$ $(m<n)$ are linearly independent solutions of

$$dz/dt = A(t)\, y. \tag{1.2}$$

Then by a transformation in terms of $y_j\,(1 \leqslant j \leqslant m)$ the systems (1.1) can be reduced to the system

$$dz/dt = B(t)\, z + g(t) \tag{1.3}$$

where z and $g(t)$ are an $(n—m)$—dimensional vector, $B(t)$ is an $n—m$ by $n—m$ by $n—m$ matrix such that the entries of $B(t)$ and $g(t)$ are known quantities continuous in a subinterval of $[a, b]$. Furthermore, a particular solution (1.1) can be derived from a particular solution of (1.3).

The proof of the theorem will be given in the next section by a method similar to the "variation-of-constants". As a matter of tact, the variation-of-constants formula can be derived from our proof if $m=n$. Moreover, the associated homogeneous equation

$$dz/dt = B(t)\, z \tag{1.4}$$

of the equation (1.3) coincides with the reduced equation in the homogeneous case (cf. P. Hartman [1]). Consequently, the general solution of (1.1) can be obtained from the general solution of (1.3).

2. Proof of the theorem. Let the components of $y_j\,(1 \leqslant j \leqslant m)$ be denoted by $y_{ij}\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ and the n by m matrix

$$Y_m = (y_{ij}) \quad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m) \tag{2.1}$$

be considered. Put

$$Y_m(t) = \begin{pmatrix} Y_{m1}(t) \\ Y_{m2}(t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

where $Y_{m1}(t)$ is the m by m matrix made of the first m rows of Y_m and $Y_{m2}(t)$ is the corresponding $(n\text{-}m)$ by m matrix. We shall prove the Theorem in two steps.

Step I: $\det Y_{m1}(t) \neq 0$ for some $t_0 \in [a, b]$. By the continuity of $\det Y_{m1}(t)$, there exists a subinterval $[c, d]$ of $[a, b]$ containing t_0 such that $\det Y_{m1}(t) \neq 0$ for $t \in [c, d]$. Let

$$Z(t) = \begin{pmatrix} Y_{m1}(t) & 0 \\ Y_{m2}(t) & 1_{n-m} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

where 1_k is the k by k identity matrix. Then det $Z(t) = \det Y_{m1}(t) \neq 0$ for $t \in [c, d]$,

$$Z^{-1}(t) = \begin{pmatrix} Y_{m1}^{-1}(t) & 0 \\ Z_{m2}(t) & 1_{n-m} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

where

$$Z_{m2}(t) = -Y_{m2}(t)\, Y_{m1}^{-1}(t), \tag{2.5}$$

and

$$Z'(t) = (A(t)\, Y_m(t)\ 0) = A(t) \begin{pmatrix} Y_{m1}(t) & 0 \\ Y_{m2}(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Now, let us introduce a transformation

$$y = Z(t)\, z \tag{2.7}$$

into (1.1), and we have

$$Z(t)\, z' = [A(t)\, Z(t) - Z'(t)]\, z + f(t), \tag{2.8}$$

or, by virtue of (2.6),

$$z' = Z^{-1}(t)\, A(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} z + Z^{-1}(t)\, f(t). \tag{2.9}$$

Let $A_{11}(t)$, $A_{22}(t)$ be square m by m, $(n\text{-}m)$ by $(n\text{-}m)$ matrices such that

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

and let

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ and } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

where z_1 and $f_1(t)$ are m-dimensional vectors and z_2 and $f_2(t)$ are $(n\text{-}m)$-dimensional vectors. Then, by (2.4), (2.10), and (2.11), (2.8) splits into

$$z_1' = Y_{m1}^{-1}(t)\, [A_{12}(t)\, z_2 + f_1(t)] \tag{2.12}$$

and

$$z_2' = [Z_{m2}(t)\, A_{12}(t) + A_{22}(t)]\, z_2 + [Z_{m2}(t)\, f_1(t) + f_2(t)]. \tag{2.13}$$

Thus (2.13) is the type of equation (1.3) and z_1 is given when z_2 is known. Hence, by (2.7) a particular solution of (1.1) can be derived from a particular solution of (2.13).

Step II : We shall relax the restriction in Step I. It is easy to see that

$$Y_m(t) = \mathrm{I} \exp\{\textstyle\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\}\, Y_m(t_0). \tag{2.14}$$

Since the matrix $\exp\{\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\}$ is nonsingular the rank of $Y_m(t)$ is m for every t in $[a, b]$. Let t_0 be any point in $[a, b]$ and $M(t)$ be an m by m submatrix of $Y_m(t)$ which is nonsingular at t_0.

Then there exists a nonsingular constant matrix T such that

$$T\,Y_m(t) = \begin{pmatrix} M(t) \\ N(t) \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

If we introduce the transformation $y = T^{-1}x$ in (1.1), we get

$$T^{-1}x' = A(t)\,T^{-1}x + f(t) \tag{2.16}$$

which yields

$$x' = TA(t)\,T^{-1}x + Tf(t). \tag{2.17}$$

It is now clear that $TY_m(t)$ has the condition we imposed in Step I and we can apply the same method to get a reduced equation of the form of (1.3). A particular solution of this equation will give a particular solution of (2.17) which, in turn, will give a particular solution of (1.1). Thus completes the proof of the Theorem.

REFERENCES

1. *Hartman, P.*, Ordinary Differential Equations, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1964, pp 49—51.

2. *Miu I. M.*, Über die partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Diferentialgleichung, Bul. Inst. politehnic Bucureşti, 25 (1963) no. 2, pp 13—24.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

C.Z. : 517.9

METODE APROXIMATIVE PENTRU INTEGRAREA UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE *

HARALAMBIE P. IONESCU

1. În foarte multe probleme ale tehnicei transpunerea datelor existente pentru matematizarea fenomenului conduce la construirea unor ecuații diferențiale ordinare dintre care cele liniare sînt frecvente și în special ecuațiile diferențiale liniare de ordinul al doilea, deci cele de forma :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{1}$$

sau

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \tag{1'}$$

unde $a, b, c,$ sînt funcții de o variabilă reală x date și definite cel puțin pentru $x \in E \subset R$, sau constante.

Astfel ecuația diferențială care determină oscilațiile unei lame de cuarț și care este analoagă cu aceea a unui anumit circuit electric, este de o astfel de formă după cum se arată în Manualul de tuburi și circuite de Teodor Tănăsescu ; de asemeni unele din problemele legate de teoria mașinii de extrudere după cum rezultă din Calculul și construcția utilajului chimic de conf. M. Renert ; unele probleme de ghidaj hidrodinamic și tot astfel am putea cita aproape din fiecare specialitate tratate în care își găsesc utilizarea cazuri particulare ale acestor ecuații diferențiale.

Din punct de vedere al tehnicii, a necesităților practicei sau industriei nu se caută neapărat integrala generală și nici chiar o soluție exactă în anumite condiții, ci o soluție care aproximează, dar pentru care din cauza naturii piesei de determinat sau a fenomenului reprezentat uneori este necesară și determinarea erorii comise în condițiile impuse.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

Alteori este suficientă o soluție care aproximează în anumite condiții, în sensul că această soluție aproximantă dă în utilizare numai o parte din întregul domeniu posibil. Atunci din punct de vedere al industriei s-a realizat ceva, s-a făcut un pas și urmează după determinarea acestei soluții să se caute o altă metodă de lărgire a posibilităților, de mărire a cîmpului de acțiune. Astfel de exemplu se găsesc în Tratatul de bazele radio de prof. Gh. Cartianu sau în Procese electronice în dispozitive semiconductoare de circuit de prof. M. Drăgănescu și altele.

Acestea arată că în unele cazuri curbele integrale care se caută a fi determinate au rolul de a delimita porțiunile utile ale planului $x\,o\,y$ în care problema să fie posibilă — în care fenomenul să aibă loc. De această natură sînt motivele care au dus la încercarea expunerii unor metode de aproximare pentru integrarea unor ecuații diferențiale, rezumîndu-ne numai la clasa ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul al doilea.

2. Considerăm în prima parte a lucrării un caz particular reprezentat prin ecuația diferențială de forma :

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}+bxy=0 \tag{2}$$

sau

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{a}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{2'}$$

unde a și b sînt constante.

Vom folosi în cele ce urmează — de la caz la caz — acea formă care va conduce la calcule mai puțin laborioase.

Ecuația diferențială considerată (2) este un caz deosebit mai ales pentru faptul că pentru $a=\frac{1}{2}$ reprezintă ecuația diferențială a lui Fourier iar prin o schimbare de variabilă convenabilă se transformă, după cum se știe, în forma canonică a ecuației diferențiale Bessel. Motivarea alegerii acestui exemplu îl avem în cele ce urmează. Dacă facem schimbarea de variabilă :

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot u \tag{3}$$

unde $u=u(x)$ este noua funcție necunoscută, atunci avem :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=x\frac{du}{dx}+u;\quad \frac{d^3y}{dx^3}=x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx} \tag{3'}$$

Dacă vom deriva ecuația (2') și vom înlocui apoi rezultatele obținute din (3) și (3') obținem ecuația diferențială :

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+2(a+1)\frac{du}{dx}+bxu=0. \tag{4}$$

. Dacă în această ecuație diferențială (4) facem schimbarea analoagă lui (3) și anume :

$$\frac{du}{dx} = X \cdot v \quad \frac{d^2u}{dx^2} = x\frac{dv}{dx} + v \text{ și } \frac{d^3u}{dx^3} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} \tag{5}$$

și apoi folosim aceste rezultate în ecuația (4), după ce am împărțit fiecare termen cu x și apoi am derivat ecuația o dată, obținem o ecuație diferențială de forma :

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + 2(a+2)\frac{dv}{dx} + bxv = 0. \tag{6}$$

Evident că putem continua modul de a transforma pe (4) în (6), pentru a transforma pe (6) în o altă ecuație corespunzătoare. Se constată că ecuația diferențială (4) se obține din (2) înlocuind constanta a prin $(a+1)$ și de asemenea ecuația (6) se obține din ecuația (5) prin același mod de înlocuire, ceea ce formează o proprietate caracteristică a ecuației diferențiale considerate și care va fi important și pentru cele ce urmează.

3. Pentru rezolvarea problemei ce ne-am propus vom considera o nouă ecuație diferențială particulară și vom introduce un operator elementar pe care să-l folosim în lucrare.

Fie ecuația diferențială :

$$E(z) = \frac{d^2z}{dx^2} + bz = 0 \tag{7}$$

unde b este o constantă.

Operația indicată prin schimbarea de variabilă din (3) o vom nota prin :

$$\omega_1(z) = \frac{1}{x} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{8}$$

$$\omega_1(\omega_1) = \omega_2(z) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d\omega_1}{dx};$$

$$\omega_1(\omega_2) = \omega_3(z) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d\omega_2}{dx}; \tag{8'}$$

$$\omega_1(\omega_3) = \omega_4(z) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d\omega_3}{dx};$$

. . . . . .

$$\omega_1(\omega_{n-1}) = \omega_n(z) = \frac{1}{x} \cdot \frac{d\omega_{n-1}}{dx}; \tag{8''}$$

. . . . . .

ceea ce reprezintă un operator elementar care operează asupra funcției $z(x)$.

Dacă ținem seamă de ecuația (7) și o derivăm succesiv atunci pentru derivatele de diferite ordine ale funcției $z(x)$ avem :

$$\frac{d^{2n} z}{dx^{2n}} = (-1)^n \cdot b^n \cdot z$$
$$\frac{d^{2n+1} z}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \cdot b^n \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{9}$$

Dacă vom aplica lui $E(z)$ operația de derivare și apoi asupra lui z pe ω_1, iar după aceea vom ține seamă de (9) obținem :

$$E_1(\omega_1) = x \frac{d^2 \omega_1}{dx^2} + 2 \frac{d \omega_1}{dx} + bx \omega_1 = 0. \tag{10}$$

Dacă vom aplica apoi asupra lui $E_1(\omega_1)$ operația de derivare și asupra lui ω_1 pe ω_1 — ceea ce este identic cu a aplica asupra lui z pe ω_2 — obținem :

$$E_2(\omega_2) = x \frac{d^2 \omega_3}{dx^2} + 2.2. \frac{d\omega_2}{dx} + bx \omega_2 = 0. \tag{11}$$

Dacă vom aplica acum asupra lui $E_2(\omega_2)$ operația de derivare și asupra lui ω_2 pe ω_1 — ceea ce este identic cu a aplica asupra lui z pe ω_3 — obținem :

$$E_3(\omega_3) = x \frac{d^2 \omega_3}{dx^2} + 2.3. \frac{d\omega_3}{dx} + bx \omega_3 = 0.$$

Rezultă cu ușurință că dacă vom aplica în mod succesiv aceleași operații și în aceeași ordine atunci vom obține :

$$E_n(\omega_n) = x \frac{d^2 \omega_n}{dx^2} + 2n \frac{d \omega_n}{dx} + bx \omega_n = 0 \tag{12}$$

pe care o mai putem scrie și sub forma :

$$\mathfrak{E}(\omega_n) = \frac{E_n(\omega_n)}{x} = \frac{d^2 \omega_n}{dx^2} + 2 \frac{n}{x} \cdot \frac{d \omega_n}{dx} + b \omega_n = 0 \tag{12'}$$

și din care, ca mai sus avem

$$\mathfrak{E}(\omega_{n+1}) = \frac{d^2 \omega_{n+1}}{dx^2} + 2 \cdot \frac{n+1}{x} \cdot \frac{d \omega_{n+1}}{dx} + b \omega_{n+1} = 0 \tag{12''}$$

. . . . . .

. . . . . .

unde n este un număr natural ; sau ceea ce reprezintă cazul pentru ecuațiile diferențiale (2) și (4) cînd facem $a = n$.

4. Dacă revenim asupra ecuației (2) în care considerăm pe a o constantă pozitivă, atunci există totdeauna un număr natural n așa încît să avem :

$$n \leqslant a = n + r < n + 1 ; \; 0 \leqslant r < 1,$$

iar ecuația diferențială de forma (2) se scrie :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{n}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + by + 2\frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \tag{13}$$

În aceste condiții avem :

1° — sau se suprimă termenul $2 \cdot \frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx}$ și avem astfel o primă modalitate de a construi o soluție aproximativă, soluție dată de ecuația diferențială

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{n}{x}\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{13'}$$

și mai ales pentru $x \in [\alpha, \beta]$ și x foarte mare față de r.

2° — sau se majorează termenul $2\frac{r}{x} \cdot \frac{dy}{dx}$ la $2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx}$ și se obține acuația diferențială :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{n+1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{13''}$$

care dă posibilitatea construirii unei alte soluții aproximativă și care se poate obține din 1° prin $dy = xudx$ ca în exemplele de mai sus.

Este evident că cele mai avantajoase soluții aproximative date de (13") sînt cele pentru x aparținînd la intervale cu valori apropiate valorilor lui r.

Din cele de mai sus rezultă că la baza integrării aproximative a ecuației diferențiale (2) se afla ecuația diferențială (7) căreia i se aplică operațiunile (8), (8') și (9).

Ca o aplicație să considerăm ecuația diferențială

$$\frac{d^2 \omega_2}{dx^2} + 2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{d\omega_2}{dx} + b\omega_2 = 0 \tag{14}$$

care corespunde cu $E_2(\omega_2) = 0$. Atunci să considerăm că avem :

$$E(z) = \frac{d^2 z}{dx^2} \pm k^2 z = 0$$

după cum constanta b este pozitivă sau negativă și atunci pentru integrala generală va corespunde :

$$z = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^{-kx} \text{ sau } z = \lambda_1 \cos kx + \lambda_2 \sin kx$$

Aplicînd acum operațiile corespunzătoare din (8), (8') și (9) avem :

$$\omega_1 = \frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dx};\quad \omega_2 = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^3}\cdot\frac{dz}{dx} \tag{15}$$

$$\omega_2 = \pm\frac{k^2}{x^2}z - \frac{1}{x^3}\cdot\frac{dz}{dx}$$

și cu ajutorul căreia putem scrie :

$$\omega_2 = \frac{k^2}{x^2}(\lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 e^{-kx}) - \frac{k}{x^3}(\lambda_1 e^{kx} - \lambda_2 e^{-kx})$$

sau

$$\omega_2 = -\frac{k^2}{x^2}(\lambda_1 \cos kx + \lambda_2 \sin kz) + \frac{k}{x^3}(\lambda_1 \cos kx - \lambda_2 \sin kx)$$

În mod analog pentru ω_3 putem scrie :

$$\omega_3 = \frac{1}{z}\frac{d\omega_2}{dx} = \omega_1(\omega_1) = \pm\frac{3k^2}{x^4}z + \left(\frac{3}{x^5} \pm \frac{k^2}{x^3}\right)\cdot\frac{dz}{dx}$$

și apoi putem continua din aproape în aproape.

Dacă în general se caută ω_n, integrala generală a ecuației diferențiale $E_n(\omega_n) = 0$, — adică a ecuației (12) — vom considera expresia acesteia ordonată după doi termeni $\frac{dz}{dx}$ și z și ca ecuație de bază pe (7).

Așa fiind coeficientul lui $\frac{dz}{dx}$ din exprimarea lui ω_n se obține din derivata coeficientului lui $\frac{dz}{dx}$, din exprimarea lui ω_{n-1}, amplificat cu $\left(\frac{1}{x}\right)$ la care se adaugă și coeficientul lui z din ω_{n-1} și amplificat cu $\left(\frac{1}{x}\right)$. Atunci ținînd seamă de ω_1, ω_2,..... acești coeficienți sînt polinoame în $\left(\frac{1}{x}\right)$ și deci coeficientul lui $\frac{dz}{dx}$ din expresia lui ω_n și-a mărit gradul cu două unități ca și coeficientul lui z. Dar ținînd seama de coeficienții respectivi din exprimarea lui ω_1 și ω_2 rezultă cu ușurință că putem scrie :

$$\omega_n = P_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dz}{dx} + Q_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot z. \tag{16}$$

Mai mult, aceste polinoame sînt omogene în raport cu $\left(\frac{1}{x}\right)$ și dacă ținem seamă de relațiile de operație (8') și (8) atunci putem scrie chiar:

$$P_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^n}\cdot R_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right);\ Q_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^n}\cdot S_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{17}$$

și

$$P_1\equiv\frac{1}{x};\ Q_0\equiv 0.$$

Pentru determinarea coeficienților polinoamelor din (16) se stabilesc cu ușurință relații între aceste polinoame, deoarece putem scrie:

$$\omega_{n+1}=P_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dz}{dx}+Q_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot z \tag{18}$$

și

$$x\cdot\omega_{n+1}=\frac{d\omega_n}{dx} \tag{19}$$

Dar din acestea avem:

$$x\cdot P_{2n-1}\cdot\frac{dz}{dx}+x\cdot Q_{2n}\cdot z=P_{2n-1}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}P'_{2n-1}\cdot\frac{dz}{dx}+$$

$$+Q_{2n-2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}Q'_{2n-2}\cdot z$$

unde P'_{2n-1}; Q'_{2n} reprezintă derivatele acestor polinoame în raport cu $\left(\frac{1}{x}\right)$.

Identificînd avem:

$$\begin{aligned}&x^3\cdot P_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+P'_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-x^2\cdot Q_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)\equiv 0\\&x^3\cdot Q_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)+Q'_{2n-2}\left(\frac{1}{x}\right)+bx^2\cdot P_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\equiv 0\end{aligned} \tag{20}$$

relații care permit determinarea din aproape în aproape a coeficienților și pentru care așa cum am specificat

$$P_1\equiv\frac{1}{x};\ Q_0\equiv 0.$$

Dacă în aceleași condiții folosim relațiile (17) și scriem:

$$x^n\cdot\omega_n=R_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{dz}{dx}+S_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot z \tag{21}$$

vom găsi relații aproape analoage celor din (20) pentru polinoamele R_{n-1} și S_{n-2}.

Rezultă astfel din cele arătate că se pot obține cu oarecare ușurință integrale aproximative pentru ecuațiile diferențiale de forma (2).

5. O altă problemă importantă privește ecuațiile diferențiale de forma :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot a(x) \cdot \frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{22}$$

unde b este o constantă dată iar $a(x)$ o funcție de variabilă reală x, dată și definite cel puțin pentru $x \in [\alpha, \beta]$; și pe cele de forma :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\,a(x) \cdot \frac{dy}{dx} + b(x)\,y = 0 \tag{23}$$

unde $a(x)$ și $b(x)$ sînt două funcții de variabilă reală x, date și definite cel puțin pentru $x \in [\alpha, \beta]$.

Pentru aceste ecuații diferențiale vom deosebi :

1° — pentru cazul ecuației (22), presupunem că funcția $x \cdot a(x)$ este mărginită cel puțin pentru $x \in [\alpha, \beta]$ ca interval de integrare al ecuației considerate.

Există atunci două numere μ_1 și μ_2 așa încît cel puțin pentru $x \in [\alpha, \beta]$ să putem scrie :

$$\mu_1 \leqslant x \cdot a(x) \leqslant \mu_2 .$$

Atunci clasei de ecuații diferențiale (22) îi putem asocia ecuațiile diferențiale :

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{\mu_1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + by = 0 \\ &\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{\mu_2}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + by = 0 \\ &\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{\mu}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + by = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

unde $\mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2$ și cu ajutorul cărora ca în § 4 putem construi integrale aproximante.

Dacă vom considera mai mult că m este cel mai mic întreg mai mare decît μ_1 și că între μ_1 și μ_2 avem p numere întregi, atunci $(m+p-1)$ este cel mai mare întreg mai mic decît μ_2 și astfel cu șirul :

$$m,\ m+1,\ m+2, \ldots m+p-1$$

de numere întregi, vom construi un șir de p ecuații diferențiale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{m+i}{x}\frac{dy}{dx} + by = 0; \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

de forma celor din (13') și vom obține cu ele p integrale care vor reprezenta un număr de soluții aproximante ale ecuației diferențiale considerate.

2° — pentru cazul ecuației (23), dacă vom considera că și funcția $b(x)$ este mărginită pentru $x\varepsilon[\alpha, \beta]$ împreună cu $x\ a(x)$ și deci există alte două constante ν_1, ν_2 așa încît să putem scrie $\nu_1 \leqslant b(x) \leqslant \nu_2$, în același mod construim un alt șir de numere: m', $m'+1$, $m'+2$,....$m'+q$-1, cu care vom construi o altă mulțime de ecuații diferențiale care ne vor da posibilitatea de a construi o grupă de integrale aproximante pentru ecuația dată de forma (23). În unele cazuri cele două șiruri de numere pot fi reunite.

6. Este natural ca problema să nu se oprească numai la cele mai sus expuse.

1° — Astfel dacă ne referim la ecuația diferențială (13) o altă problemă care se pune este determinarea erorii și anume eroarea determinată prin folosirea fiecăreia din cele două aproximante.

2° — Dacă ne referim la § 5 punctele 1° și 2°, atunci o altă problemă o formează determinarea aceleia dintre soluțiile aproximante aflate care reprezintă soluția cea mai avantajoasă.

3° — O altă problemă importantă consider că o formează și examinarea unor metode pentru ecuațiile de forma (23), care prin schimbarea $y=uv$ și determinarea lui v așa încît coeficientul lui $\frac{du}{dx}$ să fie nul cînd avem $lnv=-\int a(x)dx$ și ecuația diferențială devine :

$$\frac{d^2u}{dx^2} - (a^2 + a' - b)\,u = 0,$$

ecuație pentru care sînt multe posibilități.

Ca un exemplu dacă am considera ecuația diferențială :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(1 + \frac{2}{4e^{2x}-1}\right)\frac{dy}{dx} + (1-x)\,y = 0$$

atunci avem $ln\,v = -\int \frac{2}{4e^{2x}-1}\,dx$; $v = 1 + \frac{1}{4e^{2x}-1}$

și ecuația considerată devine :

$$\frac{d^2u}{dx} - xu = 0,$$

ecuația asupra căreia se poate lucra evident cu mai multă ușurință. Aceste observații înserate vor forma însă obiectul unei alte lucrări.

Catedra de matematici I
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Krilov, A. N.* — Lecţii de calcule prin aproximaţie — Editura Tehnică — Bucureşti. 1957.
2. *Ghermănescu, M.* — Ecuaţiile fizicei matematice — Editura Tehnică Bucureşti 1958.
3. *Angot, A.* — Complemente de matematici — Editura tehnică Bucureşti 1966.
4. *Günther, N. M.* şi *Cuzmin R. O.* — Culegere de probleme de matematici superioare — Editura tehnică Bucureşti 1950.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

C.Z. : 517.9.

CONTRIBUTIONS SUR LES ZÉROS DES SOLUTIONS DES CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES *

I. M. MIU

Dans ce qui suit nous donnerons des génèralisations du théorème de Sturm concernant aux équations différentielles linéaires de 2-me et n-me ordre et ensuite nous étudierons la séparation de zéros des solutions d'un système d'équations différentielles.

§ 1. Des génèralisations du théorème de Sturm

A.

La prèmière génèralisation est donnée par le

Théorème. Soit l'équation

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \tag{1}$$

avec $p(x)$, $q(x)$ fonctions continues sur $[a, b]$ et $g(x)$ une fonction dérivable sur $[a, b]$.

Si pour deux solutions $y_1(x)$, $y_2(x)$ de l'équation (1) le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 - g & y_2 - g \\ y_1' - g' & y_2' - g' \end{vmatrix} \tag{2}$$

conserve le même signe sur l'intervalle $[a, b]$, alors les points d'intersection de chaque solution de l'équation (1) qui appartiennent aux ensemble $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ où $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, avec la courbe $y = g(x)$ se séparent réciproquement sur la portion de courbe situé entre $x = a$, $x = b$.

Demonstration : Soient y_1, y_2 deux solutions de l'équation (1) de telle sorte que le déterminant Δ conserve le même signe sur l'intervalle $[a, b]$.

Nous démontrerons d'abord que cette propriété se conserve pour deux solutions de l'ensemble considerée.

* Manuscris predat la redacție la 10 octombrie 1967.

Étant donnée les constantes A, B, C, D avec $A+B\neq 0$ $C+D\neq 0$ nous avons :

$$A\Delta=\begin{vmatrix} Ay_1+By_2-(A+B)g & y_2-g \\ Ay_1'+By_2'-(A+B)g' & y_2'-g' \end{vmatrix}$$

$$\frac{A}{A+B}\Delta=\begin{vmatrix} \mu_1 y_1+\mu_2 y_2-g & y_2-g \\ \mu_1 y_1'+\mu_2 y_2'-g' & y_2'-g' \end{vmatrix}$$

où $\dfrac{A}{A+B}=\mu_1$, $\dfrac{B}{A+B}=\mu_2$, $\mu_1+\mu_2=1$

Il s'ensuit que l'on a :

$$\frac{AD}{A+B}\Delta=\begin{vmatrix} \mu_1 y_1+\mu_2 y_2-g & C\mu_1 y_1+(C\mu_2+D)y_2-(C+D)g \\ \mu_1 y_1'+\mu_2 y_2'-g' & C\mu_1 y_1'+(C\mu_2+D)y_2'-(C+D)g' \end{vmatrix}$$

$$\frac{AD\Delta}{(A+B)(C+D)}=\begin{vmatrix} \mu_1 y_1+\mu_2 y_2-g & \nu_1 y_1+\nu_2 y_2-g \\ \mu_1 y_1'+\mu_2 y_2'-g' & \nu_1 y_1'+\nu_2 y_2'-g' \end{vmatrix} \tag{3}$$

avec $\mu_1+\mu_2=1$, $\nu_1+\nu_2=1$.

La relations (3) nous montre que dans le second membre le déterminant conserve le même signe sur $[a, b]$.

Dans ce qui suit, nous utiliserons aussi notre théorème donnée dans [1], [2] :

Théorème. Soient les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$, bornées et définies sur l'intervalle $[a, b]$, telle que :

1° La fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert (a, b).

2° Les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$, sont continues sur (a, b). Entre deux zéros consécutifs de la fonction $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$ on trouve au moins un zéro de l'une des fonctions :

$$\Phi(x)=\psi(x)f(x)+\varphi(x)f'(x);\ \varphi(x). \tag{4}$$

($\Phi(x)$ et $\varphi(x)$ ont en tout un nombre impaire de zéros).

D'après ce théorème il résulte que les zéros réeles des fonctions $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ séparent les zéros de la fonction $f(x)$.

Dans les expressions (4) nous posons :

$$f(x)=y_1(x)-g(x),\ \psi(x)=y_2'(x)-g'(x),\ \varphi(x)=y_2(x)-g(x).$$

Il résulte que les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y=y_1(x)$, $y=g(x)$ sont séparés par les zéros des fonctions :

$$(y_2'-g')(y_1-g)-(y_2-g)(y_1'-g');\ y_2-g.$$

Aussi il résulte de (4) que les abscisses des points d'intersection entre les courbes $y=y_2(x)$, $y=g(x)$ sont séparés par les zéros des fonctions :

$$(y_2' - g')(y_1 - g) - (y_2 - g)(y_1' - g'); \; y_1 - g.$$

Comme le déterminant $\Delta = (y_2' - g')(y_1 - g) - (y_2 - g)(y_1' - g')$ conserve le même signe, il résulte que les abscisses des points d'intersection des solutions $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ de l'équation (1) avec la courbe $y=g(x)$ se séparent reciproquement :

Considerons maintenant deux solutions de l'équation (1) qui appartiennent aux ensemble considerée :

$$Y_1 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$$

$$Y_2 = \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2$$

avec $\mu_1 + \mu_2 = 1$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$.

On arrive aussi au même résultat, parce que en tenant compte de (3) la fonction

$$(Y_2' - g')(Y_1 - g) - (Y_2 - g)(Y_1' - g')$$

conserve le même signe.

D'après ce qui précède il résulte :

On donne l'équation (1) avec $p(x)$, $q(x)$ fonctions continues sur $[a, b]$ et $y_1(x)$, $y_2(x)$ deux solutions de cette équation, et on considère l'ensemble de solutions $Y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (C_1, C_2 constantes) avec $C_1 + C_2 = 1$.

Les points d'intersection des toutes solutions $Y(x)$ avec la courbe $y=g(x)$ se séparent réciproquement, eventuellement à exception de celles points qui sont sépparés par les zéro de la fonction Δ.

B.

Une autre généralisation du théorème de Sturm.

Théorème. Soient les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, definies sur $[a, b]$ qui satisfont les conditions :

1° Sont dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ avec les dérivés continues.

2° Le déterminant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

conserve le même signe sur $[a, b]$.

Les zéros des fonctions

$$Y_1 = (C_1 y_1 + C_2 y_2)$$

$$Y_2 = (C_1' y_1 + C_2' y_2)$$

se séparent réciproquement dans l'intervalle $[a, b]$. C_1, C_2, C_1', C_2' sont constantes arbitraires.

Démonstration. La démonstration résulte imédiatement avec notre théorème cité plus haut.

D'après ce théorème les zéros de Y_1 sont séparés par les zéros des fonctions :

$$Y_2' Y_1 - Y_2 Y_1' ; \; Y_2,$$

et les zéros de Y_2 sont séparés par les zéros des fonctions

$$Y_2' Y_1 - Y_2 Y_1' ; \; Y_2.$$

Comme la fonction

$$Y_2' Y_1 - Y_2 Y_1' = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1' & C_2' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

conserve le même signe, il résulte que les zéros des fonctions Y_1, Y_2 se séparent réciproquement.

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1' & C_2' \end{vmatrix} = 0$$

les zéros des Y_1, Y_2 se confondent.

Ce théorème généralise le théorème de Sturm parce que ici les fonctions y_1, y_2 ont seulement dérivés de prémier ordre.

C.

Équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

Soit l'équation

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (5)$$

où les fonctions $a_i(x)$ sont continues sur $[a, b]$.

Supposons maintenant qu'on lui connaisse p solutions particulieres linéaires independentes $y_1, y_2, y_3 \ldots y_p$ et soient :

$$\left.\begin{aligned} Y_1(x) &= C_1^1 y_1 + C_2^1 y_2 + \cdots + C_p^1 y_p \\ Y_2(x) &= C_1^2 y_1 + C_2^2 y_2 + \cdots + C_p^2 y_p \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

deux solutions linéaires independentes. (C_j^1, C_j^2 sont constantes arbitraires).

En notre ouvrage [3] nous avons démontré le théorème :

Les zéros de solutions $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ avec λ_1, λ_2 constantes arbitraires, se séparent reciproquement dans $[a, b]$ si la fonction

$$W(Y_1, Y_2) = \Sigma \begin{vmatrix} C_i^1 & C_j^1 \\ C_i^2 & C_j^2 \end{vmatrix} W(y_i, y_j)$$

conserve le même signe sur $[a, b]$.

Nous enonçons le suivant théorème plus générale :

Théorème. On donne l'équation différentielle (5) avec les coefficients $a_i(x)$ continues sur $[a, b]$ et $g(x)$ une fonction derivable sur $[a, b]$.

Soient $Y_1(x), Y_2(x)$ deux solutions données en (6) de l'équation (5).

Si la fonction

$$\Delta(Y_1, Y_2; g) = \begin{vmatrix} Y_1 - g & Y_2 - g \\ Y_1' - g' & Y_2' - g' \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} C_i^1 & C_j^1 \\ C_i^2 & C_j^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_i - g & y_j - g \\ y_i' - g' & y_j' - g' \end{vmatrix},$$

conserve le même signe sur $[a, b]$, les pointes d'intersection des toutes solutions de l'ensemble $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$ où $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, avec la courbe $y = g(x)$ se séparent réciproquement pour $x \in [a, b]$.

La démonstration du théorème se fait analogue comme pour l'équation de 2-me dégré.

§ 2. Les zéros des solutions d'un système d'équations différentielles

Dans nôtre ouvrage [3] nous avons étudié la séparation des zéros de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$ et dans les conditions du théorème, nous avons arrivé au conclusion que les zéros de la fonction $F(x, 0)$ séparent les zéros des toutes les solutions $y(x)$ de l'équation considéré dans les intervalles où elles existent.

D'après ce théorème il résulte, que les zéros de toutes solutions de l'équation $y' = F(x, y)$ sont séparés par les zéros de la même fonction $F(x, 0)$.

Dans ce qui suit, nous étudierons le problème analogue pour un système d'équations différentielles.

Considérons le système d'équations

$$y_j' = f_j(x, y_1, y_2 \ldots y_n), \; j = 1, 2 \ldots n, \tag{7}$$

où les fonctions f_j sont definies et continues sur le domaine fermé

$$\overline{G} = [a, b] \times [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \cdots \times [\alpha_n, \beta_n].$$

Aussi nous avons :

1° Les fonctions f_j satissfont les conditions de Lipschitz :

$$|f_i(x, y_{11}, y_{21} \ldots y_{n1}) - f_i(x, y_{12}, y_{22}, \ldots y_{n2})| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |y_{k1} - y_{k2}|$$

$$i = 1, 2, \ldots n; \; M > 0$$

2° Les fonctions f_j ont dérivés inclusivement jusque l'ordre n-3 par $x, y_1, y_2 \dots y_n$.

Celà posé, dans les conditions que nous le donnerons dans ce qui suit, les zéros, des fonctions d'une solution du système (7) sont séparés par les zéros des fonctions qui peuvent être déterminé si l'on donne une certaine fonction $y_1 = y_1(x)$ de la solution du système.

Suppons que nous connaissons une fonction $y_1 = y_1(x)$ d'une solution, qui passe par un point de l'intervalle $[a, b]$.

Pour la séparation des zéros de la fonction $y_1(x)$ on peut procéder de plusieures manières bien connues.

Pour une certaine fonction $y_j = y_j(x)$ nous substituons dans l'équation $y_1' = f_1(x, y_1, y_2 \dots y_n)$ les valeurs connues de y_1, y_1' notés par $\bar{y}_1, \bar{y}_1'$ et ensuite on dérive succesivement par x l'équation considérée. Après chaque dérivation on substitue les dérivés $y_2, y_3' \dots y_n'$ avec les valeurs données par les équations du système.

On a donc :

$$\bar{y}_1' = f_1(x, \bar{y}_1, y_2, \dots y_n)$$

$$\bar{y}_1'' = f'_{1x} + f'_{1y_1}\bar{y}_1' + f'_{1y_2}y_2' + \dots + f'_{1y_n}y_n'$$

(où nous avons noté par $\bar{y}$ la valeur connue de y).

Dans la dernière équation l'on obtient :

$$\bar{y}_1'' = f_{12}(x, \bar{y}_1, y_2, y_3 \dots y_n).$$

On dérive encore cette équation et on aura :

$$\bar{y}_1''' = f_{13}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n).$$

Si l'on continue plus loin, nous avons :

$$\bar{y}_1''' = f_{13}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n)$$

$$\bar{y}_1^{IV} = f_{14}(x, \bar{y}_1, y_2, \dots y_n)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y_1^{(n-2)} = f_{1,n-2}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n),$$

où nous avons noté abrégés les deuxiemes membres.

On obtient le système

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{y}_1' = f_1(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n)\\
&\bar{y}_1'' = f_{12}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n)\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\bar{y}_1^{(n-2)} f_{1,n-2}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n)\\
&\bar{y}_j' = f_j(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n)
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

On met le système (8) sous la forme :

$$\left.\begin{aligned}
\bar{y}_1' &= f_1(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n) \\
\bar{y}_1'' &= f_{12}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_n) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\bar{y}_1^{(n-2)} &= f_{1,n-2}(x, \bar{y}_1, y_2, \dots y_n) \\
\bar{y}_j' &= f_j(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \dots y_n) + \\
&+ f'_{iy_j}(x, \bar{y}_1, y_2 \dots y_{j-1}, \theta y_j, y_{j+1} \dots y_n)\, y_n,\ 0<\theta<1.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Supposons que dans (9) le système formé avec les prémières n-2 équations déterminent les fonctions $y_2, y_3 \dots y_{j-1}, y_{j+1} \dots y_n$, et ensuite on substituent les valeurs de ces fonctions dans la dérniere équation de (9).

En tenant compte de notre théorème [3] *p.* 21, énnoncé plus haut, il résulte que les zéros de la fonction $y_j = y_j(x)$ sont séparés par les zéros de la fonction

$$f_j(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{j-1}, 0, \bar{y}_{j+1} \dots \bar{y}_n), \quad (10)$$

où $\bar{y}_2, \bar{y}_3 \dots \bar{y}_{j-1}, \bar{y}_{j+1} \dots \bar{y}_n$ sont données par les prémières n-2 équations de (9).

§ 3. L'intersection des courbes integrales des solutions du système (7) avec une courbe $y = g(x)$.

Nous nous proposons de séparer les points d'intersection d'une courbe $y = g(x)$ avec $y = y_j(x)$ où $y = y_j(x)$ est une fonctions d'une solution du système (7).

Aussi les fonctions f_i doivent satisfaire les conditions précédentes et l'on suppose que nous avons donnée une certaine fonction $y_1 = y_1(x)$ de la solution considéré du système.

La fonction $g(x)$ est définie et dérivable jusque l'ordre n-3 sur l'intervalle $[a, b]$.

On fait le changement de la fonction y_j ainsi : $y_j = z_j + g(x)$, et l'équation respective du système devient

$$z_j' = f_j(x, y_1, \dots y_{j-1}, z_j + g(x), y_{j+1} \dots y_n) - g'(x)$$

Le problème revient de séparer les zéros de z_j.

Nous appliquons les résultats précédents et il résulte que les abscisses des points d'intersection de la courbe $y = y_j(x)$ avec $y = g(x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ où il existe la courbe intégrale, sont séparées par les zéros de la fonction :

$$f_j(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \dots \bar{y}_{j-1}, g(x), \bar{y}_{j+1} \dots \bar{y}_n) - g'(x) \quad (11)$$

On suppose aussi, que le système formé avec les prémières n-2 équations du (9), déterminent les fonctions $y_2 \dots y_{j-1}, y_{j+1} \dots y_n$ dans une voisinage du point consideré dans la problème de Cauchy.

Errata. Dans l'ouvrage [3] page 19, ligne 16, lire :

$$\left| y' z - y z' \right|_{x_1}^{x_2} < 0$$

et ligne 21, lire : $z(x_2)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Miu, I.* M. Une nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, 1963, Nr. 4.
2. *Miiu, I.* Sur les zéros réels de certaines fonctions. Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, 1964, Nr. 2.
3. *Miu, I.* Sur les zéros des solutions des certaines écuations différentielles. Bulletinul Institutului politehnic Bucureşti, 1965, Nr. 6.

La chaire de mathématique. III.
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

C.Z. : 518.9

GRAPHISCHE LÖSUNG DER MATRIZIALSPIELE VON DER GRÖSSENORDNUNG $3\times n$ *)

A. TĂNĂSESCU, R. THEODORESCU

Die graphische Lösung der Matrizialspiele von der Grössenordnung $3\times n$ stellt im allgemeinen Schwierigkeiten in was die Herstellung des entsprechenden räum'lichen Bildes betriefft, dar.

Im vorliegenden Beitrag werden einfache graphische Methoden zur Lösung solcher Spiele gegeben, die sich grundsätzlich auf eine deskriptive Darstellung der von zwei Spielern benützten Strategie stützen.

1. Es soll die Lösung des Spiels von der Grössenordnung 3×3, definiert von der Matrize :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	—3	4
A_2	—3	4	—5
A_3	4	—5	6

gesucht werden.

Um alle Glieder der Matrix positiv zu werten, sollen wir aller dieser Elemente a_{ij} den $L=5$ zusetzen. Es ergibt sich die Matrize :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

* Mitteilung vorgetragen an der in Moskau am 16—26 August 1966 stattgefundenen Tagung der Mathematiker.

In diesem Fall wird der Wert des Spiels mit 5 vergrössert aber die Lösung wird sich trotzdem nicht ändern.

Nun sollen wir die optimale Strategie S_A^* bestimmen. Die Bedingungen sind folgende :

$$\begin{aligned} 7\xi_1 + 2\xi_2 + 9\xi_3 &\geqslant 1 \\ 2\xi_1 + 9\xi_2 \qquad &\geqslant 1 \qquad \text{wo} \quad \xi_1 = \frac{p_1}{v};\ \xi_2 = \frac{p_2}{v} \\ 9\xi_1 \qquad + 11\xi_3 &\geqslant 1 \qquad \text{und} \quad \xi_3 = \frac{p_3}{v} \end{aligned}$$

Um die Ungleichheiten zu beseitigen sollen wir die fiktiven Veränderlichen z_1, z_2 und z_3 einführen. Die obenangegebenen Bedingungen werden folgendermassen geschrieben :

$$\begin{aligned} 7\xi_1 + 2\xi_2 + 9\xi_3 - z_1 &= 1 \\ 2\xi_1 + 9\xi_2 \qquad - z_2 &= 1 \\ 9\xi_1 \qquad + 11\xi_3 - z_3 &= 1 \end{aligned}$$

Wir müssen hier den Minimum der linearen Form finden :

$$\phi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

Wen alle drei Strategien B aktiv sind, dann werden alle drei fiktiven Variablen z_1, z_2 und z_3 gleich Null sein, d.h der dem Wert des Spiels gleiche Gewinn wird B_j werden. Wir haben aber keine Gründe zu behaupten, dass alle drei Strategien aktiv sind.

Üm diese Tatsache zu überprüfen sollen wir Φ durch die fiktiven veränderlichen z_1, z_2 und z_3 ausdrücken und sehen — wenn wir sie als Null betrachten — ob wir ein Minimum der Form erhalten.

Wenn wir nun die obengenannten Bedingungen im Verhältnis zu ξ_1, ξ_2 und ξ_3 lösen, erhalten wir :

$$\xi_1 = \frac{1}{20} - \frac{99}{80}z_1 + \frac{11}{40}z_2 + \frac{81}{80}z_3$$

$$\xi_2 = \frac{1}{10} + \frac{11}{40}z_1 + \frac{1}{20}z_2 - \frac{9}{40}z_3$$

$$\xi_3 = \frac{1}{20} + \frac{81}{80}z_1 - \frac{9}{40}z_2 - \frac{59}{80}z_3$$

$$\text{Also } \phi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}z_1 + \frac{1}{10}z_2 + \frac{1}{20}z_3$$

Diese lineare Form ist die Kleinste für $z_i = 0$. Infolgedessen ist das Minimum der Form ϕ, $\frac{1}{v} = \frac{1}{5}$ woher der Spielwert $v = 5$ ist.

Gleichfalls erhalten wir für $z_i = 0$

$$\xi_1 = \frac{1}{20}; \quad \xi_2 = \frac{1}{10}; \quad \xi_3 = \frac{1}{20}$$

oder wenn wir das Spiel mit dem Wert ν erweitern, erhalten wir die Frequenzen $p_1 = \frac{1}{4}$; $p_2 = \frac{1}{2}$; $p_3 = \frac{1}{4}$ der Strategien A_1, A_2, A_3 in der optimalen Strategie S_A^*.

Die optimale Strategie A ist infolgedessen

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun jetzt den Wert des Spiels $\nu = 5$ kennen, können wir die optimale Strategie des Gegners erfahren.

$$S_A^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

Zu diesem Zweck werden wir irgendeine von den beiden „aktiven" Strategien anwenden A_2 und A_3. So denn die Gleichungen :

$$2\,q_1 + 9\,q_2 = 5$$
$$9\,q_1 + 11\,(1 - q_2 - q_1) = 5$$

woher sich $q_1 = q_3 = \frac{1}{4}$; $q_2 = \frac{1}{2}$ ergibt, also die optimale Strategie des Gegners ist identisch mit unserer Strategie :

$$S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Kehren wir zurück zum initialen unveränderten Spiel, wobei wir von dem Vert $\nu = 5$ des Spiels den der Matrixgliedern zugestellten Wert $L = 5$ abziehen müssen. Wir erhalten $\nu_0 = 0$, also die optimalen Strategien beider Partener sichert einen mittleren Gewinn gleich Null. Das hier als Beispiel gegebene Spiel ist sowohl vorteilhaft als auch nachteilig für beide Partner.

Sollen wir uns jetzt mit der graphischen Lösung dieses Spiels beschäftigen *). *Die obenerwähnte algebrische Lösung liefert uns die Pro-*

*) Eine geometrische Lösung durch den Monge'schen Riss der Matrizialspiele von der Grössenordnung $3 \times n$, die sich von den in dieser Arbeit vorgezeigten Methoden unterscheidet, befindet sich im Beitrag der Verfasser: A. Roşu — H. Bodnărescu „Puncte de extrem pe suprafeţele poliedrale apărute în teoria jocurilor", Studii de Statistică, vol. IV, Editura Dir. Gen. de Statistică, Bucureşti, 1966.

belösung und gibt uns gleichzeitig die Möglichkeit die graphische und algebrische Methode im Vergleich zu stellen.

Die Frequenzen p_1, p_2 und p_3 der Strategien A_1, A_2 und A_3 in der optimalen Strategie S_A^* werden von den Koordinaten (x, y) des Punktes N bestimmt, der maximalen Anteil am unteren Rand des Gewins über die Ebene xoy haben wird. Dieser Anteil ist eben der Wert ν des Spiels.

Zur graphischen Lösung der matrizialen Spiele von der Grössenordnung $3 \times n$ wird in erster Reihe die Frage der Auswahl der Axen gestellt, auf welchen die betreffenden Gewinne bei den Strategien A_1, A_2, A_3 und die Strategie B zu verzeichnen sind. Wenn alle Strategien des Gegners in dieser Art aufgebaut werden, werden wir den Bündel der Ebenen die die Frequenzen p_1, p_2, p_3 und den Wert des Spiels bestimmen, erhalten.

Die Axen I, II, III, auf welchen die betreffenden Gewinne bei den Strategien A_1, A_2, A_3 und bei der Strategie B zu verzeichnen sind können verschiedentlich gewählt werden. Sollen wir uns zu der in Abb. 1 gegebenen Wahl, die für uns die passendste zu sein scheint, enschliessen.

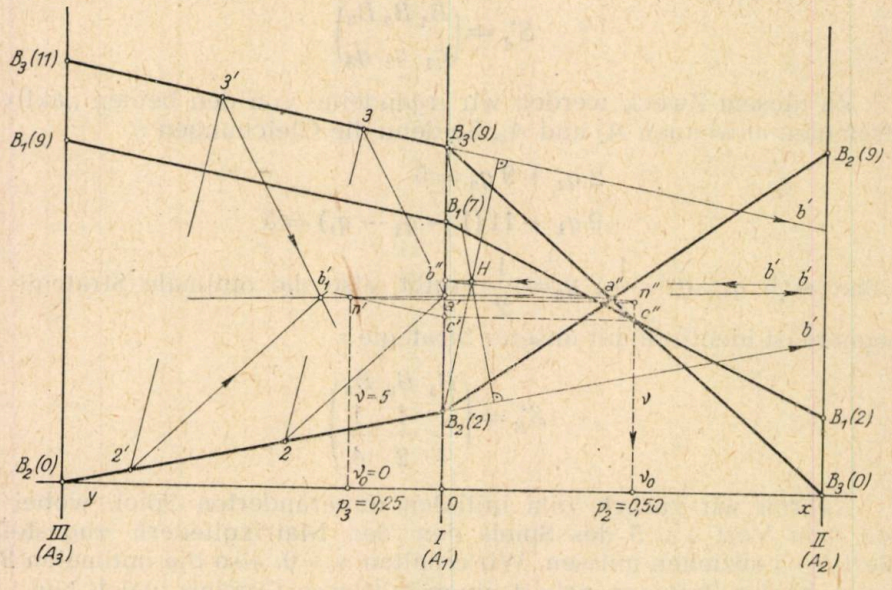


Fig. 1

Die drei Strategien A_1, A_2 und A_3 sind drei Punkte in der waagerechten Ebene wo A_1 direkt im Ursprung gewählt ist, und A_2 und A_3, bzw. auf die Axen x und y in einem Abstand der gleich der Einheit im Verhältnis zum Ursprung ist.

Auf der Axe I schreiben wir die Gewinne B_1 (7), B_2 (2), B_3 (9) bei der Strategia A_1, ein. Auf der Axe II notieren wir die Gewinne B_1 (2), B_2 (9), B_3(0) bei der Strategie A_2 und auf die Axe III schreiben wir die Gewinne B_1 (9), B_2 (10), B_3 (11) bei der Strategie A_3 ein.

Der Bündel der Ebenen der die Frequenzen p_1, p_2, p_3 der Strategien A_1, A_2, A_3 bestimmt führt uns zum Punkt $N\,(n', n'')$ welcher gleichzeitig auch den Wert ν des Spiels ergibt.

Dieser Ebenenbündel ist graphisch durch die Ebenenspuren auf den Flächenwinkel III-I-II dargestellt. Grundsätzlich können die Einfälle dieser Spuren gewählt werden, dienslich wäre es aber die passendsten Zustände welche für die Lösung die besten Werte liefern könnten zu wählen. Die Unzugänglichkeit einiger dieser Punkte (Einfallspunkte) auf dem Grundriss beeinflusst die Genauigkeit der Lösung nicht.

Die Grundrisseinfälle in der Abb. 1 sind folgende :

$a'' = B_2 \cap B_3$, $b' = B_2 \cap B_3$ unzugänglich $C'' = B_1 \cap B_3$, $e'_\infty = B_1 \cap B_3$.

Die ensprechenden Projektionen sind a'', b'' und c' die ohne Schwierigkeit durch Hilfslinien oder durch den graphischen unter Anwendung des Höhenschnittpunktes H gestützten Aufbau zu erhalten sind.

Weiter haben wir $n' = a'b' \cap c'\,e'_\infty$ woher n'' auf der Projektion $a''b''$ entspricht. Sodann haben wir den Punkt $N\,(n', n'')$ erhalten, der uns, am Grundriss gemessen, die Frequenzen $p_2 = 0{,}50$, $p_3 = 0{,}25$, $p_1 = 1 - 0{,}50 - 0{,}25$ der Strategien A_1, A_2, A_3 und den Wert $\nu = 5$ des Spiels liefert. Gleichfalls $\nu_0 = \nu - 5 = 0$ also die optimalen Strategien beider Partner sichern einen mittleren Gewinn egal Null. Die graphische Lösung deckt sich also mit der algebrischen Lösung, die oben erwähnt wurde.

2. Es soll die Lösung des von der Matrize bestimmten Spiels gesucht werden :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	−1	2	1
A_2	1	−2	2
A_3	3	4	−3

Für $L = 3$ erhalten wir die Matrize :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	4
A_2	4	1	5
A_3	6	7	0

Wir haben $\xi_1 = \frac{p_1}{\nu}$, $\xi_2 = \frac{p_2}{\nu}$, $\xi_3 = \frac{p_3}{\nu}$

Für $z_i = 0$ erhalten wir

$$\xi_1 = \frac{1}{12},\ \xi_2 = \frac{1}{14},\ \xi_3 = \frac{5}{42} \text{ woher } \phi = \frac{1}{\nu} = \frac{23}{84}.$$

Der Wert des Spiels $v=3{,}65$. Infolgedessen :

$$p_1 = \xi_1 v = \frac{1}{12} \cdot \frac{84}{23} = \frac{7}{23} = 0{,}30$$

$$p_2 = \xi_2 v = \frac{1}{14} \cdot \frac{84}{23} = \frac{6}{23} = 0{,}26$$

$$p_3 = \xi_2 v = \frac{5}{42} \cdot \frac{84}{23} = \frac{10}{23} = 0{,}43$$

Die optimale Strategie A ist $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0{,}30 & 0{,}26 & 0{,}43 \end{pmatrix}$

Die optimale Strategie des Gegners $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 0{,}30 & 0{,}26 & 0{,}43 \end{pmatrix}$

was aus einem der Gleichungssysteme resultiert :

$$\begin{cases} 4q_1 + q_2 + 5(1 - q_1 - q_2) = \dfrac{84}{23} \\ 6q_1 + 7q_2 = \dfrac{84}{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + 5q_2 + 4(1 - q_1 - q_2) = \dfrac{84}{23} \\ 6q_1 + 7q_2 = \dfrac{84}{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(1 - q_2 - q_3) + q_2 + 5q_3 = \dfrac{84}{23} \\ 6(1 - q_2 - q_3) + 7q_2 = \dfrac{84}{23} \end{cases}$$

Zur graphischen Lösung sollen wir den Grundriss in der Abb. 2 verfolgen, wo wir auf die Axen I, II, III die betreffenden Gewinne bei den Strategien A_1, A_2, A_3 und der Strategie B_j einschreiben .Z.B. schreiben, wir auf die Axe I die Gewinne B_1 (2), B_2 (4), B_3 (6). Analog gehen wir auch für die anderen Axen II und III vor.

Die Inzidenzen dieses Grundrisses sind folgende :

$a' = B_2 \cap B_3$
$b'' = B_2 \cap B_3$
$c' = B_1 \cap B_3$.

Wir erhalten a'', b' und c''. Weiter haben wir :
$n'' = a''b'' \cap c''e_1''$, dann n' auf $a'b'$.

Der Punkt $N(n', n'')$ bestimmt die Frequenzen

$p_2=0{,}26$, $p_3=0{,}43$, $p_1=1-0{,}26-0{,}43=0{,}31$ und den Wert $\nu=3{,}65$ des Spiels.

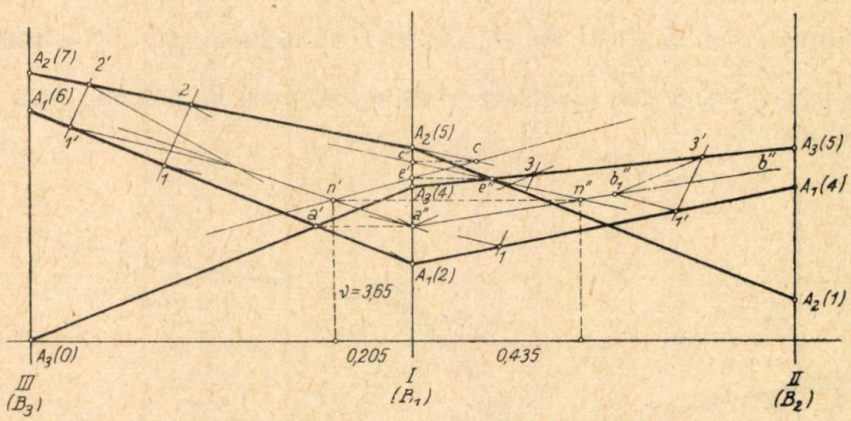


Fig. 2

Wenn wir jetzt den der Glieder a_{ij} zugegebenen Wert $L=3$ von der initialen Matritze abziehen, werden wir $\nu_0=0{,}65$ erhalten. Die graphische entsprich vollkommen der algebrischen Lösung.

Sollen wir an Hand dieses Beispiels zeigen, dass die Genauigkeit der graphischen Lösung gar nicht von anderen den Gliedern a_{ij} der Matritze angewandten Arbeitsgänge beeinflusst ist.

Betrachten wir nun die initiale Matrize welche den in diesem Beispiel gegebenen Spiel definiert, fügen wir hinzu den Elementen a_{ij} den Wert $l=4$ und erweitern wir mit 2 Gliedern die veränderte Matrize. Wir erhalten die Matrize :

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	6	12	10
A_2	10	4	12
A_3	14	16	2

Die graphische Lösung dieses Spiels ist im Grundriss der Abb. 3 beinhaltet. Die Einfälle dieses Grundrisses sind folgende :

$a'=B_2 \cap B_3$
$b''=B_2 \cap B_3$
$e''=B_1 \cap B_2$
$c'=B_1 \cap B_2$.

Es ergibt sich a'', b', e' und c''. Für N haben wir den Einfall $n''=c''e'' \cap a''b''$, dann n' auf $a'b'$.

Die Frequenzen der Strategien A_1, A_2, A_3 sind $p_2 = 0{,}26$ und $p_3=0{,}43$ woher $p_1=0{,}31$ ist. Der Wert ν des Spiels ist $\nu=\frac{9{,}3}{2}=4{,}65$, und $\nu_0=4{,}65-l=0{,}65$. Die graphische Lösung ist dieselbe mit der mehr oben bestimmten.

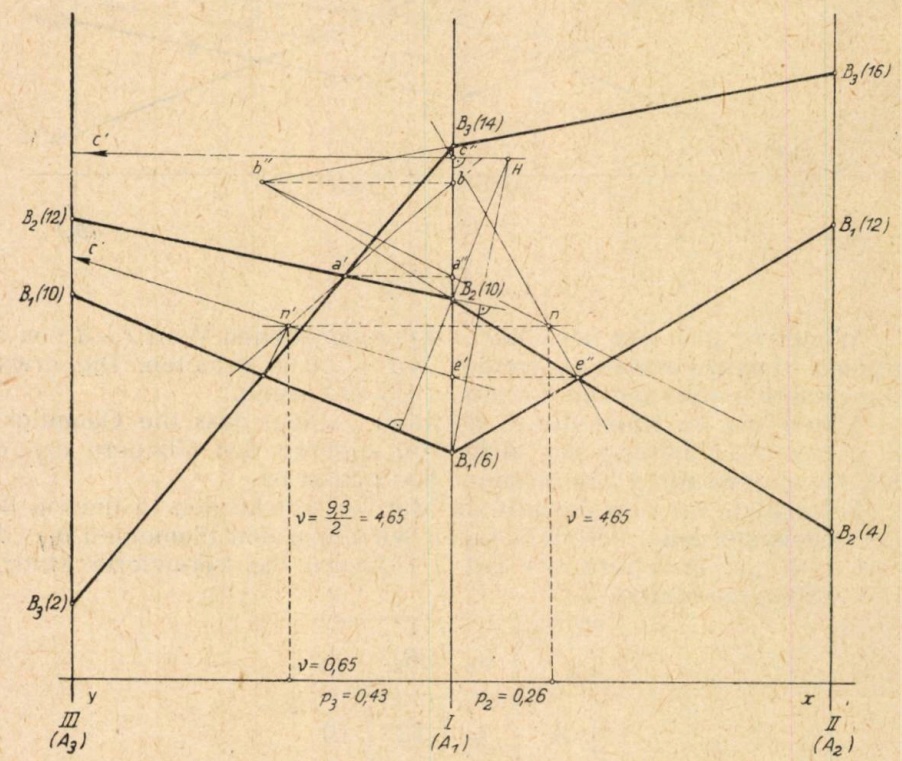


Fig. 3

Im Grundriss der Abb. 4 haben wir die Lösung des von der initialen Matritze dieses Beispiels gegebenen Spiels festgestellt ausgehend von der Strategie des Gegners. Mit anderen Worten haben wir auf die Axen I, II, III die entsprechenden Gewinne bei den Strategien B_1, B_2, B_3 und bei der Strategie A_j eingeschrieben. In diesem Fall $\eta_1+\eta_2+\eta_3=\frac{17+20+9}{168}=$

$=\frac{23}{84}=\frac{1}{\nu}$ woher $\nu=3{,}65$

$$\text{und } p_1 = \frac{17}{46} = 0{,}36$$

$$p_2 = \frac{20}{46} = 0{,}43$$

$$p_3 = \frac{9}{46} = 0{,}20$$

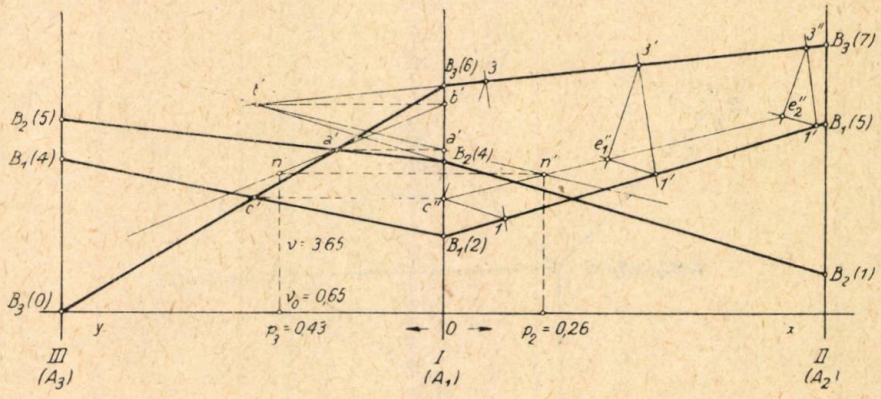


Fig. 4

3. *Andere Möglichkeiten der graphischen Bestimmung der Lösung*

Wie wir im ersten Teil der vorstehenden Arbeit erwähnt haben, können die Axen auf denen es notwendig ist die ensprechenden Gewinne der Strategien A_1, A_2, A_3 und der Strategie B_j einzutragen in verschiedenen Arten gewählt werden.

Im Folgenden zeigen wir andere zwei Wahlmöglichkeiten dieser Axen. In dieser Art werden effektiv zwei andere Methoden der graphischen Lösung dieser zwei Typen der matrizialen Spiele gegeben. Sollen wir uns zum matrizialen Spiel des ersten Beispiels wenden.

Im Grundriss der Abb. 5 ist die Stellung für eine jede der drei Axen I, II und III auf die sich die entsprechenden Gewinne B_1 (7), B_2 (2), B_3 (9) der Strategie A_1, die Gewinne B (2), B_2 (9), B_3 (0) bei Strategie A_2 und die Gewinne B_1 (9) B_2 (0) B_3 (11) der Strategie A_3.

Selbstverständlich wenn man die Inzidenzen des Grundrisses der Abb. 5 mit die Einfälle der Abb. 1 vergleicht, kommt man zur Schlussfolgerung, dass der Grundriss aus der Abb, 5 die Möglichkeit eines breiteren Vorgangsfeldes zur Lösung eröffnet, da er die unzugänglichen Inzidenzen beseitigt.

Auf diesem Grundriss müssen die Punkte g_3—g, f_1—f und e_3—e, c_1—c verfolgt werden. Aus dem Durchschnitt der Segmente ce und fg ergibt sich n welcher sodann die Frequenzen p_1, p_2 und p_3 der Strategien A_1,

A_2, A_3 ergibt. Zur Bestimmung des Wertes ν des Spiels befindet sich n_1 auf einer neuen senkrechten Projektion f_1g_1 einer der obengenanten Geraden.

Dieser Grundriss ist modular dort wo das Modul gleich der Einheit und gleich der beiden Katheten des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks den die Strategien A_1, A_2 und A_3 bilden.

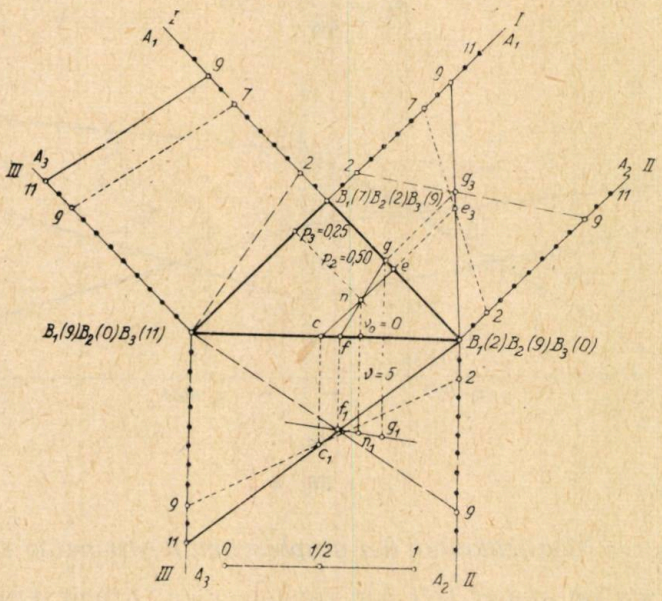


Fig. 5

Im Grundriss der Abb. 6 ist dasselbe Beispiel graphisch dadurch gelöst, dass eine parallele Projektion zu 45° der Axen I, II und III, auf die sich die entsprechenden Gewinne bei der Strategie A_1, A_2, A_3 und der Strategie B_j einschreiben, verwendet wurde.

Die Inzidenzen dieses Grundrisses beseitigen auch die unzugänglichen Inzidenzen.

Auf diesem Grundriss müssen die Punkte f_1—f, g_1—g und e_1—e, c_1—c. Aus dem Durchschnitt der Segmenten c_1e_1 und f_1g_1 wird sich n_1 ergeben, der aus der durchgeführten parallelen Projektion gewendet wird gibt n und den Wert ν des Spiels. Durch n kommt man weiter zu den Frequenzen p_1 p_2 und p_3 der Strategien A_1, A_2 und A_3 und damit ist das Problem gelöst.

Vom Standpunkt der Anzahl der exakten Dezimalen welche durch diese zwei neue Methoden bestimmt werden kann, sind keine Unterschiede, zumal wesentliche, gegenüber der ersten im ersten Beispiel

dargestellten Methode festzustellen. In allen dargestellten Fällen wurde die Lösung graphisch bestimmt uzw. mit zwei exakten Dezimalen, was vollkommen mit dem von der analytischen Lösung gegebenen Ergebnis entspricht.

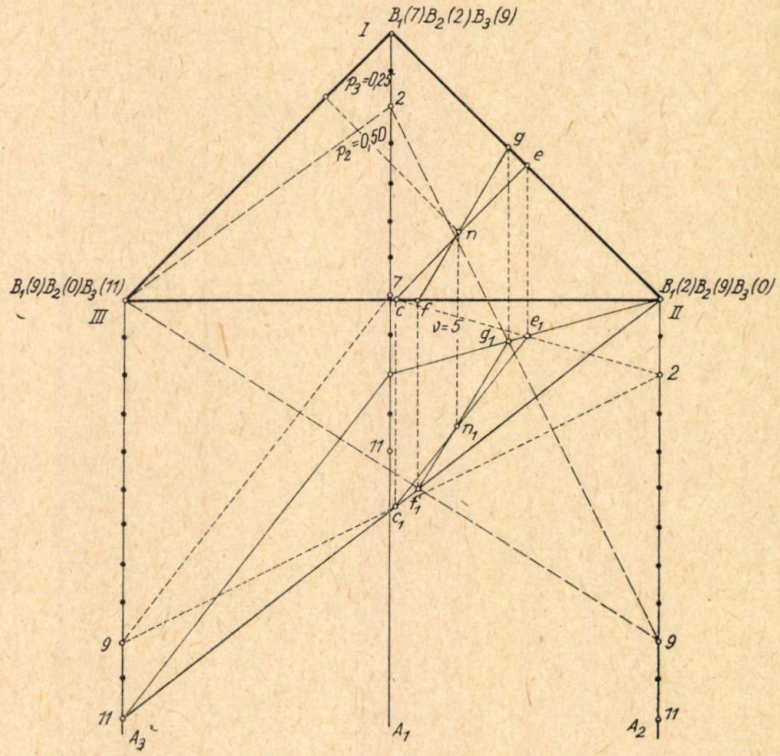


Fig. 6

Aus den behandelten Beispielen ist der Vorteil den die Methode der graphischen Lösung im Verhältnis zu den mühsamen Berechnungen der analytischen Lösung darstellt, klar ersichtlich.

Katheder der darstellende Geometrie
Polytechnisches Institut „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bukarest

LITERATUR

1. *Ventțel, E. S.* — Elemente de teoria jocurilor, 1959.

2. *Ciucu G., Iosifescu M., Theodorescu R.* — Teoria jocurilor, 1965.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

CHIMIE

C.Z.: 545.2 : 66.028 : 546.13 : 547.212 : 546.623.26-81

METODĂ VOLUMETRICĂ PENTRU DOZAREA DIMETILAMINOETANOL ÎN PREZENȚĂ DE 2 — DIETILAMINO — 1 CLORETAN

GRIGORE TEODORESCU

În nota de față s-a instituit o metodă argentometrică de dozarea acestor două substanțe, întrucît ele se află în prezență, în procesul de fabricare a unor produse farmaceutice.

Principiul metodei

Pe o probă se conține cele două substanțe, se dozează 2 dietilamino 1 clor etan cu soluție de azotat de argint 0,1 n după reacția :

$$Cl—CH_2—CH_2—N(C_2H_5)_2 + AgNO_3 = AgCl + CH_2 = CH — N(C_2H_5)_2 + HNO_3$$

Pe o a doua probă se dozează suma 2-dietil-amino-1 clor etan și dimetilaminoetanol astfel : se precipită cu soluție de sare Reinecke (tetracianato-diaminocromatul de amoniu) $[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]NH_4 \cdot H_2O$, conform reacției :

$$Cl — CH_2—CH_2—N(C_2H_5)_2 + HO—CH_2—CH_2—N(CH_3)_2 + 2\,[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]$$
$$NH_4 + H_2SO_4 = [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ NH(C_2H_5)_2 — CH_2 — CH_2 — Cl +$$
$$+ [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ NH(CH_3)_2 — CH_2 — CH_2 — OH + (NH_4)_2SO_4$$

Se dizolvă apoi precipitatul, după filtrare, cu acetonă și se adaugă exces de azotat de argint, cînd se formează :

$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ NH(C_2H_5)_2 — CH_2 — CH_2 — Cl + [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]$$
$$NH(CH_3)_2 — CH_2 — CH_2 — OH + 3\ AgNO_3 = AgCl + H_2O + 3HNO_3 + 2$$
$$[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ Ag + CH_2 = CH — N(C_2H_5)_2 + CH_2 = CH — N(CH_3)_2$$

După separarea precipitatului nou format se titrează excesul de azotat cu soluție de tiocianat de amoniu în prezență de indicator alaun feric.

* Manuscris predat la redacție la 15 martie 1967.

Modul de lucru

Pentru dozarea 2 dietilamino 1 clor etan se iau în flacoane de titrare 0,5→3 cm^3 soluție de analizat ce conține cele două substanțe se adaugă 25→30 cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n, cîteva picături de acid azotic, 1→2 cm^3 alaun feric și se titrează excesul de azotat de argint cu soluție de tiocianat de amoniu de factor cunoscut.

Diferența dintre numărul de cm^3 de $AgNO_3$ 0,1 n adăugat în exces și numărul de cm^3 de tiocianat de amoniu folosiți la retitrarea excesului, reprezintă numărul de cm^3 de $AgNO_3$ 0,1 n, legat de 2 dietil amino 1 clor etan.

La 1 cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n corespunde 0,0135 g 2 dietil amino 1 clor etan.

Pentru dozarea sumei se iau 0,5→2 cm^3 soluție de analizat ce conține cele două substanțe se acidulează cu acid sulfuric și se adaugă, prin agitare, în picătură soluție de reactiv 2% de sare Reinecke proapsăt preparată pînă cînd soluția de deasupra precipitatului rămîne intens colorată.

După completa separare a precipitatului se filtrează pe creuzet filtrant G_4, antrenîndu-se cantitativ precipitatul în creuzet, cu cîte 2→3 cm^3 soluție de sare Reinecke 1% de fiecare dată, după care se trage bine la trompă și se șterge fundul creuzetului cu hîrtie de filtru.

Se dizolvă apoi precipitatul cu acetonă direct pe creuzetul filtrant, prinzînd cantitativ filtratul în balon cotat de 100 cm^3, căruia i se adaugă 25→30 cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n și cîteva picături de acid azotic după care se aduce la semn cu apă distilată. Se filtrează conținutul balonului cotat pe filtru uscat, prinzînd filtratul în sticlă uscată, din care se iau cote parte de 20→25 cm^3 soluție, în flacon de titrare.

Se adaugă cîteva picături de acid azotic, 1→2 cm^3 alaun feric și se titrează cu soluție de NH_4SCN 0,1 n, de factor cunoscut.

Calculul se face după formula :

N—(M + 2 P) 0,0089 = grame dimetilaminoetanol în care

N = numărul de cm^3 0,1 n

M = numărul de cm^3 NH_4SCN 0,1 n

P = numărul de cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n cu care s-a dozat 2 dietil amino 1 clor etan.

Reactivii folosiți

— Soluție ce conține dimetilaminoetanol și 2 dietilamino 1 clor etan
— Soluție 2% sare Reinecke
— Soluție 1% sare Reinecke
— Soluție 0,1 n $AgNO_3$
— Soluție 0,1 n NH_4SCN
— Soluție alaun feric
— Soluție HNO_3 diluat
— Soluție H_2SO_4 diluat

Tabelă

Nr. crt.	cm^3 soluție de analizat	grame dimetil-amino-etanol	grame 2 dietil amino 1 clor etan	N cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n în exces	$2P$ cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n pentru 2 dietil amino 1 clor etan	M cm^3 NH_4SCN adăugat	cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n pentru dimetil-amino-etanol	grame dimetil-amino-etanol dozat	g/cm^3 dimetil-amino-etanol	Diferența
1	0,5	0,0223	0,0114	25	1,70	20,80	2,50	0,0223	0,0446	0,0000
2	1,0	0,0446	0,0229	25	3,40	16,60	5,00	0,0445	0,0445	0,0001
3	1,5	0,0669	0,0343	25	5,10	12,40	7,50	0,0667	0,0445	0,0001
4	2,0	0,0892	0,0458	25	6,80	9,20	10,00	0,0892	0,0446	0,0000
5	2,5	0,1115	0,0572	25	8,50	3,90	12,60	0,1109	0,0444	0,0002
6	3,0	0,1338	0,0687	30	10,20	4,80	15,25	0,1335	0,0445	0,0001
7	3,5	0,1561	0,0801	30	11,90	0,60	17,50	0,1559	0,0444	0,0002
8	4,0	0,1784	0,0916	35	13,60	1,45	19,95	0,1784	0,0446	0,0000

$2P$ = cm^3 $AgNO_3$ 0,1 n folosit la dozarea 2 dietil amino 1 clor etan. Se ia de două ori consumul rainecatului de 2 dietil-amino 1 clor etan.

S-a lucrat cu raport molar dimetilaminoetanol—2 dietilamino 1 clor etan de 1 : 0,33.

Rezultatele sînt concretizate în tabelă

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *Spacu, P., Teodorescu, Gr.:* O nouă metodă volumetrică de dozarea hidrazidei acidului izonicotinic. Rev. de chimie 1 1957.
2. *Teodorescu, Gr., Dinescu, A.,* Metodă colorimetrică pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic. Buletinul Institutului Politehnic București, Tomul XXVI, fasc. 1/1964.
3. *Teodorescu, Gr. Il. Niculescu,* Metode pentru dozarea 2-dietilamino 1-cloretan. Bul. Inst. pol. Gh. Gheorghiu-Dej, Tomul XXIX, fasc. 1 ; 1967.
4. *Teodorescu Gr., Il. Niculescu,* Metode de dozare pentru N-β Cloretil ciclohexilamina. Bul. Inst. pol. Gh. Gheorghiu-Dej, Tomul XXIX, fasc. 4, 1967.
5. *Teodorescu Gr.,* Metode de dozare a dimetilaminoetanolului. Bul. Inst. pol. Gh. Gheorghiui-Dej, Tomul XXIX, fasc. 5, 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

TEHNOLOGIE CHIMICĂ

C.Z. : 66.0 : 661.8...622 : 546.431 : 661.844

CONTRIBUȚII LA STABILIREA CONDIȚIILOR TEHNOLOGICE OPTIME ÎN PROCESUL DE PRODUCERE A CARBONATULUI DE BARIU DIN BARITINĂ *

B. MELEGA, I. GH. CONSTANTINESCU

Procedeul aplicat cel mai frecvent pentru producerea sărurilor de bariu este cel de reducere a baritinei la sulfură de bariu, în cuptoare rotative, cu ajutorul cărbunelui.

Pornind de la soluții concentrate de sulfură de bariu, se pot obține toți compușii de bariu avînd importanță tehnică.

Dezavantajele acestei metode sînt : pretențiile ridicate referitoare la puritatea materiei prime (92—95% $BaSO_4$) ; consumul mare de combustibil și impurificarea produselor obținute.

Prin această metodă nu se pot valorifica rentabil baritinele sărace în sulfat de bariu, nici chiar după o îmbogățire prin flotație, întrucît măcinarea implicată de acest procedeu este contraindicată pentru materiile prime ce urmează a fi reduse din cauza antrenării de către gaze a materialului pulverulent.

Transformarea directă a sulfatului de bariu în carbonat, în conformitate cu reacția :

$$BaSO_4 + Me^{I}_2CO_3 \rightleftarrows BaCO_3 + Me^{I}_2SO_4 \qquad (1)$$

prezintă posibilitatea producerii unui compus de bariu solubil în acizi, fără a se recurge la reducerea materiei prime. În general se preferă carbonatul de sodiu, ca fiind mai accesibil.

Această cale de producere a sărurilor de bariu a început să fie aplicată în ultima perioadă, datorită unei răsturnări a raportului de prețuri ale baritinei de înaltă puritate și a carbonatului de sodiu.

Procesul tehnologic de obținere a carbonatului de bariu prin acest procedeu constă, în principiu, în încălzirea baritinei fin măcinate cu o soluție concentrată de carbonat alcalin în diferite condiții de presiune și temperatură, urmată de filtrarea și spălarea fazei solide.

---

* Lucrare comunicată la cea de a III-a Conferință Națională de chimie Timișoara, iulie 1966.

Diferitele variante preconizate în literatura de brevete pot fi împărțite în 3 grupe :

— Procedee care folosesc un exces mare de carbonat alcalin (5—10 moli Na_2CO_3/mol $BaSO_4$), la presiune atmosferică sau inferioară celei de 5 ata.

— Procedee care folosesc un exces mai mic de carbonat alcalin (2—3 moli Na_2CO_3/mol $BaSO_4$) și o presiune ridicată (30—320 ata).

— Procedee care recurg la conversia în trepte, cu diferite excese de carbonat alcalin.

Toate aceste procedee obțin un produs final în care 50—98% din sulfatul de bariu conținut în baritină a fost transformat în carbonat. Gradul de utilizare al carbonatului de sodiu este mic.

O comparație a acestor procedee poate fi făcută pe baza studiului reacției

$$BaSO_{4(S)} + Na_2CO_{3(aq)} = BaCO_{3(S)} + Na_2SO_{4(aq)} \qquad (1')$$

Aceasta este o reacție heterogenă de dublu schimb, avînd un efect termic mic între 2 perechi de săruri reciproce. Constanta de echilibru a acestei reacții este o funcție complexă de temperaturi și concentrații :

$$K = \frac{[BaCO_3]\,[Na_2SO_4]}{[BaSO_4]\,[Na_2CO_3]} = f(t, c_i)$$

Cum soluția este saturată în compuși greu solubili, se poate scrie :

$$K = \frac{\int BaCO_3\,[Na_2SO_4]}{\int BaSO_4\,[Na_2CO_3]}$$

unde cu $\int$ s-au notat solubilitățile exprimate în moli/l.

Cum în sistemul complex constituit de soluțiile concentrate de carbonat și sulfat de sodiu determinarea concomitentă și directă a solubilității $BaSO_4$ și $BaCO_3$ este practic imposibilă, pentru exprimarea echilibrului se recurge de obicei la raportul de concentrații în faza lichidă $\Re = \frac{[Na_2SO_4]}{[Na_2CO_3]}$, care este de asemenea o funcție complexă de temperatură și concentrații.

Prin intermediul solubilităților $\int BaSO_4$ și $\int' BaCO_3$ raportul $\Re$ depinde, în măsura în care relația Thomson-Kelvin este valabilă, de dimensiunile particulelor solide, de tensiunea superficială, precum și de prezența în sistem a oricăror compuși străini capabili să influențeze solubilitatea sulfatului sau carbonatului de bariu.

Sistemul de săruri reciproce format din carbonații alcalini, sulfații alcalini și sulfatul și carbonatul de bariu, în mediu apos, a fost studiat de diferiți autori, în special pentru cazul în care metalul alcalin este potasiul. In general, cercetările teoretice s-au axat asupra unor concentrații mici de săruri solubile, la temperaturi scăzute, fapt care reduce mult aplicabilitatea în practica industrială a izotermelor de echilibru trasate.

Pentru cazul sistemului conținînd săruri de sodiu, cercetările sînt mai puțin numeroase.

Dintre cercetările cu aplicabilitate industrială, cele ale lui Basilov (1) sînt cele mai interesante, acestea indicînd raportul de echilibru $\mathfrak{R} = \frac{[Na_2CO_3]}{[Na_2SO_4]} = 3{,}07$.

În general, din punct de vedere practic, atingerea echilibrului nu prezintă nici un interes, deoarece timpul de reacție devine prea lung. Valoarea raportului $\mathfrak{R}$ poate fi luată doar drept un criteriu pentru alegerea excesului de reactanți.

Reacția (1') fiind slab endotermă, ridicarea temperaturii produce un efect favorabil asupra deplasării spre dreapta a echilibrului, în conformitate cu principiul lui Le Châtelier. Acest efect este amplificat de scăderea solubilității sulfatului de sodiu în mediu alcalin.

Cinetica reacției de transformare a sulfatului de bariu în carbonat de bariu se pare că nu a fost studiată sistematic de nici un autor.

De altfel, după cum au arătat cercetările noastre experimentale, un asemenea studiu ar fi avut în orice caz o valoare cu totul relativă, întrucît cinetica reacției de conversie — în afară de factorii chimici — este complicată de apariția unor factori pur mecanici, care fac ca rezultatele să fie practic neproductibile. Existența acestor factori pur mecanici nu este însă neglijabilă, întrucît aceștia joacă un rol primordial în cinetica de ansamblu a procesului.

Apariția factorilor amintiți este datorată mecanismului de transformare a sulfatului de bariu în carbonat, care constă în convertirea stratului superficial al granulelor de materie primă, fapt care încetinește procesul. Anticipînd asupra rezultatelor experimentale, se poate spune că toți factorii care contribuie la îndepărtarea acestui strat ajută implicit la accelerarea procesului.

În prezenta lucrare se vor expune o serie de rezultate ale unor încercări experimentale, în cadrul cărora, prin interpretarea premiselor teoretice referitoare la reacția fundamentală, enumerate mai sus, s-au căutat condițiile tehnologice cele mai prielnice conducerii procesului industrial de obținere a carbonatului de bariu din baritină.

În acest scop, ca deziderate de atins în cadrul unui proces tehnologic optim au fost considerate următoarele :

— un consum specific de carbonat de sodiu cît mai redus ;

— o viteză de reacție cît mai mare ;

— un volum al spațiului de reacție cît mai redus, deci o concentrație cît mai mare a soluțiilor de reactanți solubili și a suspensiilor.

Metodica experimentală

Studiul reacției de conversie a sulfatului de bariu în carbonat este constituit din următoarele faze :

— Studiul influenței raportului dintre reactanți asupra gradului de conversie la concentrație constantă a soluțiilor.

— Studiul influenței concentrației sărurilor solubile, la raport constant între reactanți.

— Cinetica reacției, la diferite raporturi între reactanți și diferite concentrații ale soluției.

— Studiul influenței adaosurilor catalitice și al efectelor mecanice asupra gradului de conversie și asupra cineticii reacției.

— Studiul retrogradării echilibrului și posibilitățile de împiedicare a acesteia.

Determinările au fost executate atît cu sulfat de bariu pur, cît și cu diferite sorturi de baritină.

Metodica experimentală tipică pentru toate determinările a constat în încălzirea unei cantități cîntărite de materie primă cu o cantitate măsurată dintr-o soluție de carbonat de sodiu, avînd concentrația determinată acidimetric, la fierbere ; pierderile prin evaporare au fost eliminate. După scurgerea intervalului de timp preconizat, suspensia se filtra sub vid, cît mai rapid, la cald, și se spăla pentru îndepărtarea urmelor de soluție. Gradul de conversie al sulfatului de bariu în carbonat se determină acidimetric, prin dizolvarea solidului în HCl 0,5 n și retitrarea excesului cu NaOH 0,5 n.

Tabelul 1

Nr. crt.	Conc. Na_2CO_3 g/l	Raport molar $R = \frac{Na_2CO_3}{BaSO_3}$	Gradul de transformare teoretic (α_t)*	Gradul de transformare real (α r)	Gradul de transformare relativ (α rel)	Temp. °C
1	174,5	2	0,491	0,417	0,850	103
2	174,5	3	0,737	0,597	0,815	103
3	174,5	4	0,984	0,745	0,758	103
4	174,5	5,5	$>1,00$	0,815	—	103
5	174,5	7	$>1,00$	0,844	0,49	103
6	190	2	0,491	0,352	—	102
7	190	3	0,737	0,530	—	102
8	190	4	0,984	0,672	—	102
9	190	5,5	$>1,00$	0,785	—	102
10	190	7	$>1,00$	0,783	—	102

$$*\alpha_t = \frac{\alpha n}{\alpha \text{ rel}}$$

Compararea metodei de mai sus cu cea de determinare a raportului $\frac{[SO_4]^{--}}{[CO_3]^{--}}$ în soluție a dus la constatarea că eroarea înregistrată este de ordinul $\pm 1\%$. Avînd în vedere multitudinea factorilor care influențează rezultatul acestor determinări, eroarea de mai sus este tolerabilă.

Discutarea rezultatelor experimentale

Influența raportului dintre reactanți asupra gradului de transformare a $BaSO_4$ în $BaCO_3$ este redată în tabela 1 și fig. 1.

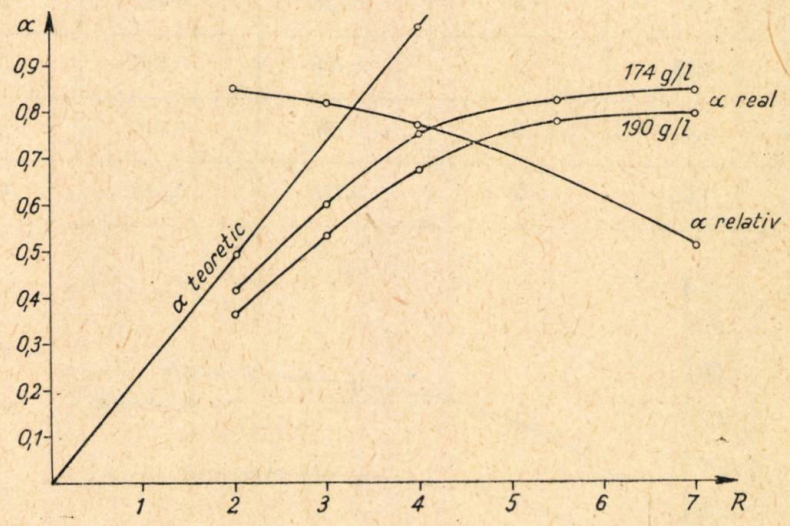


Fig. 1

Se observă o creștere monotonă a gradului de transformare a sulfatului de bariu în carbonat, prezentînd o ușoară inflexiune în regiunea corespunzătoare valorii raportului dintre reactanți $\frac{\text{moli } Na_2CO_3}{\text{moli } BaSO_4} \simeq 4$.

Se desprinde cu ușurință concluzia că folosirea unui exces de carbonat alcalin mai mare de 4 moli Na_2CO_3/mol $BaSO_4$ nu mai apare rațională. Acest lucru se observă și din examinarea alurii curbei reprezentînd gradul de transformare relativ $\alpha \text{ rel} = \frac{\alpha \text{ real}}{\alpha \text{ teoretic}}$, calculat pe baza datelor furnizate de Basilov. (Aceste din urmă curbe, pur ilustrative, trebuie luate în considerație sub rezerva existenței dependenței dintre raportul molar de echilibru $\mathcal{R} = \frac{[Na_2CO_3]}{[Na_2SO_4]}$ și concentrația soluțiilor).

Influența concentrației soluțiilor de Na_2CO_3 asupra gradului de transformare la raport molar constant este destul de neînsemnată în domeniul concentrațiilor care depășesc 1,3 M — (tabela 2 și (fig. 2) [1]. Același fenomen poate fi de altfel constatat din examinarea curbelor

Tabelul 2

Nr. crt.	Conc. molară CO_3Na_2 M/l	Raport molar CO_3Na_2/SO_4Ba	Gradul de transformare αt	Gradul de transformare real αr	Gradul de transformare relativ α rel
1	0,84	3	0,738	0,431	0,584
2	1,13	3	0,738	0,538	0,730
3	1,40	3	0,738	0,569	0,716
4	1,65	3	0,738	0,575	0,790

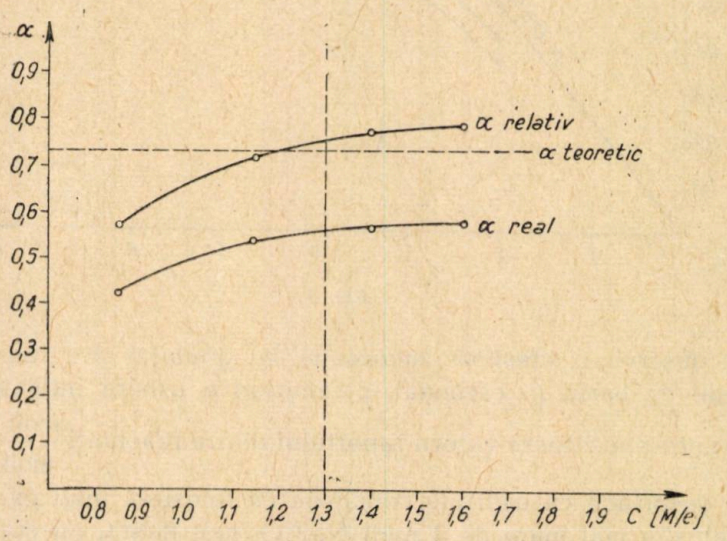


Fig. 2

din fig. 1). Cum însă creșterea raportului de transformare este monotonă și crescătoare o dată cu creșterea concentrației de carbonat alcalin, se impune concluzia că folosirea concentrațiilor ridicate este avantajoasă, întrucît acest lucru atrage o folosire mai rațională a spațiului de reacție.

După cum am mai remarcat, studiul cineticii reacției de transformare a sulfatului de bariu în carbonat, și cu atît mai mult a celui conținut în baritină, prezintă caracteristica proprie tuturor reacțiilor hete-

rogene de acest tip, și anume pe cea a nereproductibilității datelor, uneori chiar pentru aceleași materii prime, în condiții experimentale (aparent) identice, și imposibilității extinderii cantitative a rezultatelor de la unele condiții experimentale la altele. Acest lucru se datorează, după cum am mai arătat, existenței factorilor mecanici, granulometrici, geometrici, precum și importanței influenței prezentate de „preistoria" substanței solide față de factorii cinetici.

Din această cauză, în cele ce urmează vom discuta numai aspectul calitativ, general, al datelor cinetice obținute în decursul cercetărilor.

Pentru sulfatul de bariu pur în prima parte a reacției, viteza de reacție este practic constantă și procesul evoluează destul de rapid. După atingerea unui anumit grad de transformare, procesul se încetinește treptat și reacția intră într-o nouă fază, în care viteza de reacție este practic constantă și foarte mică (tabela 3 și fig. 3).

Tabelul 3

Nr. crt.	Conc. Na_2CO_3 g/l	Raport molar $\frac{Na_2CO_3}{BaSO_4}$	Timp δ — ore	Gradul de transformare αt teoretic	Grad de transformare αr real
1	278	4	0,166	1	0,36
2	278	4	0,5	1	0,64
3	278	4	1	1	0,70
4	278	4	2	1	0,75
5	278	4	3	1	0,79
6	278	4	4	1	0,81
1	278	3	0,5	0,735	0,44
2	278	3	1	0,735	0,58
3	278	3	2	0,735	0,64
4	278	3	3	0,735	0,67
1	278	4	0,166	1	0,4
2	278	4	0,5	1	0,68
3	278	4	1	1	0,73
4	278	4	2	1	0,78

În cazul baritinelor naturale de diferite proveniențe, alura generală a curbelor rămîne aceeași, cu deosebirea că panta porțiunilor amintite este mai mică, iar inflexiunea apare la un grad de transformare mai mic (tabela 4 și fig. 4).

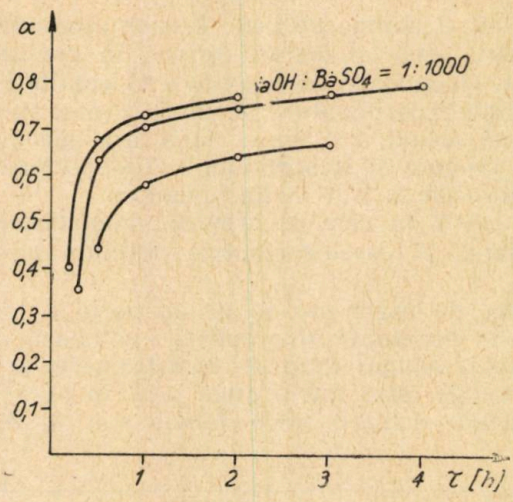


Fig. 3

Tabelul 4

Nr. crt.	Conc. Na_2CO_3 g/l	Raport molar $R = \frac{Na_2CO_3}{BaSO_4}$	Timp δ — ore	Moli $\frac{NaO_4H}{Na_2CO_3}$	Grad de transformare teoretic αt	Grad de transformare real αr
1	278	4	0,5	0,04	1	0,28
2	278	4	1	0,04	1	0,46
3	278	4	2	0,04	1	0,56
1	278	4	0,5	—	1	0,19
2	278	4	1	—	1	036
3	278	4	3	—	1	0,50
4	278	4	4	—	1	0,62
1	278	4	0,5	—	1	0,16
2	278	4	1	—	1	0,29
3	278	4	2	—	1	0,40
4	278	4	4	—	1	0,49
1	174,5	3,5	0,5	—	0,350	0,12
2	174,5	3,5	1	—	0,850	0,25
3	174,5	3,5	2	—	0,850	0,32
4	174,5	3,5	3	—	0,850	0,35

De asemenea, viteza de reacție în faza a 2-a este sensibil mai mare decît pentru $BaSO_4$ pur.

Se poate presupune că în prima parte, rapidă, a reacției, aceasta are un caracter oarecum topochimic, suprafața reactantului ($BaSO_4$) fiind liberă. În momentul în care suprafața liberă a reactantului este complet

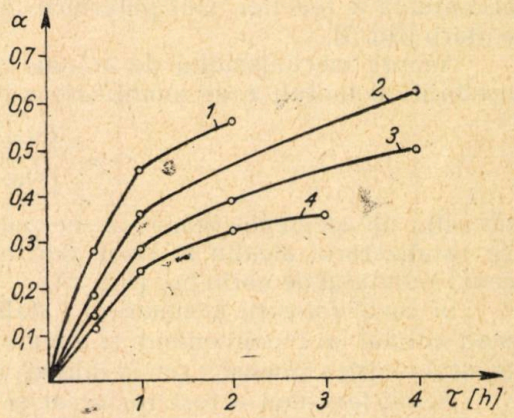


Fig. 4

1. SO_4Ba — Dobrogea NaOH:SO_4Ba 1 : 25
2. SO_4Ba — R.P. Bulgaria
3. SO_4Ba — Dobrogea
4. SO_4Ba — Dobrogea R=3,5

blocată de produsul de reacție puțin solubil ($BaCO_3$) începe faza a 2-a a reacției, în care procesele de difuzie joacă un rol preponderent, fapt care se observă clar din alura curbelor cinetice. Partea mai mică a acestor curbe, în cazul baritinelor naturale, se explică prin influența factorilor mineralogici, cum ar fi cristalinitatea, existența unor alte minerale în rețea, care duc la micșorarea reactivității sulfatului de bariu din baritină în comparație cu sulfatul de bariu precipitat.

Considerente simple ne fac să constatăm că granulometria baritinelor are de asemenea o influență asupra formei acestor curbe, fapt de care s-a ținut seama în cursul determinărilor experimentale.

Cele expuse mai sus conduc la ideea că labilizarea sau depărtarea stratului de produs al reacției de pe suprafața reactantului va determina o creștere a vitezei de reacție.

Prin simpla agitare a suspensiei cu ajutorul a diferite tipuri de agitatoare (magnetic, cu elice) s-a obținut o creștere a vitezei de reacție cu 10—20% față de cea înregistrată în cazul fără agitare. Cum factorii mecanici introduși de agitarea suspensiei la suprafața solidului nu sînt exprimabili în mod obiectiv și cum rezultatele prezintă în acest caz o dispersie mare, ele nu au mai fost reprezentate în curbe și tabele.

Se impune însă ideea de introducere a unei măcinări continue a suspensiei în timpul conducerii procesului, pentru îndepărtarea imediată și integrală a peliculei de produs al reacției de pe suprafața particulelor de reactant sau introducerea în același scop a unui cîmp ultrasonor. Un asemenea procedeu energic de eliberare a suprafeței de reacție este mult mai eficient decît transmiterea unui impuls particulelor prin intermediul lichidului, ca în cazul agitării.

În afară de factorii mecanici care pot să producă modificarea cineticii procesului, există și factori chimici capabili să joace același rol.

Într-adevăr, după o serie de tatonări, am reușit să constatăm că introducerea în sistem a unei concentrații catalitice de hidroxid alcalin (în raportul molar 1 : 1 000 față de carbonatul alcalin) produce o accelerare accentuată a reacției, mai puternică chiar decît cea observată în cazul agitării (fig. 3).

Asupra mecanismului de acțiune al acestor adaosuri, cît și asupra posibilității teoretice de modificare a raportului molar la echilibru

$$\mathcal{R} = \frac{[Na_2CO_3]}{[Na_2SO_4]}$$

de către un asemenea adaos, nu ne putem încă pronunța. Efectul produs de catalizatorul alcalin în cazul baritinelor este mai accentuat decît în cazul sulfatului de bariu pur (fig. 3,4).

În cazul folosirii adaosurilor catalitice de hidroxid alcalin apare în mod normal un inconvenient, și anume retrogradarea echilibrului în momentul răcirii suspensiei sau al diluării ei.

Acest fenomen a fost remarcat și de alți cercetători în cazul conducerii reacției sub presiune. Pentru evitarea retrogradării, acești autori recomandă separarea rapidă, la cald, a fazei solide de lichid. Această măsură prezintă însă numai o valoare relativă, întrucît astfel de separare nu poate fi executată nici instantaneu și nici complet.

Tocmai din aceste motive, efectuarea unor cercetări sistematice asupra reacției (1) sub presiune prezintă dificultăți foarte serioase, întrucît datele obținute în autoclavele normale, după cum am reușit să constatăm, prezintă o dispersie care le face inutilizabile.

Pentru eliminarea acestui fenomen nedorit, am încercat un procedeu original, și anume „blocarea" suprafeței reactanților solizi cu ajutorul unui agent superficial activ (aril-alchil-sulfonați și stearați). Prin aplicarea acestui procedeu efectele retrogradării sînt mult reduse.

Concluzii

Rezumînd cele expuse mai sus, pentru conducerea rațională a procesului de conversie a sulfatului de bariu în carbonat este necesară respectarea următoarelor condiții :

— Un raport molar între reactanți cuprins între 3...4 moli Na_2CO_3/mol $BaSO_4$.

— O concentrație a soluției de Na_2CO_3 (cca 1,3 molar) cît mai apropiată de saturație. Concentrația este însă, de obicei, limitată de considerente tehnologice (fluiditatea suspensiei).

— Utilizarea unei granulații cît mai fine a baritinei, (0,125 mm).

— Introducerea unor adaosuri catalitice de 2/1 000 mol NaOH/mol Na_2CO_3.

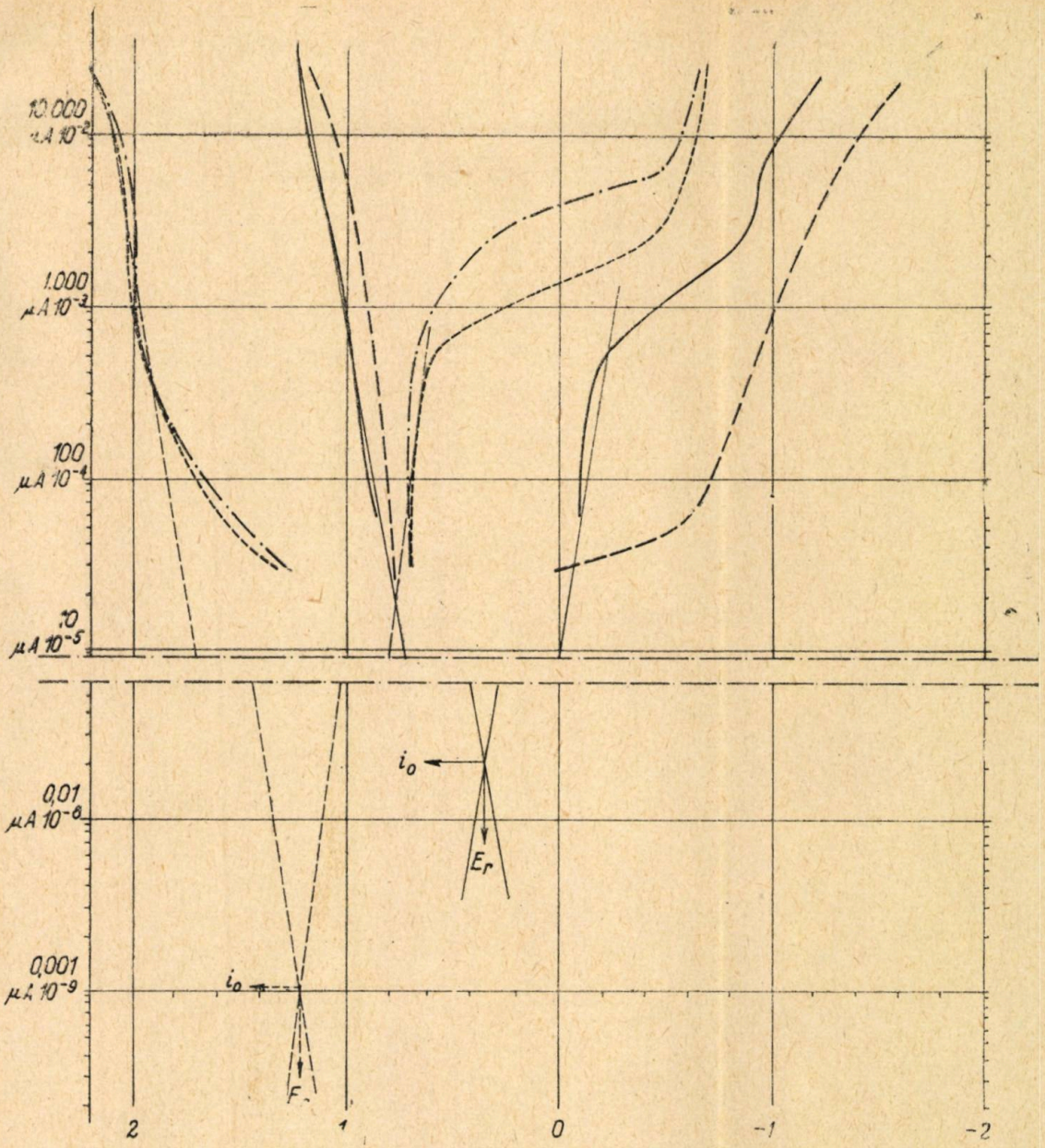


Fig. 1 — Liniile Tafel pentru electrodul $Pt/_{20}$ în soluție de 1,7 N H_2SO_4 și în soluție de 1,7 N KOH

——— Pt/O_2 în sol KOH 1.7 N cu barbotare de O_2
– – – – Pt/O_2 în sol KOH 1.7 N cu barbotare de N_2
- - - - - - - - Pt/O_2 în sol H_2SO_4 1.7 N cu barbotare de O_2
—.—.—.— Pt/O_2 în sol H_2SO_4 1.7 N cu barbotare de N_2

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

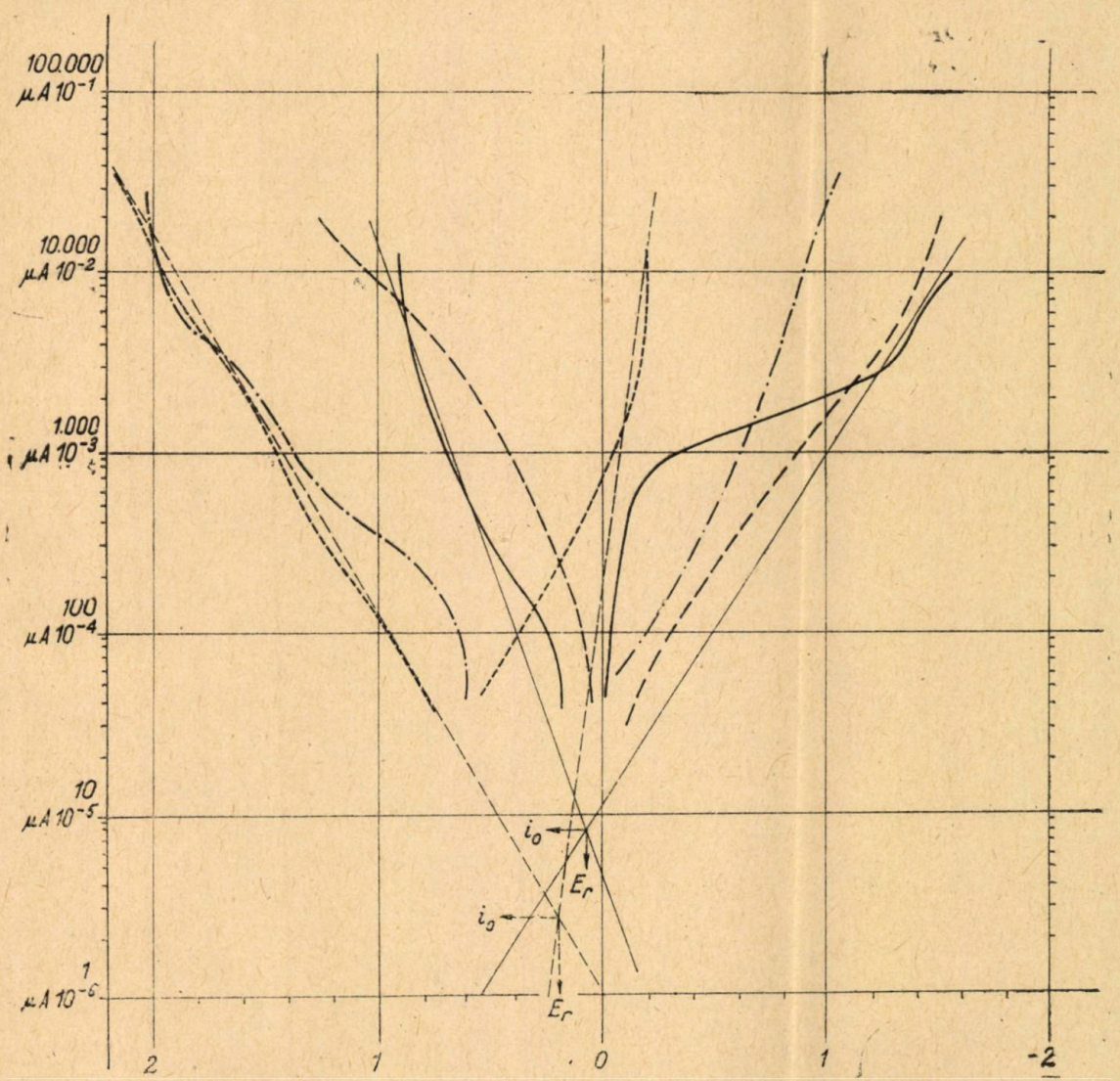


Fig. 2 — Liniile Tafel pentru electrodul de grafit/$_{O2}$ în soluți de 1,7 N H_2SO_4 și 1,7 N KOH

——— Grafit/O_2 în sol KOH 1.7 N cu barbotare de O_2
— — — — Grafit/O_2 în sol KOH 1.7 N cu barbotare de N_2
- - - - - - - - Grafit/O_2 în sol H_2SO_4 1.7 N cu barbotare de O_2
—.—.—.— Grafit/O_2 în sol H_2SO_4 1.7 N cu barbotare de N_2

10 minute. După acest timp s-a fixat o altă densitate de curent și s-a măsurat din nou potențialul electrodului în timp de 10 minute.

La densități de curent mari variația de potențial în acest interval de timp este relativ mică (cîțiva milivolți) așa că pe diagrame s-au înregistrat ambele puncte, de multe ori acestea coincid.

La densități de curent mici, variațiile de potențial fiind mai mari (pînă la 20 mV sau mai mult) s-a luat ca punct reprezentat pe diagramă media dintre potențialul de la începutul determinării și cel de la sfîrșitul celor 10 minute.

În fig. 1 și 2 sînt prezentate diagramele Tafel pentru electrodul Pt/O_2 și grafit/O_2 ridicate atît din acid sulfuric 1,7 N cît și din soluție de KOH 1,7 N. Diagramele sînt înregistrate în modul următor : în abscise s-au trecut valorile tensiunii în volți (pozitive și negative) iar în ordonată s-au trecut valorile densității de curent. Diagramele sînt însă reprezentate semilogartimic, așa că valorile tensiunii reprezintă valorile real măsurate iar în ordonată sînt trecute densitățile de curent la valoarea lor reală, însă așezate în scară logaritmică.

Pentru electrodul de Pt/O_2 liniile Tafel (fig. 1 și 2) (anodică și catodică) se intersectează la $E_r = 1{,}22$ volți cu un $i_0 = 1{,}2.10^{-9}$ A/cm², în mediu de acid sulfuric 1,7 N. Panta liniei Tafel anodice este egală cu 0,120 V și pentru reducerea catodică cu 0,100 V. În mediu de KOH în mod similar pentru degajarea anodică a oxigenului și reducerea catodică a lui rezultă un potențial reversibil la care se întîlnesc linii Tafel de $E_r = 0{,}34$ V și un curent de schimb, $i_0 = 2{,}2.10^{-8}$ A/cm².

Pentru electrodul de Pt/O_2 în mediu de hidroxid de potasiu rezultă o pantă 0,160 volți pentru partea anodică și de 0,140 V pentru partea catodică. În fig. 2 sînt prezentate aceleași constante pentru electrodul grafit/O_2 atît din mediu acid sulfuric cît și din mediu de hidroxid de aceeași concentrație ca și soluțiile din care s-au ridicat curbele pe electrodul Pt/O_2. În acest caz în soluția de H_2SO_4 liniile Tafel anodice și catodice se întîlnesc la un potențial reversibil $E_r = 0{,}200$ volți și $i_0 = 2{,}6.10^{-6}$ A/cm². Pantele Tafel sînt 0,415 V pentru descărcarea anodică a oxigenului și 0,114 V pentru reducerea catodică a lui. În mediu de hidroxid de potasiu 1,7 N rezultă un potențial reversibil $E_r = 0{,}080$ V și un curent de schimb $i_0 = 8.10^{-6}$ A/cm². Pantele Tafel în acest caz sînt 0,250 V pentru degajarea anodică a oxigenului și de 0,425 volți pentru reducerea catodică a oxigenului.

Pe graficele prezentate în fig. 3 este arătată variația potențialelor de repaus după ce electrodul a fost polarizat anodic sau catodic în funcție de timp.

La 20 minute după polarizare s-a determinat curentul de scurtcircuit (fig. 3) pe care-l poate da electrodul polarizat față de un electrod auxiliar de platină care s-a găsit în celula de electroliză.

După cum rezultă din grafic cel mai mare curent de scurtcircuit se obține pe electrodul de grafit : 560 μA/16 mm² la degajarea hidrogenului din soluție de hidroxid de potasiu la 10 minute de la încetarea polarizării.

În aceeași soluție degajarea oxigenului dă un curent de scurtcircuit tot pe grafit mai mic 100 μ A/16 mm^2 la 20 de minute de la încetarea polarizării.

În mediu acid la 10 și 15 minute de la încetarea polarizării s-au găsit pe electrodul de grafit curenți de scurtcircuit egali : 200 μ A/16 mm^2.

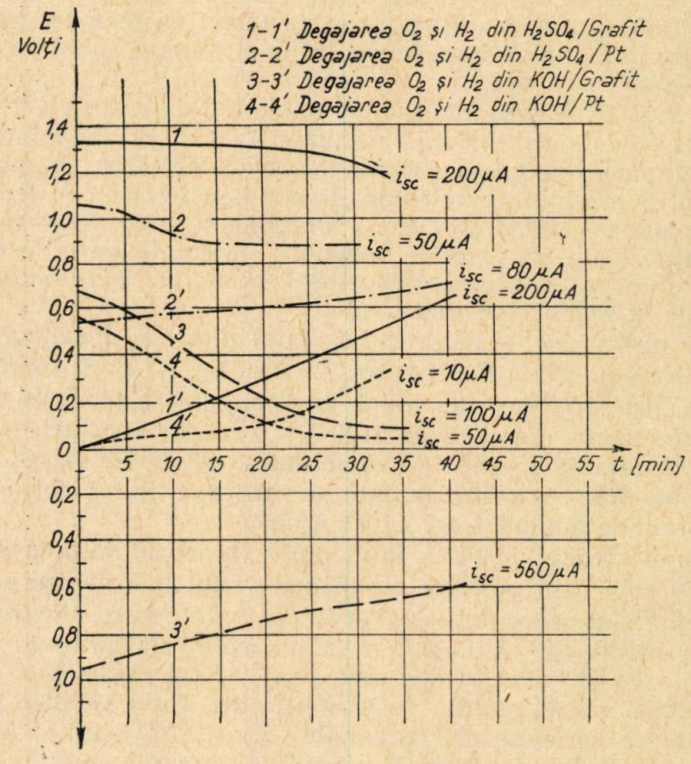


Fig. 3 — Potențialele de repaos și curenții de scurtcircuit pe electrozii de Pt și grafit.

Pe electrodul de platină curenții de scurtcircuit de asemenea sînt diferiți. Astfel în mediu acid după terminarea polarizării la 20 de minute curentul de scurtcircuit este de 50 μ A/16 mm^2 pentru degajarea oxigenului și 80 μ A/16 mm^2 pentru degajarea hidrogenului după 30 minute de la încetarea polarizării, ceea ce arată că oxigenul se desprinde mai repede de suprafața platinei în mediu acid decît hidrogenul.

În mediu alcalin curentul de scurtcircuit pe electrodul de platină este de 200 μ A/16 mm^2 pentru degajarea oxigenului și de 10 μ A/16 mm^2 pentru descărcarea hidrogenului, deci fenomenul este tocmai invers față de comportarea în mediu acid a electrodului de platină.

Potențialele de repaus care se obțin după polarizarea electrozilor anodic sau catodic se obțin din prelungirea curbei pînă ce întretaie axa potențialelor.

Cel mai ridicat potențial de repaus îl prezintă grafitul în mediu acid la degajarea oxigenului după ce acesta a fost polarizat anodic la 1,32 volți, apoi urmează platina tot polarizată anodic în mediu acid 1,06 volți, urmat de potențialul de repaus al grafitului polarizat anodic în soluție de hidroxid de potasiu 0,67 volți și în sfîrșit potențialul de repaus al electrodului de platină polarizată anodic în soluție de hidroxid de potasiu de 0,560 volți.

După ce electrozii se polarizează catodic atît în soluție acidă cît și alcalină se obțin următoarele potențiale de repaus : — 0,96 volți pentru degajarea hidrogenului pe grafit din soluție de hidroxid de potasiu cînd se obține și cel mai mare curent de scurtcircuit 560 μ A/16 mm^2 urmat de platină în mediu de hidroxid aproape + 0,01 volți cînd se obține și cel mai mic curent de scurtcircuit 10 μA/16 mm^2 la 15 minute de la terminarea polarizării catodice.

În continuare urmează potențialul de repaus obținut pe electrodul de grafit polarizat catodic în mediu de H_2SO_4 1,7 N, 0,02 V care este foarte apropiat de cel al platinei polarizată catodic în mediu de hidroxid de potasiu și în sfîrșit potențialul de repaus al electrodului de platină polarizat catodic în mediu acid care este de + 0,540 volți cînd se obține un curent de scurtcircuit de 80 μ A/16 mm^2.

Discuție

O linie Tafel este definită prin ecuația $E = a + b \log (i)$ unde E este potențialul de electrod referit la un potențial ales în mod arbitrar, (i) este densitatea de curent care corespunde reacției anodice sau catodice ce are loc la interfața electrod soluție, iar a și b sînt constante.

Se știe că ecuația cinetică generală de electrod poate să fie scrisă sub forma :

$$i = \vec{k}\, C_R \exp^{\frac{-\alpha nFE}{RT}} - \overleftarrow{k}\, C_{Ox} \exp^{\frac{(1-\alpha)\, nFE}{RT}} \qquad (1)$$

unde i este densitatea de curent, $\vec{k}$ și $\overleftarrow{k}$ sînt constante specifice de viteză, C_R și C_{Ox} sînt concentrațiile reducătorului și oxidantului în masa soluției, n numărul electronilor schimbați în reacție de electrod, α este factorul de simetrie care dă fracțiunea din potențialul total de electrod care contribuie la mersul reacției de la stînga la dreapta (adesea $\alpha = 1/2$), E este potențialul, F, R și T avînd valorile cunoscute.

La echilibru vitezele reacțiilor înainte și înapoi sînt egale și astfel densitățile de curent anodice și catodice i_a și i_c sînt egale cu :

$$i_0 = i_c = i_a = \overleftarrow{k}\, C_R \exp^{\frac{-n\alpha FE_e}{RT}} = \overleftarrow{k}\, C_{Ox} \exp^{\frac{(1-\alpha)nFE_e}{RT}} \qquad (2)$$

Așa cum s-a demonstrat [11], viteza reacției catodice i_c se poate scrie :

$$i_c = i_0 \exp^{\frac{-n\alpha F\eta}{RT}} - \exp^{\frac{(1-\alpha)nF\eta}{RT}} \qquad (3)$$

și viteza reacției anodice i_a

$$i_a = i_0 \exp^{\frac{(1-\alpha)nF\eta}{RT}} - \exp^{\frac{-n\alpha F\eta}{RT}} \quad (4)$$

unde $\eta = E - E_r$.

Acestea sînt ecuațiile cinetice pentru cazul unui electrod simplu.

În cazul unui polielectrod, sistemul nu este la echilibru ci la o stare stabilă, deoarece sînt două reacții de electrod fiecare cu curentul său de schimb respectiv.

Pentru electrodul Pt/O_2 în soluție de H_2SO_4, Hoare [3] a dedus o ecuație asemănătoare ecuației cineticii de electrod, ținînd seama de suprafața electrodului acoperită cu gaz. Pantele Tafel stabilite în acest caz au fost 0,122 pentru η_a și 0,095 pentru η_c, curentul de schimb $i_0 = 1{,}3.10^{-9}$ A/cm$_2$.

Hoare [3] a sugerat pentru degajarea anodică a oxigenului mecanismul $(H_2O)_{ads} \rightarrow (OH)_{ads} + H^+ + e$ (5)

și pentru reducerea catodică a oxigenului :

$$(O_2)_{ads} + e \rightarrow (O_2)_{ads} \quad (6)$$

Potențialul reversibil al oxigenului se observă numai pe o suprafață complet acoperită și procesul electrochimic total este :

$$O_2 + 4\,H^+ + 4\,e \rightleftarrows 2\,H_2O \quad (7)$$

La reducerea catodică a oxigenului apare ca intermediar formarea apei oxigenate, dar concentrația de 10^{-5}M a acesteia nu influențează cinetica totală.

Pentru supratensiunea catodică, Hoare [3], a aplicat ecuația :

$$\eta_c = \frac{2{,}3\,RT}{n\alpha F} \log i_0 - \frac{2{,}3\,RT}{n\alpha F} \log i_c \quad (8)$$

iar pentru supratensiunea anodică η_s, și în mod similar :

$$\eta_a = \frac{2{,}3\,RT}{n\,(1-\alpha)\,F} \log i_0 + \frac{2{,}3\,RT}{n\,(1-\alpha)\,F} \log i_a \quad (9)$$

Pentru supratensiunea catodică la densitatea de 10^{-3} A/cm^2 se obține un curent limită și sistemul este polarizat la descărcarea ionilor de hidrogen.

Concluzii

În lucrarea noastră s-a găsit, așa cum s-a arătat, pentru electrodul de platină în soluție de acid sulfuric $E_r = 1{,}22$ V, potențial similar cu cel găsit de Hoare [3]. La acest potențial din liniile Tafel rezultă un $i_0 = 1{,}2.10^{-9}$ A/cm^2, care este destul de apropiat de cel găsit în literatură. Similar s-au trasat liniile Tafel pentru electrodul de grafit. Comparînd aceste date re-

zultă că electrodul de grafit este un catalizator mai activ decît platina atît la reacția de descărcare a oxigenului cît și la reacția de reducere catodică a lui.

Totodată curenții de scurtcircuit care rezultă din degajarea gazelor de pe electrozii de grafit și de platină ne arată că aici nu este vorba de oxizi cu combinația bine definită ci este vorba numai de gaz care se adsoarbe sau se desoarbe de pe electrod.

Apa oxigenată care apare ca intermediar la reducerea catodică a oxigenului pe platină la o densitate de curent de 2.10^{-3} A/cm^2, apare și la reducerea catodică a oxigenului pe grafit la o densitate de curent 4.10^{-3} A/cm^2.

Se poate considera că mecanismul pe electrodul de grafit este asemănător cu cel desfășurat pe electrodul de platin.

Pentru elucidarea mecanismului de reacție, considerăm însă, că numai liniile Tafel nu sînt suficiente și sînt necesare și măsurări de capacitate a stratului dublu electric, determinări care pot aduce informări prețioase în acest domeniu.

BIBLIOGRAFIE

1. *Hoare P. J.*, J. Electrochemical Society, 109, 859, 1962.
2. *Hoare P. J.*, J. Electrochemical Society, 110, 1019, 1963.
3. *Hoare P. J.*, J. Electrochemical Society, 112, 608, 1965.
4. *Atanasiu I., Licã S.*, Bult. Inst. Pol. București, Tom. 20, 61, 1958.
5. *Hampel A.*, The Encyclopedia of Electrochemistry, Reinhold Publishing Corporation, 1097, 1964.
6. *Bockris O'M. J.*, Modern aspects of Electrochem. Vol. 1, 180, 1954.
7. *E. Lange și alții*, Z. Electrochem., 63, 74, 1959.
8. *Hickling I.*, Dissc. Faraday Soc., 1, 236, 1947.
9. *Dahms H.*, and *Bockris, O'M. J.*, J. Electrochem. Soc., 111, 728, 1964.
10. *Bockris, O'M. J. și alții*, Electrochimica Acta 4, 325, 1961.
11. *M. W. Breiter*, Electrochim. Acta, 9, 441, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

HIDRAULICĂ

C.Z. : 532.13:512.6:533:531.1

DÉFINITION DU VECTEUR-VITESSE DE RÉFÉRENCE DANS LES RÉSEAUX CIRCULAIRES DE PROFILS, EN MOUVEMENT PLAN IRROTATIONNEL *)

D. TAȘCĂ, G. ZIDARU

1. Introduction

Dans les réseaux linéaires de profils, le vecteur-vitesse de référence est la vitesse asymptotique $\bar{v}_\infty$, que l'on détermine en tant que que moyenne vectorielle

$$\bar{v}_\infty = \frac{\bar{v}_{\infty am} + \bar{v}_{\infty av}}{2} \tag{1}$$

des vitesses à grande distance du réseau, en amont et en aval. En effet, le second membre de (1) représente bien la mi-diagonale du parallélogramme en question.

La vitesse $\bar{v}_\infty$ connue, la résultante hydro-aérodynamique $\bar{F}$ est parfaitement définie : en module $|\bar{F}| = \varrho\, v_\infty \Gamma$ et en direction $\bar{F} \perp \bar{v}_\infty$; le sens de $\bar{F}$ correspond à la rotation du vecteur $\bar{v}_\infty$ d'un angle droit en sens inverse de la circulation Γ (Théorème de Kutta-Joukowsky, généralisé).

Par contre, dans le réseaux circulaires de profils, il ne peut y avoir de vitesse asymptotique, par conséquent le rôle de vitesse de référence doit être attribué à un autre vecteur : c'est le but du présent mémoire.

2. Définition

La méthode des singularités, appliquée au cas le plus simple, conduit au modèle mathématique d'un mouvement dû à une source ponctuelle placée à l'origine du référentiel (à débit positif $\dot{V} > 0$ pour les turbomachines de travail, ou bien négatif $\dot{V} < 0$, au cas des turbomachines de force), qui en assure un courant général, perturbé par n

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de l'Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucarest, 27—29 mai 1966.

tourbillons d'intensité Γ, uniformément distribués sur un cercle (C_0) de rayon r_0 ayant le centre en origine.

L'étude se poursuit en trois étapes.

a) *Cas particulier*, $n = 1$.

Soit au début un seul profil de centre Ω $(r_0, 0)$ (v. fig. 1).

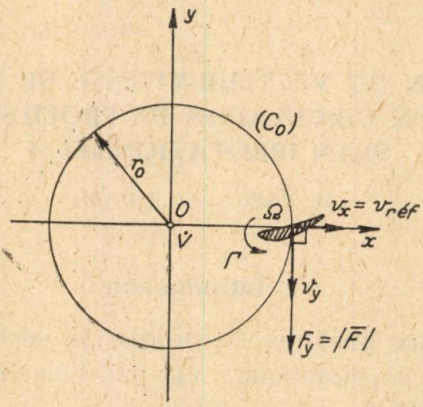


Fig. 1

Le potentiel complexe en est

$$f(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} ln\, z - \frac{i\,\Gamma}{2\pi} ln\,(z - r_0) \tag{2}$$

avec sa dérivée

$$\frac{df}{dz} = \frac{\dot{V}}{2\pi z} - \frac{i\,\Gamma}{2\pi (z - r_0)} \tag{3}$$

Selon la première formule de Blasius-Tchapliguine, l'on obtient

$$F_x - i F_y = \frac{i\varrho}{2} \oint \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz = \frac{i\varrho}{2} \left[\frac{\dot{V}^2}{4\pi^2} \oint \frac{dz}{z^2} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \oint \frac{dz}{(z - r_0)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{i\,\dot{V}\,\Gamma}{2\pi^2} \oint \frac{dz}{z\,(z - r_0)}\right] = -\frac{i\varrho}{2} \cdot \frac{i\,\dot{V}\,\Gamma}{2\pi^2} \cdot 2\pi i \text{ rés} \left[\frac{1}{z\,(z - r_0)}\right]_{r_0} = \frac{i\varrho\,\dot{V}\,\Gamma}{2\pi r_0},$$

$$\text{donc } F_x = 0,\ F_y = -\frac{\varrho\,\dot{V}}{2\pi r_0}\,\Gamma \Rightarrow |\bar{F}| = \varrho\, v_{réf}\,\Gamma \tag{4}$$

Il en résulte la vitesse de référence

$$v_{réf} = |\bar{v}_{réf}| = \frac{\dot{V}}{2\pi r_0},\ \bar{v}_{réf} \perp \bar{F} \Rightarrow \bar{v}_{réf} \perp \bar{F}_y \tag{5}$$

b) *En général, $n \in N$.*

Si le nombre n des profils est un nombre naturel (entier, positif, fini et différent de zéro, dont $N=\{n\}$ soit leur ensemble), le potentiel complexe s'écrit

$$f(z)=\frac{\dot{V}}{2\pi} ln\, z-\frac{i\,\Gamma}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} ln\,(z-r_0\, e^{i\frac{2k\pi}{n}})=\frac{\dot{V}}{2\pi} ln\, z-\frac{i\,\Gamma}{2\pi} ln \prod_{1}^{n}(z-r_0\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}) \tag{6}$$

Comme, d'autre part, $z_k = r_0\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $(k=1,2,...,n)$ sont bien les racines de l'équation algébrique $z^n=r_0^n$, l'on aura une expression simplifiée (Théorème de D'Alembert)

$$f(z)=\frac{\dot{V}}{2\pi} ln\, z-\frac{i\,\Gamma}{2\pi} ln\,(z^n-r_0^n) \tag{7}$$

En vue de faire ressortir une vitesse de référence pour le réseau circulaire de profils, l'on appliquera la première formule de Blasius-Tchapliguine au plan multiplement connexe (d'ordre $n+2$) du réseau.

Afin d'en isoler un seul profil de centre Ω, l'on considère le changement du référentiel $z=r_0+\zeta$, équivalent au même changement de variable (fig. 2).

Le potentiel complexe et sa dérivée deviennent respectivement

$$f(\zeta)=f[z(\zeta)]=\frac{\dot{V}}{2\pi} ln\,(r_0+\zeta)-\frac{i\,\Gamma}{2\pi} ln\,[(r_0+\zeta)^n-r_0^n] \tag{8}$$

et

$$\frac{df}{d\zeta}=\frac{\dot{V}}{2\pi(\zeta+r_0)}-\frac{i\,\Gamma}{2\pi}\frac{n(\zeta+r_0)^{n-1}}{(\zeta+r_0)^n-r_0^n} \tag{9}$$

Il en résulte

$$F_\xi - i\,F_\eta=\frac{i\,\varrho}{2}\oint\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta=\frac{i\,\varrho}{2}\oint\left\{\frac{\dot{V}^2}{4\pi^2(\zeta+r_0)^2}-\frac{n^2\,\Gamma^2(\zeta+r_0)^{2n-2}}{4\pi^2[(\zeta+r_0)^n-r_0^n]^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{i\,\dot{V}\,\Gamma}{2\pi^2}\frac{(\zeta+r_0)^{n-2}}{(\zeta+r_0)^n-r_0^n}\right\} d\zeta \tag{10}$$

La somme algébrique du second membre conduit à l'évaluation des intégrales suivantes :

$$I_1=\oint\frac{d\zeta}{(\zeta+r_0)^2}=0$$

$$I_2=\oint\frac{(\zeta+r_0)^{2n-2}}{[(\zeta+r_0)^n-r_0^n]^2}\,d\zeta=\oint g(\zeta)\cdot d\zeta=2\pi\,i\cdot\text{rés}\,[g(0)],$$

où la fonction $g(\zeta)$ présente en Ω un double pôle (du second ordre), donc son résidu (au sens de Cauchy) sera donné par la formule

$$\text{rés}\,[g(0)] = \text{rés}\,[g(\zeta)]_{\zeta=0} = \frac{1}{1!}\frac{d}{d\zeta}\left\{\zeta^2 \frac{(\zeta+r_0)^{2n-2}}{[(\zeta+r_0)^n - r_0^n]^2}\right\}_{\zeta=0}$$

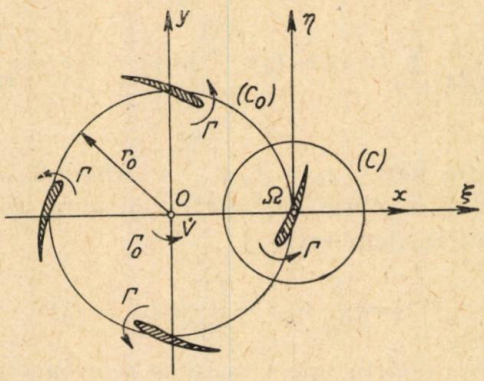


Fig. 2

Mais, tant que

$$(\zeta + r_0)^n - r_0^n = r_0^n + \sum_1^n C_n^k r_0^{n-k}\zeta^k - r_0^n = \zeta\sum_1^n C_n^k r_0^{n-k}\zeta^{k-1},$$

l'on écrira

$$\text{rés}\,[g(0)] = \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{(\zeta+r_0)^{2n-2}}{(\Sigma\, C_n^k r_0^{n-k}\zeta^{k-1})^2}\right]_{\zeta=0} =$$

$$= \left[\frac{(2n-2)(\zeta+r_0)^{2n-3}(\Sigma\, C_n^k r_0^{n-k}\zeta^{k-1})^2 - 2\Sigma\Sigma(x)(\zeta+r_0)^{2n-2}}{(\Sigma\, C_n^k r_0^{n-k}\zeta^{k-1})^4}\right]_{\zeta=0}$$

D'autre part, l'expression du dénominateur peut être simplifiée, tout en remarquant que

$$(\Sigma\, C_n^k r_0^{n-k}\zeta^{k-1})_{\zeta=0} = (C_n^1 r_0^{n-1} + C_n^2 r_0^{n-2}\zeta + C_n^3 r_0^{n-3}\zeta^2 + \ldots) = C_n^1 r_0^{n-1} = n\, r_0^{n-1}$$

tandis que les facteurs de la double somme du numérateur en sont ,

$$\left[\frac{d}{d\zeta}\sum_1^n C_n^k r_0^{n-k}\zeta^{k-1}\right]_{\zeta=0} = \left[\sum_2^n C_n^k r_0^{n-k}(k-1)\zeta^{k-2}\right]_{\zeta=0} = C_n^2 r_0^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} r_0^{n-2}$$

En y opérant ces substitutions, le résidu de $[g(\zeta)]_{\zeta=0}$ devient

$$\text{rés}\,[g(\zeta)]_{\zeta=0} = \frac{(2n-2)\, r_0^{2n-3} n^2 r_0^{2n-2} - 2n\, r_0^{n-1}\frac{n(n-1)}{2} r_0^{n-2} r_0^{2n-2}}{n^4 r_0^{4n-4}} = \frac{n-1}{n^2 r_0}$$

et il s'ensuit que $I_2 = 2\pi i \dfrac{n-1}{n^2 r_0}$.

Quant à l'intégrale

$$I_3 = \oint \frac{(\zeta + r_0)^{n-2}}{(\zeta + r_0)^n - r_0^n}\, d\zeta = \oint h(\zeta)\, d\zeta,$$

la fonction $h(\zeta)$ présente en Ω un pôle simple (primordial), donc

$$\text{rés}\,[h(0)] = \left[\zeta \frac{(\zeta + r_0)^{n-2}}{(\zeta + r_0)^n - r_0^n}\right]_{\zeta=0} = \left[\frac{(\zeta + r_0)^{n-2}}{\Sigma\, C_n^k\, r_0^{n-k}\, \zeta^{k-1}}\right]_{\zeta=0} = \frac{r_0^{n-2}}{n\, r_0^{n-1}} = \frac{1}{n\, r_0}$$

et par conséquent, $I_3 = 2\pi i \cdot \text{rés}\,[h(0)] = \dfrac{2\pi i}{n\, r_0}$.

Par la substitution des intégrales I_1, I_2 et I_3 dans l'égalité (9), l'on trouve

$$\frac{F_\xi - i F_\eta}{i\frac{\varrho}{2}} = \oint \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta = -\frac{\Gamma^2 n^2}{4\pi^2} I_2 - \frac{i \dot{V} \Gamma n}{2\pi^2} I_3 = \frac{2\dot{V}\Gamma - i(n-1)\Gamma^2}{2\pi r_0}$$

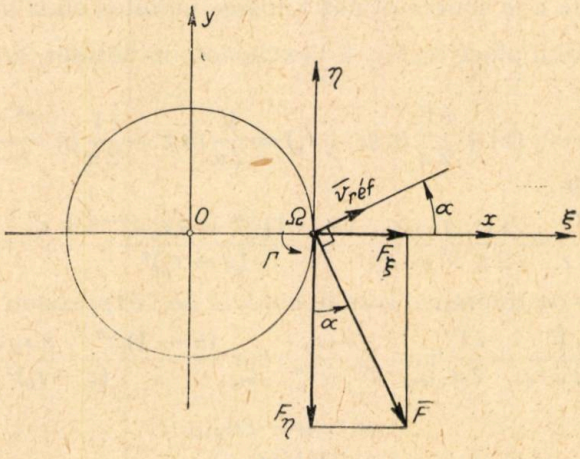


Fig. 3

ou bien

$$F_\xi - i F_\eta = \frac{i\varrho}{2} \frac{\Gamma}{2\pi r_0} [2\dot{V} - i(n-1)\Gamma] = \frac{\varrho \Gamma}{4\pi r_0} [(n-1)\Gamma + 2 i \dot{V}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_\xi = \frac{\varrho (n-1)\Gamma^2}{4\pi r_0} \text{ et } F_\eta = -\frac{2\varrho \dot{V} \Gamma}{4\pi r_0} \qquad (11)$$

La résultante hydro-aérodynamique est donc définie par

$$|\bar{F}| = \sqrt{F_\xi^2 + F_\eta^2} = \frac{\varrho \Gamma}{4\pi r_0} \sqrt{4\dot{V}^2 + (n-1)^2 \Gamma^2}$$

et

$$\alpha = \text{arctg}\frac{F_\xi}{F_\eta} = -\text{arctg}\left(\frac{n-1}{2}\frac{\Gamma}{V}\right)$$

Son sens résulte du fait que $F_\xi > 0$ et $F_\eta < 0$ (fig. 3).

Selon le théorème de Kutta-Joukowsky, l'on doit avoir $|\bar{F}| = \varrho\, v_{réf}\, \Gamma$ et $\bar{F} \perp \bar{v}_{réf}$ avec le sens connu. Il en résulte la vitesse de référence $\bar{v}_{réf}$ entièrement définie par

$$v_{réf} = |\bar{v}_{réf}| = \frac{|\bar{F}|}{\varrho\,\Gamma} = \frac{\sqrt{4\dot{V}^2 + (n-1)^2\,\Gamma^2}}{4\pi r_0} \quad \text{et} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{n-1}{2}\,\frac{\Gamma}{\dot{V}}\right) \tag{12}$$

dont le sens s'obtient en tournant — cette fois-ci — le vecteur $\bar{F}$ d'un angle droit dans le sens de la circulation Γ (fig. 3).

c) *Vérification.*

A titre de contrôle, appliquons-en une méthode plutôt intuitive — et par celà même — plus riche en interprétations, bien que moins rigoureuse, mais qui doit aboutir au même résultat.

La vitesse au point Ω doit être la résultante de la vitesse radiale $v_r = \dfrac{\dot{V}}{2\pi r_0}$ dûe à la source et des vitesses induites en Ω par les n-1 tourbillons (sauf celui placé en Ω). A l'exclusion du dernier, le potentiel complexe est

$$F(z) = f(z) + \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,ln\,(z - r_0) = \frac{\dot{V}}{2\pi}\,ln\,z - \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,ln\,\frac{z^n - r_0^n}{z - r_0} \tag{13}$$

avec sa dérivée

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\dot{V}}{2\pi z} - \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,\frac{z - r_0}{z^n - r_0^n}\,\frac{(n-1)\,z^n - n\,r_0\,z^{n-1} + r_0^n}{(z - r_0)^2} = v_x - i\,v_y \tag{14}$$

La vitesse de référence sera le module de l'expression

$$\lim_{z\to r_0}\frac{dF}{dz} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_0} - \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\lim_{z\to r_0}\frac{z - r_0}{z^n - r_0^n}\cdot\lim_{z\to r_0}\frac{(n-1)\,z^n - n\,r_0\,z^{n-1} + r_0^n}{(z - r_0)^2} =$$

$$= v_{x\,réf} - i\,v_{y\,réf}$$

Mais, d'autre part (Théorème de L'Hôpital)

$$\lim_{z\to r_0}\frac{z - r_0}{z^n - r_0^n} = \left(\frac{1}{n\,z^{n-1}}\right)_{z=r_0} = \frac{1}{n\,r_0^{n-1}}$$

$$\text{et}\ \lim_{z\to r_0}\frac{(n-1)\,z^n - n\,r_0\,z^{n-1} + r_0^n}{(z - r_0)^2} = \lim_{z\to r_0}\frac{n\,(n-1)\,z^{n-1} - n\,(n-1)\,r_0\,z^{n-2}}{2\,(z - r_0)} =$$

$$= \frac{n\,(n-1)}{2}\,r_0^{n-2},$$

$$\text{par conséquent}\ v_{x\,réf} - i\,v_{y\,réf} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_0} - \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{n r_0^{n-1}}\,\frac{n\,(n-1)}{2}\,r_0^{n-2} =$$

$$= \frac{2\,\dot{V} - i\,(n-1)\,\Gamma}{4\pi r_0} \Rightarrow v_{x\,réf} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_0}\ \text{et}\ v_{y\,réf} = \frac{n-1}{4\pi r_0}\,\Gamma,$$

qui en sont bien les composantes de $v_{réf}$ selon (12).

3. Conclusions

Le mouvement (6) ou (7) correspondrait — en vue d'applications pratiques — à un réseau de profils très minces, de corde c négligeable par rapport au rayon r_0 du cercle (C_0) ; ceci se retrouve en tehnique aux ventilateurs radiaux à très grand nombre d'aubes.

En posant $z = r\,e^{i\theta}$, le potentiel des vitesses $\varphi = Re\,[f(z)]$ et la fonction de courant $\psi = Im\,[f(z)]$, selon l'égalité (7) seront respectivement

$$\varphi = \frac{\dot{V}}{2\pi} ln\, r + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^n \sin n\theta}{r^n \cos n\theta - r_0^n} \tag{15}$$

et

$$\psi = \frac{\dot{V}}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} ln \sqrt{r^{2n} - 2 r_0^n r^n \cos n\theta + r_0^{2n}} \tag{16}$$

A l'aide du paramètre adimensionnel $\lambda = \dfrac{r}{r_0}$, l'équation des lignes de courant

$$\psi = \text{const.} \Rightarrow r^{2n} = 2 r_0^n r^n \cos n\theta + r_0^{2n} = C \exp\left(2\frac{\dot{V}}{\Gamma}\theta\right),\ C > 0 \tag{17}$$

aura une expression simplifiée

$$\lambda^{2n} - 2\lambda^n \cos n\theta + 1 = C_1 \exp\left(2\frac{\dot{V}}{\Gamma}\theta\right),\ C_1 > 0 \tag{18}$$

qui permettra le tracé plus aisé du spectre hydro-aérodynamique.

Si le courant général, dû à la source seulement, semble trop simple (lignes de courant rectilignes, demi-droites issues de l'origine), l'on pourrait y ajouter un tourbillon d'intensité Γ_0 placé en 0. Ceci modifierait de très peu la valeur (12) de $\bar{v}_{réf}$, mais on aurait l'avantage d'obtenir des lignes de courant en forme de spirale logarithmique. Dans ce cas, la vitesse $v_{y\,réf}$ diminuera de $\dfrac{\Gamma_0}{2\pi r_0}$, tandis que $v_{x\,réf}$ restera égale à $\dfrac{\dot{V}}{2\pi r_0}$.

Selon la transformation de Tchapliguine-Sörensen

$$Z = e^z \Rightarrow ln\, Z = z,$$

appliquée au mouvement de translation uniforme $f(z) = v_\infty \cdot e^{-i\alpha} \cdot z$ l'on obtiendra facilement $f(Z) = v_\infty\, e^{-i\alpha} z(Z) = v_\infty\, e^{-i\alpha} ln\, Z \sim \dfrac{V_0 + i\Gamma_0}{2\pi} ln\, Z$ où $\dot{V}_0 = 2\pi v_\infty \cos\alpha$ et $\Gamma_0 = -2\pi v_\infty \sin\alpha$ seraient respectivement le débit d'une source et l'intensité d'un tourbillon placés en origine, de manière à obtenir l'équivalence désirée.

A cet effet, la translation uniforme, traversant un réseau linéaire de profils à vitesse asymptotique $\bar{v}_\infty$, deviendrait un courant général à travers un réseau circulaire, à vitesse de référence $v_{réf}$,

Quant à la courbure, à l'épaisseur et à la corde des profils, dans les réseaux circulaires de forme plus générale, il est à préciser que la courbure et la corde contribuent à modifier seulement la valeur de Γ, sans en modifier d'une manière sensible l'expression (12) de $\bar{v}_{réf}$, tandis que l'épaisseur ne change à peu près rien à l'égard de $\bar{v}_{réf}$.

Il s'ensuit que l'expression (12), où l'on pourrait facilement lui ajouter la contribution d'un tourbillon Γ_0, placé en 0, est sufisamment générale de manière à recouvrir tout le champ des applications.

De toute façon, le moyen de définir la vitesse de référence dans les réseaux circulaires de profils, gardera sa validité de conception, en tout cas où l'on voudrait pousser l'exactité aussi loin que possible.

La chaire de machines hydrauliques

Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Carafoli, E. et Oroveanu, T.* Mecanica Fluidelor, vol. II (1955), Ed. Academiei R.P.R.
2. *Füzy, O.* Bestimmung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes einer unvollständingen Wirbelquellenreihe, Budapest, 1960.
3. *Füzy, O.* Beiträge zur konformen Abbildung eines Schaufelsternes auf ein ebenes Schaufelgitter, Budapest, 1961.
4. *Şabac, G. I.* Matematici Speciale vol. II (1965), Ed. Did. Ped. Bucureşti.
5. *Taşcă, D.* Teorema momentului, analogă teoremei Kutta-Jukovski. Comunicare în ses. IX. IPB, 1965 (sous presse).
6. *Taşcă, D.* Curs de Teoria Hidrodinamică a Reţelelor de Profile, Inst. Politehnic Bucureşti 1964—1967 (autographié).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. : 539.3/4:624.023.9:624.04:624.072.2

STUDIUL STABILITĂȚII ELASTICE A GRINZILOR CONTINUE PENDULARE PENTRU ÎNCĂRCĂRI OARECARE *

VICTOR DROBOTĂ

Prin grindă pendulară se denumește grinda suspendată pe două sau mai multe reazeme, care permit rotirea acesteia în jurul punctelor de fixare situate în general deasupra axei longitudinale a grinzii (fig. 1).

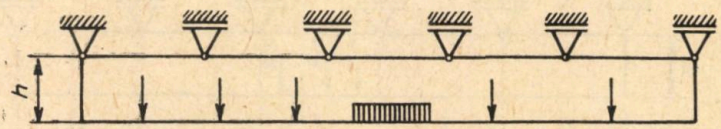


Fig. 1

Sarcina critică de flambaj la aceste grinzi se determină ținînd seama de următoarele ipoteze de calcul :

— secțiunea se consideră constantă în lungul grinzii avînd o axă de simetrie și rigiditatea la încovoiere (EI_y) mică în raport cu această axă ;
— sarcinile sînt aplicate în planul de simetrie al grinzii ;
— punctele de rezemare sînt așezate la distanțe egale între ele și situate în planul de simetrie al grinzii ;
— dreapta care unește punctele de rezemare ale grinzii este situată la distanța h de cea care unește punctele de aplicație ale sarcinilor ;
— greutatea proprie a grinzii se consideră neglijabilă ;
— rezemarea este astfel realizată încît grinda se poate roti în jurul punctelor de fixare ;
— în poziția deformată a grinzii (după pierderea stabilității elastice), unghiul de răsucire cu care se rotește o secțiune oarecare normală pe axa acesteia, față de secțiunea situată în dreptul reazemului considerat origină, este neglijabil în raport cu unghiul cu care secțiunea considerată origină s-a rotit față de poziția verticală inițială.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București, 27—29 mai 1966.

La stabilirea relațiilor care dau sarcină critică de flambaj pentru grinzile continue pendulare de deschideri egale avînd același număr de reazeme, se disting trei cazuri limită de încărcare [1].

Unul dintre acestea este acela al grinzii încărcată pe una din deschiderile extreme (fig. 2). Al doilea caz îl constituie grinda încărcată pe

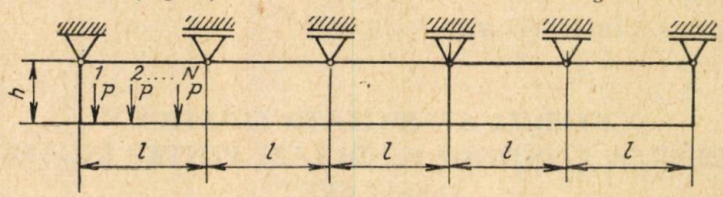


Fig. 2

deschiderea din mijloc (fig. 3). Al treilea caz limită este acela care corespunde flambajului simetric al grinzii egal încărcată pe fiecare deschidere (fig. 4) [1, 2].

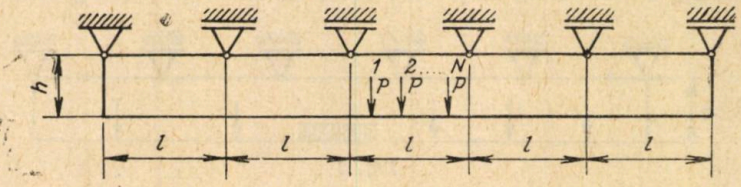


Fig. 3

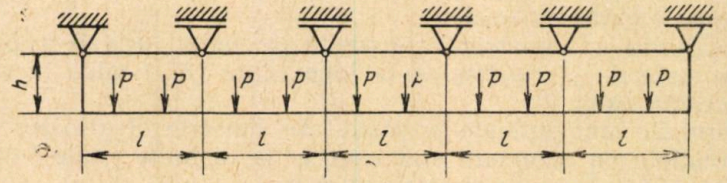


Fig. 4

Pentru primele două cazuri limită relația care dă sarcina critică de flambaj, în cazul cel mai general de încărcare întîlnit în aplicațiile cu asemenea grinzii, încărcare alcătuită din N sarcini concentrate de valoare egală, este [3].

$$R_f = \frac{N^2 E I_y h}{2S} \tag{1}$$

unde N este numărul de sarcini egale ce acționează pe grindă;

E — modulul de elasticitate longitudinal al materialului grinzii;

I_y — momentul de inerție minim al secțiunii grinzii;

h — distanța dintre linia punctelor de aplicație ale sarcinilor și linia punctelor de rezemare a grinzii;

S — momentul static al suprafeței diagramei de momente în raport cu linia de reper construită pentru sarcinile P egale cu unitatea.

În această relație numitorul reprezintă partea cea mai dificilă de calculat, deoarece este necesară cunoașterea valorilor momentelor de pe reazeme.

Valoarea lui S este funcție de modul de încărcare și de rezemare al grinzii.

În cele ce urmează se studiază cazul limită pentru care încărcarea este situată pe prima deschidere al grinzii și se stabilește o relație generală cu ajutorul căreia, pentru o grindă continuă de n deschideri egale se poate determina momentul încovoietor pe un reazem oarecare i al grinzii (fig. 5).

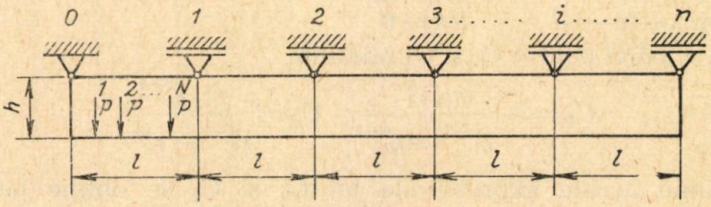


Fig. 5

Pentru aceasta se separă deschiderea pe care se aplică sarcinile egale cu unitatea de restul grinzii, înlocuind efectul părților îndepărtate cu cîte un cuplu m_1.

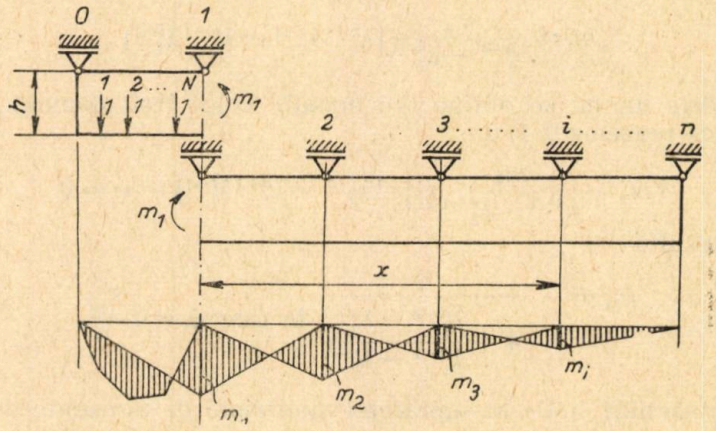


Fig. 6

La partea de grindă continuă situată la dreapta deschiderii încărcate, momentul încovoietor într-un reazem oarecare i situat la distanța x de reazemul considerat origină este o funcție $f(x)$. Ținînd seama de aceasta ecuația lui Clapeyron pentru un grup de trei reazeme consecutive se

poate scrie sub forma unei ecuații funcționale cu diferențe finite, liniară, omogenă cu coeficienți constanți și anume

$$f(x-l)+4f(x)+f(x+l)=0 \tag{2}$$

Mulțimea soluțiilor acestor ecuații funcționale este dată de expresia

$$f(x)=C_1\lambda_1^{\frac{x}{l}}+C_2\lambda_2^{\frac{x}{l}} \tag{3}$$

unde λ_1 și λ_2 sînt soluțiile particulare ale ecuației caracteristice și au valorile $\lambda_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$.

Constantele C_1 și C_2 se determină din următoarele condiții la limită și anume :

pentru $x=0$; $\quad f(x)=m_1$
pentru $x=(n-1)l$; $\quad f(x)=0$

Rezultă astfel pentru C_1 și C_2 relațiile

$$C_1=-\frac{m_1\lambda_2^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}};\quad C_2=\frac{m_1\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}$$

Înlocuind aceste expresii ale lui C_1 și C_2 se obține pentru $f(x)$

$$f(x)=\frac{m_1}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}\left(\lambda_1^{n-1}\lambda_2^{\frac{x}{l}}-\lambda_2^{n-1}\lambda_1^{\frac{x}{l}}\right). \tag{4}$$

Momentul încovoietor pe reazemul i rezultă din relația (4) pentru $x=(i-1)l$. Se obține

$$m_i=\frac{m_1}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}\left(\lambda_1^{n-1}\lambda_2^{i-1}-\lambda_2^{n-1}\lambda_1^{i-1}\right) \tag{5}$$

Expresia lui m_1 se obține din ecuația celor trei momente aplicate grupului de reazeme 0, 1, 2.

$$4m_1+\frac{m_1}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}\left(\lambda_1^{n-1}\lambda_2^{i-1}-\lambda_2^{n-1}\lambda_1^{i-1}\right)+\psi=0$$

de unde rezultă

$$m_1=-\frac{\psi}{4+\dfrac{\lambda_1^{n-2}-\lambda_2^{n-2}}{\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}}}\quad\text{în care}\quad \psi=6\frac{S_{01}}{l^2}$$

S fiind momentul static al suprafeței diagramei de momente de pe porțiunea de grindă 01 în raport cu reazemul O, considerînd grinda 01 simplu rezemată.

Rezultă astfel relația care dă pe m_i

$$m_i=-\frac{\psi\left(\lambda_1^{n-i}-\lambda_2^{n-i}\right)}{4\left(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1}\right)+\left(\lambda_1^{n-2}-\lambda_2^{n-2}\right)}=\frac{\psi\left(\lambda_2^{n-i}-\lambda_1^{n-i}\right)}{\lambda_2^n-\lambda_1^n} \tag{6}$$

Expresia momentului static $\bar{S}$ al suprafeței diagramei de momente în raport cu linia de reper, diagramă construită pentru sarcinile de pe grindă egale cu unitatea, pentru cazul general reprezentat de figura 5, se obține cu ajutorul relației

$$\bar{S} = \frac{l}{3} \sum_{1}^{n-1} (-1)^i m_i^2 + \bar{S}_{01} \tag{7}$$

$\bar{S}_{01}$ fiind momentul static al suprafeței diagramei de momente a porțiunii de grindă cuprinsă între reazemele 01, considerînd-o static determinată, în raport cu linia de reper.

Înlocuind pe m_i din (5) se obține

$$\bar{S} = \frac{l}{3} \sum_{1}^{n-1} (-1)^i \left[\frac{\psi (\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i})}{\lambda_2^n - \lambda_1^n} \right]^2 + \bar{S}_{01}$$

Făcînd sumele respective se obține

$$\bar{S} = \bar{S}_{01} + \frac{l}{3} \psi^2 \frac{1}{(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2} \left[\frac{(-1)^{n-1} \lambda_1^2 - \lambda_1^{2n}}{1 + \lambda_2^2} - 2 \sum_{1}^{n-1} (-1)^i + \frac{(-1)^{n-1} \lambda_2^2 - \lambda_2^{2n}}{1 + \lambda_2^2} \right]$$

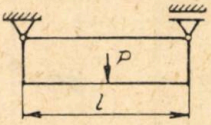
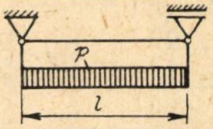
Aducînd la același numitor termenii din paranteză, reducînd termenii asemenea, ținînd seama că $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ și $\lambda_1 + \lambda_2 = -4$ se obține

$$S = S_{01} + \frac{\psi^2 l \left[4 (-1)^{n-1} + (\lambda_1^{2n-1} + \lambda_2^{2n-1}) - 8 \sum_{1}^{n-1} (-1)^i \right]}{12 (\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2} \tag{8}$$

Cu ajutorul acestei relații se pot scrie formulele care dau sarcina critică de flambaj pentru un mare număr de cazuri de încărcare și rezemare.

Ceea ce se schimbă în relația (8) de la un caz la altul de încărcare sînt $\bar{S}_{01}$ și ψ ale căror expresii pentru cîteva cazuri întîlnite în practică sînt cuprinse în tabela1.

Tabela 1

Nr crt	Felul încărcării	$\bar{S}_{01}$	Ω_{01}	ψ
1		$\frac{l^3}{96}$	$\frac{l^2}{8}$	$\frac{3}{8} l$
2		$\frac{l^5}{240}$	$\frac{l^3}{12}$	$\frac{l^2}{4}$

Exemple de calcul

1. Grinda pe trei reazeme cu o sarcină concentrată pe mijlocul primei deschideri (tabela 2 cazul 2).

Pentru acest caz $n=2$; $S_{01}=\frac{l^3}{96}$ și $\psi=\frac{3}{8}l$.

Rezultă

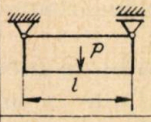
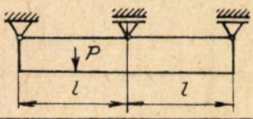
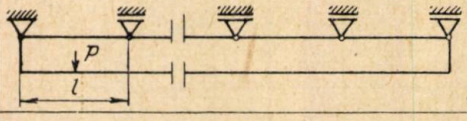
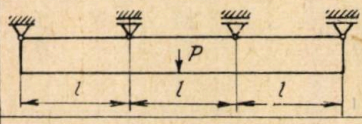
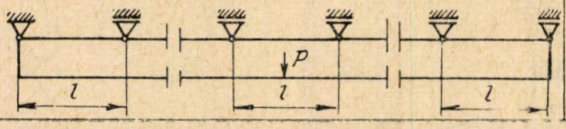
$$\bar{S}=\frac{l^3}{96}+\frac{9}{64}\,\frac{-4+[(-2+\sqrt{3})^3+(-2-\sqrt{3})^3]+8}{12(7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3})^2}=\frac{23}{3076}l^3$$

Sarcina critică este dată de relația

$$P_f=\frac{EI_y h}{2\bar{S}}=\frac{3076\,EI_y h}{46\,l^3}=66{,}75\,\frac{EI_y h}{l^3}$$

2. Grinda pe un număr infinit de reazeme cu o sarcină concentrată pe mijlocul primei deschideri (tabela 2 cazul 3).

Tabela 2

Nr crt	Cazul studiat	Formula sarcinii critice P_f
1		$48\,\frac{EI_y h}{l^3}$
2		$66{,}75\,\frac{EI_y h}{l^3}$
3		$68{,}72\,\frac{EI_y h}{l^3}$
4		$87{,}27\,\frac{EI_y h}{l^3}$
5		$91{,}51\,\frac{EI_y h}{l^3}$

Pentru acest caz se ține seamă că $\lambda_1^{\infty} = 0$ și deci

$$\bar{S} = l^3\left[\frac{1}{96} + \frac{9}{64}\,\frac{1}{12(-2-\sqrt{3})}\right] = \frac{1}{137{,}44}\,l^3$$

Sarcina critică se obține din relația

$$P_f = \frac{EI_y h}{2\bar{S}} = \frac{137{,}44}{2}\,\frac{EI_y h}{l^3} = 68{,}72\,\frac{EI_y h}{l_3}$$

În tabela 2 sînt prezentate formulele de calcul al sarcinii critice pentru o serie de cazuri de încărcare întîlnite în practică.

Pentru cel de al doilea caz limită (fig. 7) se procedează întocmai ca în primul caz, separînd deschiderea încărcată 1—1′ de restul grinzii și scriind ecuația celor trei momente pentru un grup oarecare de trei reazeme, atît pentru porțiunea de grindă situată la stînga cît și pentru cea situată la dreapta acestei deschideri.

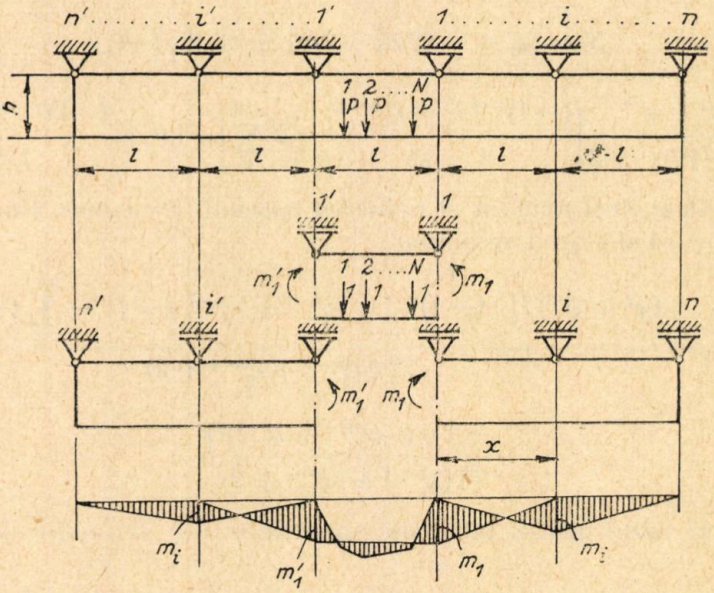


Fig. 7

Se obțin astfel ecuații funcționale a căror formă este aceeași ca în cazul precedent și ale căror soluții sînt de asemenea de forma (4) respectiv (5).

Deosebirea dintre acest caz și cel precedent îl constituie calculul lui m_1 respectiv $m_{1'}$, al căror expresii se deduc scriind ecuația lui Clapeyron pentru grupul de reazeme 1' 12 și 2'1'1 și rezultă

$$m_1 = \frac{\psi[(2-\sqrt{3})\lambda_2^n - (2+\sqrt{3})\lambda_1^n]}{\sqrt{3}[(1+\sqrt{3})\lambda_1^n + (1-\sqrt{3})\lambda_2^n]}; \quad m_{1'} = \frac{\psi'[(2-\sqrt{3})\lambda_2^n - (2+\sqrt{3})\lambda_1^n]}{\sqrt{3}[(1+\sqrt{3})\lambda_1^n + (1-\sqrt{3})\lambda_2^n]}$$

unde $\psi = 6\,\frac{S_{11'}}{l^2}$ respectiv $\psi' = 6\,\frac{S_{11'}}{l^2}$

Se obține astfel pentru m_i respectiv $_{i'}$, expresiile

$$m_i = \frac{\psi(\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i})}{\sqrt{3}[(1+\sqrt{3})\lambda_1^n + (1-\sqrt{3})\lambda_2^n]}; \quad m_{i'} = \frac{\psi'(\lambda_1^{n-i} - \lambda_2^{n-i})}{\sqrt{3}[(1+\sqrt{3})\lambda_1^n + (1-\sqrt{3})\lambda_2^n]} \tag{9}$$

Momentul static $\bar{S}$ are în acest caz expresia

$$\bar{S} = \bar{S}_{01} - (2m_1^2 + 2m_{1'}^2 + m_1 m_{1'})\frac{l}{6} + \frac{l}{3}\left(\sum_2^{n-1} m_i^2 + \sum_2^{(n-1)'} m_{i'}^2\right)$$

Introducînd pe m_i și $m_{i'}$, din (9) și făcînd sumele respective, se obține

$$\bar{S} = \bar{S}_{01} - \frac{l}{6}(2m_1^2 + 2m_{1'}^2 + m_1 m_{1'}) -$$

$$- \frac{l}{18}\,\frac{\psi^2 + \psi'^2}{\lambda_1^{2n-1}\lambda_2^{2n-1} + 2}\left[\frac{(-1)^{n-1}\lambda_1^2 + \lambda_1^{2(n-1)}}{1+\lambda_1^2} - 2\sum_2^{n-1}(-1)^i + \frac{(-1)^{n-1}\lambda_2^2 + \lambda_2^{2(n-1)}}{1+\lambda_2^2}\right]$$

Aducînd la același numitor și reducînd termenii asemenea, ținînd seama că $\lambda_1 + \lambda_2 = -4$ și $\lambda_1\lambda_2 = 1$ se obține

$$\bar{S} = \bar{S}_{01} - \frac{(\psi^2 + \psi'^2)\,l\,[4(-1)^{n-1} + \lambda_1^{2n-1} + \lambda_2^{2n-1} + 8[1 - \sum_2^{n-1}(-1)^i] -}{72\,(\lambda_1^{2n-1} + \lambda_2^{2n-1} + 2)}$$

$$\frac{-2\psi\psi'(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1})^2]}{72(\lambda_1^{2n-1} + \lambda_2^{2n-1} + 2)} \tag{10}$$

Pentru cazul grinzii încărcată simetric $\psi = \psi'$ și relația de mai sus devine

$$\bar{S} = \bar{S}_{01} - \frac{\psi^2\,l\,[4(-1)^{n-1} - (9+5\sqrt{3})\lambda_1^{2n} + (-9+5\sqrt{3})\lambda_2^{2n} + 10]}{36\,(\lambda_1^{2n-1} + \lambda_2^{2n-1} + 2)} \tag{11}$$

Cu ajutorul uneia din relațiile (10) sau (11) și a formulei (1) se poate calcula sarcina critică de flambaj la o grindă pe un număr oarecare de reazeme pentru diverse feluri de sarcini.

Exemplu de calcul

1. Grinda pe patru reazeme cu o sarcină concentrată aplicată pe mijlocul lungimii acesteia (tabela 2 cazul 4).

Pentru acest caz $n = 2$; $\bar{S}_{01} = \frac{l^3}{96}$ și $\psi = \frac{3}{8} l$.

Rezultă

$$\bar{S} = \frac{l^3}{96} - \frac{9}{64} l^3 \frac{-4-(9+5\sqrt{3})(97-56\sqrt{3})+(-9+5\sqrt{3})(97+56\sqrt{3})+10}{36(-26+15\sqrt{3}-26-15\sqrt{3}+2)} =$$

$$= \frac{11}{1920} l^3$$

Sarcina critică se obține din relația

$$P_f = \frac{EI_y h}{2\bar{S}} = \frac{1920}{22} \cdot \frac{EI_y h}{l^3} = 87{,}27 \cdot \frac{EI_y h}{l^3}$$

2. Grinda pe un număr infinit de reazeme cu sarcina pe mijlocul lungimii acesteia (tabela 2 cazul 5).

Se ține de asemenea seama că $\lambda_1^{\infty} = 0$ și se obține

$$\bar{S} = \frac{l^3}{96} + \frac{9}{64} l^3 \frac{(9-5\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})}{36} = \frac{l^3}{183{,}02}$$

Sarcina critică este dată de relația

$$P_f = \frac{EI_y h}{2\bar{S}} = \frac{183{,}02}{2} \frac{EI_y h}{l^3} = 91{,}51 \frac{EI_y h}{l^3}$$

Pentru cel de al doilea caz limită (fig. 8) reprezentat de flambajul simetric al grinzii continue avînd n deschideri egale încărcată pe fie-

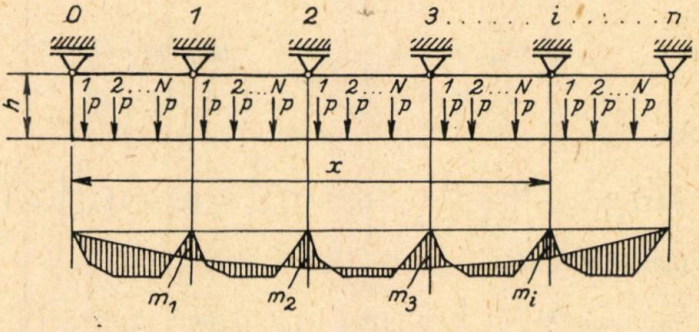


Fig. 8

care deschidere cu un număr N de sarcini concentrate de valoare egală, sarcina critică se obține din formula [3]

$$R_f = \frac{n N^2 E I_y h}{2 \bar{S}} \tag{12}$$

notațiile avînd aceeași semnificație ca cele folosite în formula (1).

Pentru calculul momentului pe un reazem oarecare i al grinzii considerată pe $n+1$ reazeme, se poate scrie de asemenea relația lui Clapeyron pentru un grup de trei reazeme $i-1$, i și $i+1$ sub forma unei ecuații funcționale cu diferențe finite, liniară și neomogenă cu coeficienți constanți și anume

$$f(x-l) + 4f(x) + f(x+l) = -6\frac{A_i}{l} \tag{13}$$

unde $A_i = \frac{S_{i-1,i}}{l} + \frac{S_{i+1,i}}{l} = \Omega_{01}$ și reprezintă reacțiunea grinzilor reciproce $i-1$, i și $i+1$ în reazemul i din mijloc. Această reacțiune rezultă din suprafața diagramei de momente de pe intervalele alăturate $i-1$, i și i, $i+1$, construită ca și cum aceste intervale de pe grindă ar fi simplu rezemate la capete. Pentru acest caz reacțiunea este egală chiar cu suprafața diagramei de momente de pe prima deschidere a grinzii Ω_{01}.

Mulțimea soluțiilor acestor ecuații funcționale se obține din relația

$$f(x) = C_1 \lambda_1^{\frac{x}{l}} + C_2 \lambda_2^{\frac{x}{l}} - \frac{\Omega_{01}}{l} \tag{14}$$

λ_1 și λ_2 fiind soluțiile particulare ale ecuației caracteristice obținută din (13) fără membru drept și au valorile $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

Constantele C_1 și C_2 se determină din următoarele condiții la limite

pentru $x = 0$; $f(x) = 0$

pentru $x = nl$; $f(x) = 0$

și se obține

$$C_1 = \frac{\Omega_{01}}{l}\frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2^n - \lambda_1^n}; \quad C_2 = -\frac{\Omega_{01}}{l}\frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_2^n - \lambda_1^n}$$

Rezultă

$$f(x) = -\frac{\Omega_{01}}{l}\left\{\frac{1}{\lambda_2^n - \lambda_1^n}\left[(\lambda_1^n - 1)\lambda_2^{\frac{x}{l}} - (\lambda_2^n - 1)\lambda_1^{\frac{x}{l}}\right] + 1\right\} \tag{15}$$

respectiv pentru $x = il$

$$m_i = -\frac{\Omega_{01}}{l}\left\{\frac{1}{\lambda_2^n - \lambda_1^n}\left[(\lambda_1^n - 1)\lambda_2^i - (\lambda_2^n - 1)\lambda_1^i\right] + 1\right\} \tag{16}$$

Expresia lui $\bar{S}$ din relația (11) este

$$\bar{S} = n\,\bar{S}_{01} - \frac{l}{6}\left[2\sum_{i=1}^{n} m_i^2 + \sum_{i=1}^{n} m_{i-1}\,m_i\right] \tag{17}$$

S_{01} având aceeași semnificație ca mai înainte.

Ținînd seama de (16) și de faptul că $\lambda_1\lambda_2 = 1$ și $\lambda_1 + \lambda_2 = -4$ se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \frac{\Omega_{01}^2}{l^2(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda_1^n - 1)^2\lambda_2^{2i} + (\lambda_2^n - 1)^2\lambda_1^{2i} - 2(\lambda_1^{2n} - \lambda_1^n + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^n - 1)\lambda_2^i - 2(\lambda_2^{2n} - \lambda_2^n + \lambda_1^n - 1)\lambda_1^i + \lambda_2^{2n} + \lambda_1^{2n} - 2 + 2\lambda_1^n + 2\lambda_2^n - 4\right]$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n}\lambda^{2i} = \frac{\lambda^2(\lambda^{2n}-1)}{\lambda^2-1}$ și $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \frac{\lambda(\lambda^n-1)}{\lambda-1}$ expresia $\sum_{i=1}^{n} m_i^2$

devine

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \frac{\Omega_{01}^2}{l^2(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2}\left\{\frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2-1}(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_2^n + \lambda_1^n - 2) - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2-1}(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_2^n + \right.$$

$$+ \lambda_1^n - 2) - \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 - 1}(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_2^n + \lambda_1^n - 2) + \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - 1}(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_2^n + \lambda_1^n - 2) +$$

$$\left. + n\left[(\lambda_1^n + \lambda_2^n)^2 + 2(\lambda_1^n + \lambda_2^n) - 8\right]\right\}$$

Desfăcînd parantezele și reducînd termenii asemenea se obține

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \frac{n\,\Omega_{01}^2}{l^2(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2}\left[(\lambda_1^n + \lambda_2^n)^2 + 2(\lambda_1^n + \lambda_2^n) - 8\right] \tag{18}$$

În mod asemănător se calculează și expresia $\sum_{i=1}^{n} m_i\,m_{i-1}$;

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,m_{i-1} = \frac{\Omega_{01}^2}{l^2(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2}\left[(\lambda_1^n - 1)^2\lambda_2^{2i-1} + (\lambda_2^n - 1)^2\lambda_1^{2i-1} + (\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - \right.$$

$$- \lambda_1^n)(1 + \lambda_2)\lambda_2^{i-1} - (\lambda_2^n - 1)(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(1 + \lambda_1)\lambda_1^{i-1} + (\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2 -$$

$$\left. - (\lambda_2^n - 1)(\lambda_1^n - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)\right]$$

Ținînd seama că

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^{2i-1} = \frac{\lambda(\lambda^{2n}-1)}{\lambda^2-1} \text{ și } \sum_{i=1}^{n}\lambda^{i-1} = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

expresia lui $\sum_{i=1}^{n} m_i m_{i-1}$ devine

$$\sum_{i=1}^{n} m_i m_{i-1} = \frac{\Omega_{01}^2}{l^2 (\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2} \left\{ \frac{(\lambda_1^n - 1)^2 \lambda_2 (\lambda_2^{2n} - 1)}{\lambda_2^2 - 1} + \frac{(\lambda_2^n - 1)^2 \lambda_1 (\lambda_1^{2n} - 1)}{\lambda_1^2 - 1} + \right.$$

$$+ (\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_2 + 1) \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_2 - 1} - (\lambda_2^n - 1)(\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_1 + 1) \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} +$$

$$\left. + n [(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2 - (\lambda_2^n - 1)(\lambda_1^n - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)] \right\}$$

Făcînd calculele necesare se obține

$$\sum_{i=1}^{n} m_i m_{i-1} = \frac{\Omega_{01}^2}{l^2 (\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2} \{ -\sqrt{3} (\lambda_2^n - \lambda_1^n)(\lambda_1^n + \lambda_2 - 2) + n [(\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2 -$$

$$- (\lambda_2^n - 1)(\lambda_1 - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)] \} \tag{19}$$

Introducînd expresiile (18) și (19) în (17) se obține

$$\bar{S} = n \bar{S}_{01} - \frac{\Omega_{01}^2}{6 l (\lambda_2^n - \lambda_1^n)^2} \{ n [3 (\lambda_2^{2n} + \lambda_1^{2n}) - 6] - \sqrt{3} (\lambda_2^n -$$

$$- \lambda_1^n)(\lambda_1^n + \lambda_2^n - 2) \} \tag{20}$$

În tabela 1 se găsesc expresiile lui $\bar{S}_{01}$ și Ω_{01} pentru cîteva feluri de încărcări iar în tabela 3 formulele ce dau sarcina critică de flambaj pentru flambajul simetric al grinzilor pendulare încărcate cu diverse sarcini și rezemate pe un număr oarecare de reazeme.

Exemple de calcul

1. Grinda pe trei reazeme cu cîte o sarcină concentrată aplicată pe mijlocul fiecărei deschideri (tabela 3, cazul 1).

Pentru acest caz $n = 2$; $\bar{S}_{01} = \frac{l^3}{96}$; $\Omega_{01} = \frac{l^2}{8}$ și se obține

$$\bar{S} = \frac{2l^3}{96} - \frac{l^2}{6 \times 64 (7 + 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3})^2} \{ 2 [3 (97 + 56\sqrt{3} + 97 - 56\sqrt{3}) -$$

$$- 6] - \sqrt{3} (7 + 4\sqrt{3} - 7 + 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} - 2) \} = \frac{7 l^3}{48 \times 16}$$

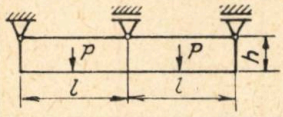
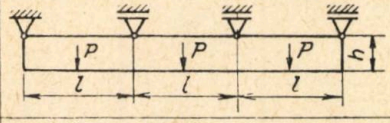
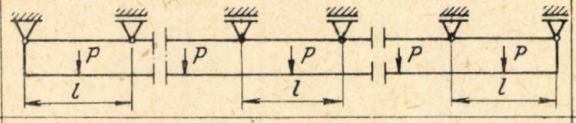
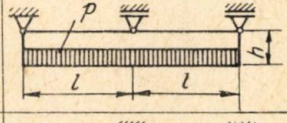
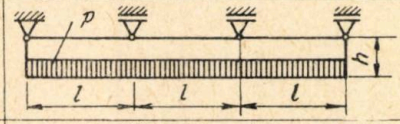
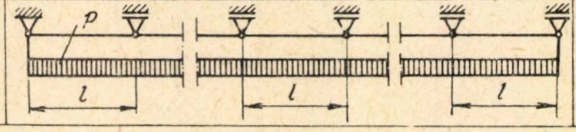
Sarcina critică se calculează astfel

$$P_f = \frac{n E I_y h}{2 \bar{S}} = \frac{2 E I_y h}{\frac{2 \times 7 l^3}{48 \times 16}} = 109{,}7 \frac{E I_y h}{l^3}$$

2. Grinda pe un număr infinit de reazeme cu cîte o sarcină concentrată aplicată pe mijlocul fiecărei deschideri (tabela 3, cazul 3). Pentru acest caz $\bar{S}_{01}$ și Ω_{01} cu aceleași expresii ca în cazul de mai sus. În plus pentru acest caz $\lambda_1^{\infty} = 0$ iar termenii ce nu se multiplică cu n se neglijează așa încît

$$\bar{S} = n\left[\bar{S}_{01} - \frac{\Omega_{01}^2}{6\,l\,\lambda_2^{2n}}\,3\lambda_2^{2n}\right] = n\left[\bar{S}_{01} - \frac{\Omega_{01}^2}{6\,l}\right] = n\left[\frac{l^3}{96} - \frac{l^3}{64\times 6}\right] = \frac{n\,l^3}{384}$$

Tabela 3

Nr. crt	Cazul studiat	Formula sarcinii critice P_f, $(pl)_f$
1		$109{,}7\,\frac{EI_y h}{l^3}$
2		$120\,\frac{EI_y h}{l^3}$
3		$192\,\frac{EI_y h}{l^3}$
4		$120\,\frac{EI_y h}{l^3}$
5		$180\,\frac{EI_y h}{l^3}$
6		$360\,\frac{EI_y h}{l^3}$

Sarcina critică se obține din relația

$$P_f = \frac{n\,EI_y\,h}{2\bar{S}} = \frac{n\,EI_y\,h}{\frac{2n\,l^3}{384}} = 192\,\frac{EI_y\,h}{l^3}$$

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

BIBLIOGRAFIE

1. *Petre, A., Drobotă, V.* Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare, Studii și cercetări de Mecanică aplicată, tom 16, nr. 4, 1964, Editura Academiei R.S.R.

2. *Drobotă, V.* Flambajul lateral simetric și antisimetric al grinzilor pendulare sub sarcini transversale. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", tom XXVII, nr. 5, 1965.

3. *Drobotă, V.* O metodă generală pentru calculul sarcinii critice de flambaj la grinzile continue pendulare sub sarcini transversale. Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București, nr. 3, 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

AUTOMATICĂ

C.Z. : 621-34/-38:531.3:532:621-52:621-12:621.375:621-82

UNELE PROBLEME PRIVIND DINAMICA SISTEMELOR HIDRAULICE *

S. FLOREA, I. DUMITRACHE

1. Generalități

Ecuațiile de funcționare a sistemelor hidraulice descriu pe de o parte fenomenele legate de scurgerea lichidului, iar pe de altă parte, legile de mișcare ale elementelor mecanice mobile ce compun sistemul respectiv.

Dacă la determinarea ecuațiilor se iau în considerare toți factorii constructivi și funcționali care influențează comportarea sistemului în regim dinamic, ecuațiile sau sistemele de ecuații obținute au un grad de complexitate ridicat, de cele mai multe ori prezentînd și un pronunțat aspect neliniar. Aspectul neliniar al ecuațiilor este determinat de caracterul scurgerii fluidului și caracteristicile elementelor ce formează sistemele hidraulice. Dacă se neglijează fenomenele și legăturile neesențiale, rezolvarea acestor ecuații — pentru sistemele hidraulice cărora

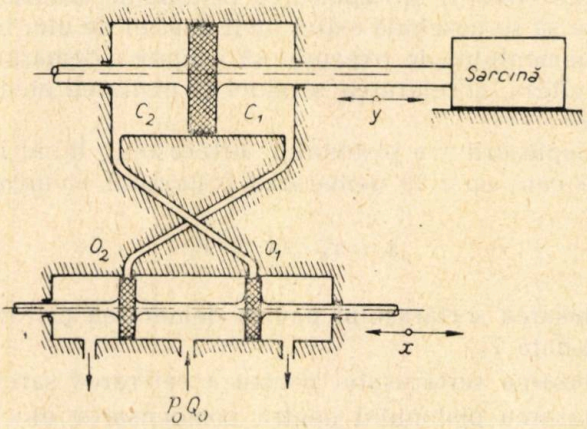


Fig. 1

* Manuscris predat la redacție la 8 septembrie 1967.

nu li se impun precizii ridicate, se poate face prin metode matematice obișnuite fără dificultăți prea mari. Dacă sistemelor hidraulice li se impun performanțe ridicate, unele fenomene legate de scurgerea fluidelor (cum ar fi, influența modificării greutății specifice, vîscozității etc.) nu pot fi neglijate ; studiul sistemelor prin metodele obișnuite este însă extrem de dificil.

Calculul acestor sisteme, rezolvarea ecuațiilor de funcționare, studiul comportării lor în regim dinamic și staționar se poate face în bune condiții folosind mijloacele de calcul moderne, respectiv calculatoarele analogice și cifrice care și în acest domeniu și-au găsit un cîmp larg de aplicații.

În cadrul lucrărilor de față ne propunem să prezentăm metoda de analiză a unui sistem hidraulic (fig. 1) format dintr-un element de comandă de tip sertăraș și un element de execuție cu dublu efect (de tip I) care acționează o sarcină dată. Se consideră că cilindrul sertărașului este prevăzut cu orificii dreptunghiulare iar lățimea gulerelor pistonului sertărașului este mai mare decît lățimea orificiului (sertăraș cu închidere completă).

2. Stabilirea ecuațiilor de funcționare a ansamblului element de comandă (sertăraș) — servomotor cu piston

Vom considera mai întîi cazul în care, între deplasarea sertărașului *(x)* și deplasarea pistonului servomotorului *(y)* există o dependență liniară. În aceste condiții la deplasarea pistonului sertărașului orificiile O_1 și O_2 trebuie să se deschidă astfel încît debitul de ulei introdus în cavitatea C_1 a elementului de execuție să asigure : demararea pistonului cu o anumită viteză, accelerarea sarcinei și anularea efectelor compresibilității.

Mărimea deplasării x a pistonului sertărașului, luînd în considerare cei trei factori care apar la demararea pistonului elementului de execuție, este :

$$x = x_1 + x_2 + x_2 \tag{1}$$

în care :

x_1 = deplasarea sertărașului pentru demararea pistonului cu o viteză dată.

x_2 = deplasarea sertărașului pentru accelerarea sarcinei.

x_3 = deplasarea pistonului pentru compensarea efectului compresibilității fluidului.

Pentru demararea pistonului servomotorului cu o anumită viteză luînd în considerare frecarea vîscoasă între cilindru și piston și sarcina servomotorului, pistonul sertărașului va trebui deplasat cu :

$$x_1 = \left(\frac{S}{K_Q} + \frac{f}{K_p S} \right) \frac{dy}{dt} \tag{2}$$

unde :

S este aria pistonului servomotorului

f este coeficientul de frecare vîscoasă

K_p este factorul de amplificare în presiune

K_Q este factorul de amplificare în debit

y este deplasarea pistonului elementului de execuție.

Pentru accelerarea sarcinei inerțiale aplicînd a doua lege a lui Newton se obține pentru deplasarea x_2 a sertărașului relația :

$$x_2 = \frac{m}{K_p \cdot S} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \tag{3}$$

unde m este masa părților mobile și a lichidului în mișcare $m = m_p + m_l$ în care :

m_p este masa părților mobile

m_l — masa lichidului în mișcare

Debitul ce trebuie să treacă suplimentar prin orificiul O_1 pentru a compensa efectul compresibilității, ținînd seama că circuitul hidraulic este simetric, va fi dat de expresia :

$$K_Q x_3 = \frac{V_0}{2\beta} \cdot \frac{dp_s}{dt} \tag{4}$$

unde :

V_o este volumul de ulei, existent în sistem

β este coeficientul de compresibilitate

p_s este presiunea pe cele două fețe ale pistonului pus în mișcare.

Înlocuind în expresia (4) căderea de presiune p_s exprimată în funcție de forța inerțială și de frecare vîscoasă se obține :

$$x_3 = \frac{Vo \cdot m}{K_Q \cdot 2\beta \cdot S} \cdot \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{Vo \cdot f}{2\beta \cdot K_Q \cdot S} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \tag{5}$$

Deplasarea totală x a pistonului sertărașului se obține din relațiile (1), (2), (3) și (5)

$$x = \frac{Vo \cdot m}{2\beta \cdot K_Q \cdot S} \frac{d^3y}{dt^3} + \left(\frac{Vo \cdot f}{2\beta K_Q S} + \frac{m}{K_p \cdot S} \right) \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{S}{K_Q} + \frac{f}{K_p \cdot S} \right) \frac{dy}{dt} \tag{6}$$

În ipoteza că presiunea de lucru a fluidului în sistem nu depășește 40 kgf/cm², caracteristicile statice ale orificiilor O_1 și O_2 fiind liniare, se poate considera că $\beta \approx$ constant, iar coeficienții de amplificare sînt deasemeni constanți.

Ecuația 6 în aceste ipoteze se poate scrie sub forma :

$$x = a_3 \frac{d^3y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} \tag{7}$$

Coeficienții a_1, a_2, a_3 pot fi considerați cu suficientă aproximație ca fiind constanți, iar funcția de transfer a ansamblului se poate scrie sub forma :

$$Y(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{K}{s\left[\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1\right]} \tag{8}$$

unde :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2\beta S^2}{Vo \cdot m}\left(1 + f\frac{K_Q}{K_p S^2}\right)} \text{ — pulsația naturală}$$

$$\zeta = \frac{2K_Q \beta m + f V_0 K_p}{\sqrt{8 Vo\, m K_p \beta (K_p S^2 + f \cdot K_Q)}} \text{ — factorul de amortizare}$$

$$K = \frac{K_Q \cdot K_p \cdot S}{K_p S^2 + f K_Q} \text{ — factorul total de amplificare.}$$

Coeficienții ecuației de funcționare, respectiv mărimile ω_n, ζ, K, pot fi calculate cunoscînd parametrii constructivi ai ansamblului.

În aceste ipoteze, considerînd deplasări mici ale sertărașului și în mod corespunzător deplasări mici ale pistonului elementului, de execuție, sistemul poate fi considerat cu suficientă aproximație ca fiind liniar, iar pentru studiul unui asemenea sistem pot fi folosite metodele obișnuite de analiză a sistemelor automate liniare.

Folosind tehnica calculului ecuația (7) poate fi rezolvată cu un calculator analogic corespunzător, după schema dată în fig. 2. Realizînd schema din fig. 2 pe calculatorul analogic studiul sistemului se conduce

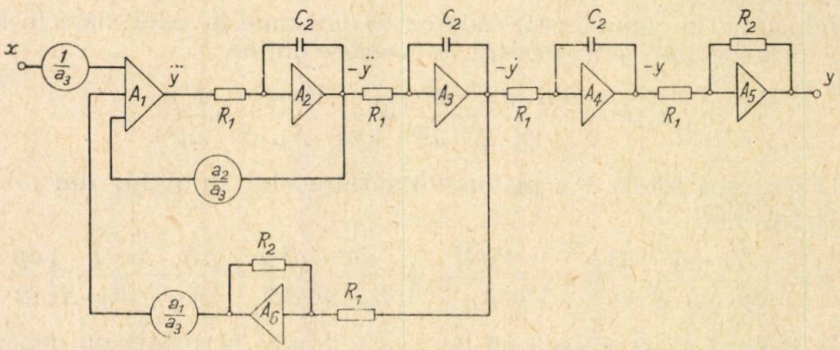


Fig. 2

astfel încît modificînd corespunzător coeficienții ecuației determinați de parametrii constructivi și funcționali ai sistemului — să se obțină performanțele stabilite pentru regimul tranzitoriu și staționar.

Luarea în considerație a tuturor elementelor care pot influența funcționarea sistemului hidraulic cum ar fi : neliniaritatea orificiilor O_1 și

O_2, variația compresibilității la valori ridicate ale presiunii, forțele de frecare uscate și eventual acoperirea sertărașului, conduce în cazul unor deplasări relativ mari ale pistonului sertărașului la apariția unor neliniarități tip și studiul sistemului trebuie făcut ca atare. Considerînd efectul închiderii complete a sertărașului asupra funcționării sistemului, ecuația (6) va avea în membrul drept o funcție neliniară $F(x)$ definită astfel :

$$F(x) = 0 \qquad \text{pentru } |x| \leqslant x_1$$
$$F(x) = x - x_1 \text{ pentru } x > x_1 \tag{9}$$
$$F(x) = x + x_1 \text{ pentru } x < -x_1$$

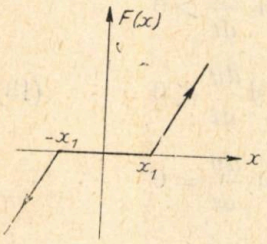


Fig. 3

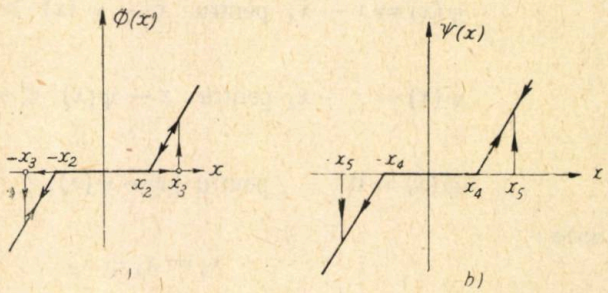


Fig. 4

Funcția F(x) exprimă apariția zonei de insensibilitate pronunțată în cazul unui sertăraș cu închidere completă.

Ecuația de funcționare a sistemului în cazul în care se consideră ca neliniaritate esențială doar influența închiderii complete a sertărașului este :

$$\frac{Vo \cdot m}{2\beta \cdot K_Q \cdot S} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + \left(\frac{Vo \cdot f}{2\beta \cdot K_Q \cdot S} + \frac{m}{K_p \cdot S} \right) \frac{d^2 y}{dt^2} +$$
$$+ \left(\frac{S}{K_Q} + \frac{f}{K_p \cdot S} \right) \frac{dy}{dt} = F(x) \tag{10}$$

Neliniaritățile introduse ca urmare a forțelor de frecare uscată le vom considera prin intermediul funcției neliniare $\Phi(x)$ acestea depinzînd și de semnul vitezei pistonului elementului de execuție. Funcția neliniară $\Phi(x)$ fig. 4 se definește în acest caz astfel :

$$\Phi(x) = x - x_2 \text{ pentru } x - \Phi(x) > x_2 \text{ și } \frac{dy}{dt} > 0$$
$$\Phi(x) = x + x_2 \text{ pentru } x + \Phi(x) < x_2 \text{ și } \frac{dy}{dt} < 0 \tag{11}$$
$$\Phi(x) = 0 \qquad \text{pentru } |x - \Phi(x)| < |x_3| \text{ și } \frac{dy}{dt} = 0$$

Considerînd cele două funcții neliniare $F(x)$ și $\Phi(x)$ ecuația (10) devine :

$$\frac{Vo \cdot m}{2\beta \cdot K_Q \cdot S} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + \left(\frac{Vo \cdot f}{2\beta \cdot K_Q \cdot S} + \frac{m}{K_p \cdot S} \right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \\ + \left(\frac{S}{K_Q} + \frac{f}{K_p \cdot S} \right) \frac{dy}{dt} = \psi(x) \qquad (12)$$

unde $\psi(x)$ este funcția neliniară obținută din însumarea efectelor celor două neliniarități și are expresia :

$$\psi(x) = x - x_4 \text{ pentru } x - \psi(x) > x_4 \text{ și } \frac{dy}{dt} > 0$$

$$\psi(x) = x + x_4 \text{ pentru } x - \psi(x) < -x_4 \text{ și } \frac{dy}{dt} < 0 \qquad (13)$$

$$\psi(x) = 0 \qquad \text{pentru } |x - \psi(x)| < |x_5| \text{ și } \frac{dy}{dt} = 0$$

unde :

$$x_4 = x_1 + x_2$$
$$x_5 = x_1 + x_3$$

3. Programarea pe calculatorul analogic

Rezolvarea ecuației 12 folosind calculatoare analogice reduce sensibil timpul de calcul, iar precizia calculelor crește considerabil.

Considerînd coeficienții ecuației (12) ca fiind constanți programul pe calculatorul analogic a acestei ecuații va fi compus atît din elemente liniare care realizează operațiile de integrare a ecuației, cît și din elementele neliniare tipice care să realizeze neliniaritățile esențiale de tip zonă de insensibilitate și de tip releu. În fig. 5 este reprezentat programul de rezolvare a ecuației (12) în ipoteza coeficienților constanți în membrul stîng al ecuației

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} = \psi(x) \qquad (15)$$

Schema de programare trebuie să realizeze pe deoparte integrarea ecuației (15) în cazul în care membrul drept este nul, iar pe de altă parte trebuie realizate dependențele neliniare date prin funcția $\psi(x)$, luînd în considerație semnul vitezei de deplasare a pistonului. Pentru găsirea soluției, programul va cuprinde următoarele părți :

— partea liniară formată din amplificatoarele A_1, A_2, A_3 în regim de integrare A_4, A_5 în regim de inversor de semn și A_6 în regim de sumator.

— partea neliniară care realizează dependența neliniară $\psi(x)$ formată din potențiometrele P_1, P_2, P_3 și amplificatoarele A_7, A_8, A_9; cele trei grupuri de elemente permit realizarea dependențelor neliniare de tip zonă de insensibilitate și de tip releu.

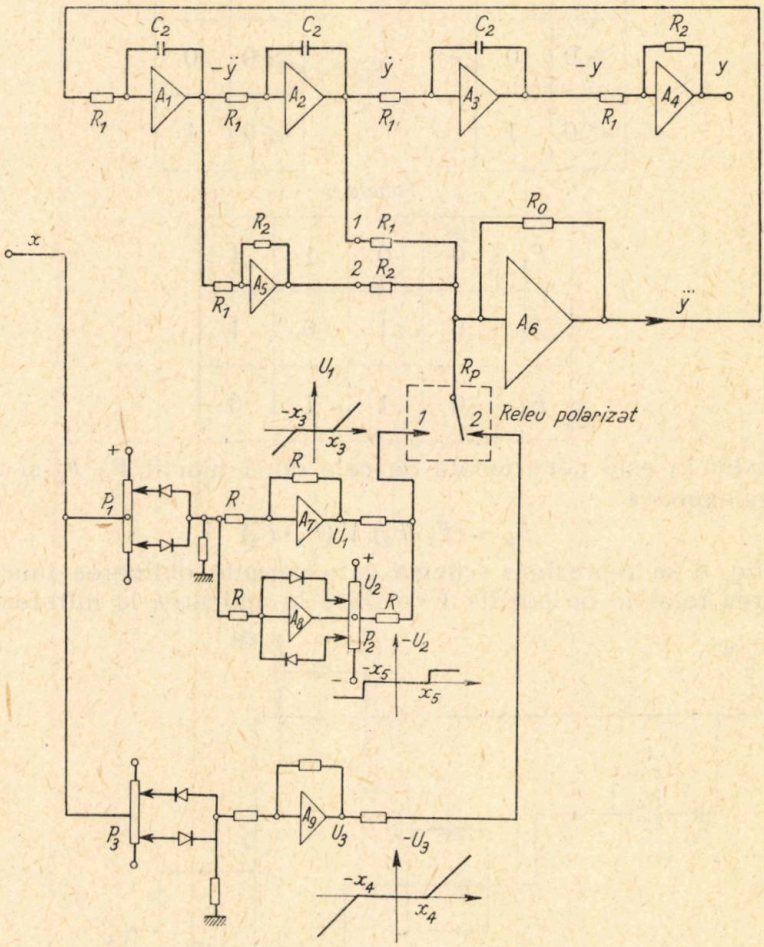


Fig. 5

— partea a treia, care realizează comutarea releului polarizat R_p (cu două poziții) pe poziția 1 sau 2 în funcție de semnul variabilei y și a vitezei de deplasare a pistonului servomotorului, este alcătuită din funcțiile logice SI, SAU, NU și din amplificatoarele A_{10}, A_{11}, A_{12} în regim de diferențiator și discriminator de semn (fig. 6).

Releul polarizat permite aplicarea la intrarea amplificatorului A_6 a funcției neliniare $\psi(x)$, realizată pe porțiuni. Pentru a urmări modul

de comutare a releului polarizat în tabelele 1, 2, 3 sînt date funcțiile ce permit acest lucru.

Tabela 1

y	F_1
$\geqslant 0$	0
<0	1

Tabela 2

$\dot{y}$	F_2
$\geqslant 0$	0
<0	1

Tabela 3

F_1	0	0	1	1
F_2	0	1	0	1
F_3	0	1	1	0

Funcția F_3 este determinată de cele două funcții F_1, F_2 și are următoarea expresie :

$$\bar{F}_3 = (\bar{F}_1 \cdot F_2)\ V\ (F_1 \cdot \bar{F}_2) \tag{16}$$

În fig. 6 se reprezintă schema care permite obținerea funcției F_3. Comutarea releului pe poziția 1 conduce la aplicarea la intrarea suma-

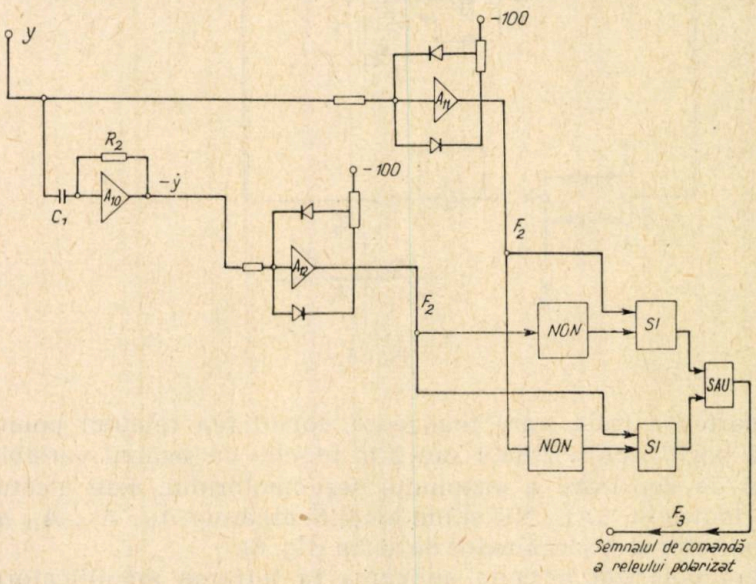


Fig. 6

torului a funcției neliniare realizată prin compunerea unei zone de insensibilitate și a unei caracteristici de tip releu. La ieșirea sumatorului A_6 se va obține funcția $\dddot{y}$ dată de expresia :

$$\dddot{y} = \frac{1}{a_3} \cdot \psi(x) - \frac{a_2}{a_3} \ddot{y} - \frac{a_1}{a_3} \dot{y} \tag{17}$$

Modificarea corespunzătoare a elementelor de circuit care permit obținerea neliniarităților în această schemă, asigură studiul influenței tuturor parametrilor asupra comportării în regim staționar și tranzitoriu, a sistemului hidraulic dat.

În calculele efectuate au fost considerați factori constanți de amplificare în debit și presiune, pentru abateri relativ mici ale variabilelor în jurul punctului de funcționare, lucru care a permis obținerea unei ecuații cu coeficienți constanți.

Factorii de amplificare în debit și presiune pot fi determinați cu ajutorul expresiilor :

$$K_p = \left(\frac{\Delta p}{\Delta x}\right)\Bigg|_{Q=\text{const.}}$$
$$K_Q = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta x}\right)\Bigg|_{p=\text{const.}} \tag{18}$$

Admițînd că sistemul este alimentat de la o sursă de presiune constantă p_0 și considerînd secțiunea orificiului O_1 ca fiind dreptunghiulară, debitul ce trece prin orificiu poate fi exprimat prin relația :

$$Q = K \cdot x \cdot \sqrt{\Delta p} = K \cdot x \cdot \sqrt{p_0 - p_x} \tag{19}$$

unde : K este un coeficient de proporționalitate.

Relația (19) pune în evidență variația factorilor de amplificare în debit și presiune pentru deschideri mari ale orificiului O_1. Dacă se consideră o dependență liniară între presiunea p_x și deplasarea sertărașului, înlocuind în relația (19) expresia lui p_x sub forma $p_x = p_0 - K_1 x$ debitul poate fi exprimat astfel :

$$Q = K_2 x \sqrt{x} \tag{20}$$

Din relația (20) se poate constata că factorul de amplificare în debit este o funcție parabolică de deplasarea x a pistonului sertărașului :

$$K_Q = K_0 \sqrt{x} \tag{21}$$

Înlocuind expresia (21) în relația (15) și considerînd că factorul de amplificare în presiune este constant se obține :

$$\frac{K_3}{\sqrt{x}} \frac{d^3 y}{dt^3} + \left(K_2 + \frac{K_4}{\sqrt{x}}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{K_1}{\sqrt{x}} + K_0\right) \frac{dy}{dt} = \psi(x) \tag{22}$$

sau

$$\frac{K_3}{\sqrt{x}}\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{K_4}{\sqrt{x}}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{K_1}{\sqrt{x}}\frac{dy}{dt}+K_2\frac{d^2y}{dt^2}+K_0\frac{dy}{dt}=\psi(x)$$

$$K_3\frac{d^3y}{dt^3}+K_4\frac{d^2y}{dt^2}+K_1\frac{dy}{dt}+K_2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+K_0\sqrt{x}\cdot\frac{dy}{dt}=\psi(x)\cdot\sqrt{x} \quad (23)$$

Rezolvînd ecuația 22 în raport cu derivata de ordinul trei se obține:

$$\dddot{y}=\frac{1}{K_3}\cdot\psi(x)\cdot\sqrt{x}-\frac{K_4}{K_3}\ddot{y}-\frac{K_1}{K_3}\dot{y}-\frac{K_2}{K_3}\cdot\sqrt{x}\cdot\ddot{y}-\frac{K_0}{K_3}\sqrt{x}\cdot\dot{y} \quad (23)$$

Pentru rezolvarea ecuației (23) este necesar să se realizeze pe calculator schema de programare dată în fig. 7.

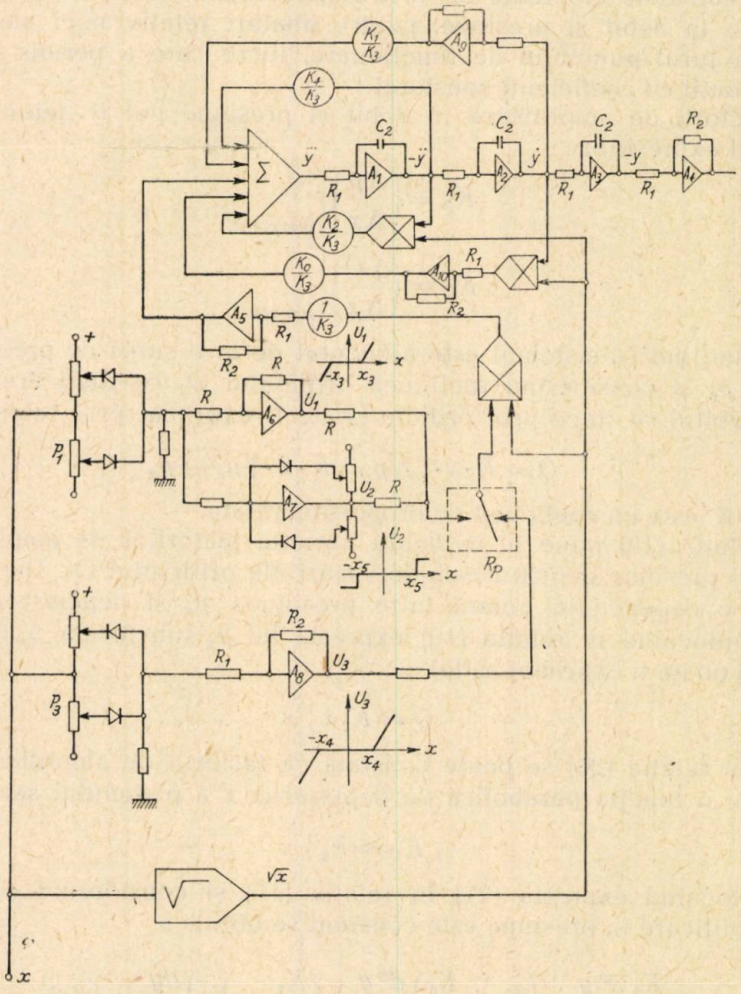


Fig. 7

Metoda expusă a fost aplicată pentru un sistem de acționare hidraulic (fig. 1) alimentat cu ulei la p presiune de 6 kgf/cm² destinat să deplaseze o sarcină de 200 kgf pentru o cursă maximă a pistonului elementului de execuție $y_{max} = 100$ mm folosind un calculator analogic MEDA. Unele date constructive pentru elementele principale ale sistemului au fost stabilite prin analogie cu sisteme existente, obținîndu-se în final parametrii constructivi și funcționali care asigură funcționarea optimă a sistemului în regim dinamic și staționar.

În cazul sistemului studiat în prezenta lucrare, folosind un calculator analogic, au fost verificate și confirmate deosebitele avantagii pe care le asigură utilizarea tehnicii calculului în analiza dinamicei sistemelor complexe.

În cadrul lucrării este folosită pentru prima dată metoda de rezolvare pe calculatorul analogic punîndu-se astfel în evidență aspectele neliniare ale funcționării sistemelor hidraulice.

Catedra de automatică 1
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
București

BIBLIOGRAFIE

1. *John F. Blockburn*, Fluid Power Control — London, 1960.
2. *Lewis-Stern*, Design of hydraulic Control Systems New-York — Toronto — London, 1962.
3. *S. Florea*, Elemente de reglaj și automatizări. Editura didactică și pedagogică, 1967.
4. *N. S. Gorskaia, I. N. Krutova*, Dinamica nelineinih servomehanismov, Moskva 1959.
5. *A. Petrescu, C. Nitu*, Modelarea pe calculatoare analogice a sistemelor cu structură variabilă. În „Automatica și Electronica" nr. 6 din 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

C.Z. :621-55:621.38:621.374:621.3.06:621.376:621.314.7

METHOD FOR IMPROVING THE PERFORMANCES OF CONTROL SYSTEMS WITH DIGITAL CONTROLLERS *

C. I. NITU

The tendency of using universal computers in process control, requires the design of specialised computer to allow the rational use of their comptuting capacity. For instance, optimization of one complex technological process asks for controlled variables measuring at certain discrete time moments as well as for the reference computation. As computer operates with figures belonging to a certain code, it is obvious that technological parameters control is to be effectuated with specialised computer to store the references and to achieve a lot of elementary logical and arithmetical operations. Those specialized computer aimed at keeping a constant variable are called digital controllers.

Among the various uses of the aforesaid controllers may be quoted high accurate control for electric drivings, slow process regulation, frequency and power regulation in power systems.

Digital regulators structure is so designed as to allow the following operations :

1. Error computation defined as a difference between the reference and the actual controlled variable value.

2. Command variable computation consisting of error processing folowing a certain law defining the regulator type. Accordingly there are to be met various regulator types as P, I, PI and PID a.s.o. In case of PID digital regulator, there is a certain interdependence between error and command variable :

$$X_c(nT) = K_1 \varepsilon(nT) + K_2 \sum_{i=} \varepsilon(iT) + K_3 [\varepsilon(nT) - \varepsilon(n-1, T)]$$

In the industrial field, the most used are P, I and PI digital regulator because they are simpler and able to ensure satisfactory performances [1]. Because automatic systems analysis and synthesis are achieved on the

* Manuscris predat la redacție la 20 august 1967

basis of transfer function, as per fig. 1, we obtain the following Laplace transformation for input and output of each error processing channel :

$$\varepsilon(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

$$X_p(s) = \frac{K_1}{s}$$

$$X_I(s) = \frac{K_2}{s}(1 - e^{-Ts} + 2e^{-Ts} + \ldots) = \frac{K_2}{s} \cdot \frac{1}{s - e^{-Ts}}$$

$$X_D(s) = K_3 \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

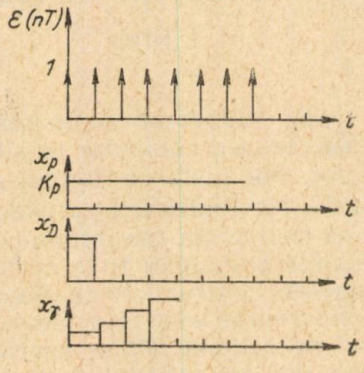


Fig. 1

Where from transfer function are obtained for each error processing channel :

$$Y_p(s) = \frac{X_p(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{K_1(1 - e^{-Ts})}{s}$$

$$Y_I(s) = \frac{X_I(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{K_2}{s}$$

$$Y_D(s) = \frac{X_D(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{K_3(1 - e^{-Ts})^2}{s}$$

The transfer function of a PID regulator is obtained by summing up the three components :

$$Y(s) = Y_p(s) + Y_D(s) + Y_I(s).$$

In order to check digital regulator system performances knowing the transfer function, the open system transfer function is written and the transient process is drawn up. In case of synthesis problems there is applied one of the stability criteria and the finite time criterion. Ge-

nerally, synthesis of a system using these criteria leads to overshoot increasing or digital regulators having a more complex structure than PID regulators. Consequently, the problem is to find a method to allow obtention of higher performances requiring no essential changes in digital regulator structure. Further in this connection, a method is presented foreseeing the variation of a digital regulator adjusting parameter according to the magnitude of error and its derivative. The variation of one adjusting parameter according to the magnitude of error may be simply carried out when comparison is done by controlled variable decoding [7, 9]. For instance, in case of the integral regulator, the multiplying factor (eq. 2) is varied according to the magnitude of error. Thus, for small error the factor K_2 aquires a low value, while for big error — a high value. Of course, the variation of an adjusting parameter may be made in several steps. The number of logical elements increases with the number of steps.

The value of K_2 factor should be selected so that the variation in time of the controlled variable should be higer for high error value and lower for low error (when $\varepsilon \cdot \varepsilon > 0$).

The command of the digital regulator may be reprezented in two main ways :

1. Successive signals having constant amplitudes and period but a width determined by the regulation law (puls-width modulated).

2. Successive signals having constant width, constant period and the amplitude determined by regulation law (amplitude modulation).

Unlike other modulation types these modulations quoted above are simpler in structure. In the former case the output block of the regulator is a reversible numerator, while in the later case it is a storage.

The method of time modulation of command pulses will be largely used in the future because the regulator structure (even PID) is simpler and consequently less expensive.

For the above reasons, further examples are given for adjustment of digital regulators, when the command consist of width modulated pulses. Laplace discrete transformation [1] is used to analyse the time modulated digital regulator system. In the prezent report, is applied the state-spase method of analysis [2].

An automatic linear system is given the differential equation :

$$\frac{dV(\lambda)}{dt} = A \cdot V(\lambda) \tag{1}$$

where $V(\lambda)$ is a column vector including the input and state variables and A matrix characterizing the given system. Another matrix B, characterizing the initial conditions is also defined and used to compute the vector $V(nT^+)$, supposing we know $V(nT)$

$$V(nT^+) = B \cdot V(nT)$$

Applying Laplace transformation from eq. 1 it is found that :

$$s \cdot V(s) = A \cdot V(s) + V(0^+)$$

and hence :

$$V(s) = [s\,I - A]^{-1} \cdot V(0^+) \tag{2}$$

when I is a unitary matrix. Applying Laplace inverse transformation, the equation results in :

$$V(\lambda) = \mathfrak{L}^{-1}[s\,I - A]^{-1} \cdot V(0^+)$$

If $\mathfrak{L}^{-1}[s\,I - A]^{-1} = \phi(\lambda)$

equation (2) becomes

$$V(\lambda) = \phi(\lambda) \cdot V(0^+).$$

Matrix $\Phi(\lambda)$ is also termed as transition matrix. In the case of discrete time moments, namely $t = nT$, where T is the sampling period from the eq. (6) it is found :

$$V[(n+1)T] = \phi(nT) \cdot B \cdot V(nT)$$

Consequently, the state spase computation method includes the following stages :

1. If the differential equation and initial conditions of the given system are known, then the matrices A and B may be written.

2. For sampled system is drown up the analog computer simulation diagram and the state variables are determined. Since the simulation diagram may be drawn up in various ways it results that the state variable selection is not unique (it is important to choose measurable quantities as state variables).

3. The values of the vector V (nT) are determined, and the transient process of the system output variable is traced, for various values : n = 1, 2,...,n.

Here is an example to illustrate the method suggested :

To regulate a technological parameter having a transfer function of the fixed part which has the form :

$$Y_f(s) = \frac{K_f}{s+1}$$

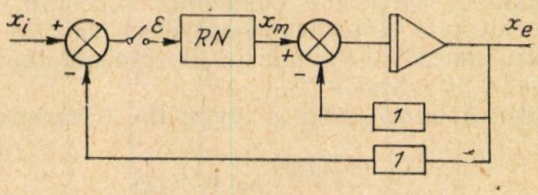


Fig. 2

it is used an integral digital regulator with the command variable in the form of time modulated pulses. From the analog computer simulation diagram of the sampled system (fig. 2) it results [2].

$$V = \begin{bmatrix} x_i \\ x_e \\ \varepsilon \end{bmatrix}; \quad V(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 1 - e^{-\lambda} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Since the plant has a time constant $T=1$, it is recommended (in accordance with the sampled system theory) to use the condition $T<T_f$. In this view, we shall analyse various instances :

a) The sampling period is $T=0,5$ and the digital regulator has the following parameters : the width of the command pulses is defined by equations :

$$\tau(nT)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon(iT);\ \text{when}\ \left|\sum_{i=0}^{n}\varepsilon(iT)\right|\leqslant 0,5$$

$$\tau(nT)=0,5;\ \text{when}\ \left|\sum_{i=0}^{n}\varepsilon(iT)\right|>0,5$$

and the magnitude of the amplitude is :

$$X_m(nT)=+2;\ \text{when}\ \sum_{i=0}^{n}\varepsilon(iT)>0$$

$$X_m(nT)=-2;\ \text{when}\ \sum_{i=0}^{n}\varepsilon(iT)<0$$

It is required to analyse the performances when a step signal is applied at the input : by following the indicated computation stages, the transient process, shown in fig. 3 is determined. The command pulses

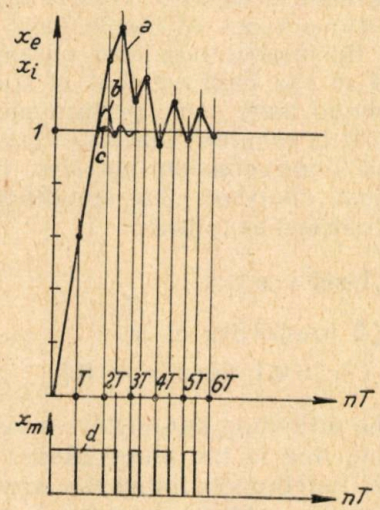


Fig. 3

performed by the regulator (fig. 3d) have the same polarity, thus corresponding to the way in which an integral regulator operates. It may be noted that since the sampling period assumes a value comparable to the time constant, an overshoot as high as T = 41 % and a reduced damping ratio of the transient process have resulted.

b) Sampling period T=0,1, the amplitude magnitude of the command pulse is 2, and the maximum width, defined by eq. 9 is 0,1. Similarly, the values of vector V are computed for various time moment and the transient process shown in fig. 3b is obtained. The variation in time of the command variable has the same character but the width is smaller, because $\tau_{max} = 1.0$. In this case performances are improved, namely :

$$\sigma = 8\% \text{ and } t_r \simeq 3T$$

c) Digital regulator with variable parameters that yeld command pulses according to the error characteristics (magnitude of the amplitude and derivative). We shall analyse the performances of the integral regulator, when the magnitude of the amplitude is defined by :

$$|X_m(nT)| = 2 \text{ when } |\varepsilon| \geqslant 0{,}1$$
$$|X_m(nT)| = 1{,}1 \text{ when } |\varepsilon| < 0{,}1$$

We consider that the other parameters have the same value as in the above example. Computing along the lines of the indicated method, the transient process shown in fig. 3c, is obtained. Note that the method suggested to improve the performances of an automatic system provided with a digital regulator leads to an overshoot : $\sigma = 2\%$ and a regulation time $t \simeq 2T$.

Similarly, the performances of some control loops with digital regulators P and PI for various types of plants have been studied. In all cases the variation of the digital regulator parameters with the error characteristics resulted in the improvement of transient performances. In order that system shoud have same performance in the presence of an internal disturbance it is required that the variation of the regulator adjusting parameters be done considering also the error derivative. Hence, in the cases just analysed the amplitude magnitude of the command pulse will be defined as follows :

$$X_m = 2 \text{ for } |\varepsilon| > 0{,}1 \text{ and } \varepsilon \cdot \dot{\varepsilon} > 0$$

$$X_m = 1{,}1 \text{ for } \begin{cases} \varepsilon \cdot \dot{\varepsilon} < 0 \text{ irrespective of } |\varepsilon| \\ \varepsilon \cdot \dot{\varepsilon} > 0{,}1 \text{ when } |\varepsilon| < 0{,}1. \end{cases}$$

The variation of the adjusting parameters may be done considering also a straight switching line in the phase plane. As the use of the derivation in the logical functions defining the way in which the adjusting parameters vary requires extratransistors, it is necessary that this method be applied in case the regulations are done when disturbance occur. In the cases when disturbance are negligible it is not necessary to insert this logical process, and consequently the regulator structure will be simpler.

Automatic Control Chaire
Polytechnical Institute „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucharest

BIBLIOGRAPHY

1. *Krug E. and others*, Tifroviie reguliatori E. Nauka 1966.

2. *Tipkin I. Z.* (red.), Problemî teorii Kimpulsnîh sistem upravlenia, Ed. Nauka 1966.

3. *Mishkin E., Braun L.*, Adaptive control systems Mc Graw-Hill, 1961.

4. *Călin S., Nitu C.*, Regulatorul numeric proporțional RN.1. Automatica și electronica, N1 — 1968 (sub tipar).

5. *J. Tou*, Digital and Sampled — Data Control Systems, Mc Graw-Hill 1959.

6. *Călin Sergiu*, Calculul și construcția regulatoarelor, Ed. Didactică și Pedagogică, 1967.

7. *Nitu C.*, O metodă pentru varierea parametrilor de acordare a regulatoarelor numerice. Automatica și electronica nr. 5 — 1967.

8. *Kunțevici V. M.*, Impulsniie samonastra — ivaiușciesea i extremalnîe S.A.Y., Kiev 1966.

9. *Nitu C.*, Element de măsură pentru dispozitive numerice de reglare. Metrologia aplicată nr. 10 — 1967.

10. *Călin S., Nitu C.*, Regulatoarele numerice RN-1 și RN-2. Sesiunea de comunicări a Comisiei de Automatizare 16—18 octombrie 1967.

11. *Krug E. K., Minina O. A.*, Electriceskie reguliatorî promîșlennoi avtomatiki, Goseneroizdat 1962.

12. *J. Tou*, Modern Control Theory, Mc-Graw-Hill 1964.

13. Elemente de automatizare. Sesiunea de comunicări I.P.A., M.I.C.M., IDT 1967.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

TERMOTEHNICĂ

C.Z. : 621.1.01:662.998:621.56/.59:546.171.1:661.518

UNE CARACTÉRISTIQUE POUR EXPRIMER LA QUALITÉ DU PROCESSUS FRIGORIFIQUE À ABSORPTION AMMONIAC-EAU *

C. STAMATESCU, MARIETA GRIGORIU, T. DUICU

Le froid produit dans un processus frigorifique peut servir pour maintenir dans un milieu isolé du point de vue thermique, désigné sous le nom de milieu réfrigéré, une certaine température T_0, moindre que la température ambiante T_a, ou pour réaliser dans le milieu réfrigéré une température T_2 moindre que $T_1 (T_2 < T_1)$, celle-ci étant, à son tour, égale ou moindre que la température ambiante $(T_1 \leqslant T_a)$.

Dans les deux cas, l'isolateur thermique étant imparfait, prend naissance un écoulement continu, un flux de chaleur $\dot{Q}$, de l'extérieur vers le milieu réfrigéré, qui, se produisant à la température ambiante, constitue un flux d'annergie $\dot{A}n_{(Q)}$, parce que, en général [1], $\dot{E}x_{(Q)}$ étant le flux d'exergie :

$$\dot{Q} = \dot{E}x_{(Q)} + \dot{A}n_{(Q)} \tag{1}$$

$$\dot{E}x_{(Q)} = \left(1 - \frac{T_a}{T}\right)\dot{Q}\,;\quad \dot{A}n_{(Q)} = \frac{T_a}{T}\,\dot{Q} \tag{2}$$

Pour $T = T_a$,

$$\dot{E}x_{(Q)} = 0 \text{ et } \dot{A}n_{(Q)} = \dot{Q} \tag{3}$$

Pour maintenir la température T_0 dans le milieu réfrigéré pratiquement constante, il faut faire évacuer le flux de chaleur $\dot{Q}_0$ au niveau de la température T_0, flux exprimé selon les relations (1) et (2), par :

$$\dot{Q}_0 = \dot{E}x_{(Q_0)} + \dot{A}n_{(Q_0)} = \left(1 - \frac{T_a}{T_0}\right)\dot{Q}_0 + \frac{T_a}{T_0}\,\dot{Q}_0 \tag{4}$$

Pour $T_0 < T_a$. $\dot{E}x_{(Q_0)} < 0$ et $\dot{A}n_{(Q_0)} > 0$, donc

$$\dot{Q}_0 = \dot{A}n_{(Q_0)} - |\dot{E}x_{(Q_0)}|, \text{ donc} \tag{5}$$

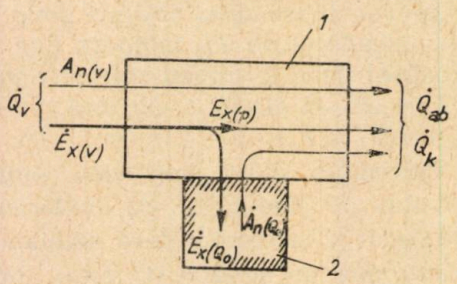
les deux flux constituant le flux de chaleur $\dot{Q}_0$, sont contraires.

* Manuscris predat la redacție la 6 noiembrie 1966.

Il en résulte que, pour faire évacuer le flux de chaleur $\dot{Q}_0$ du milieu isolé thermique, il faut réaliser, par rapport à ce milieu, la sortie du flux d'annergie $\dot{A}n_{(Q_0)}$ et l'entrée du flux d'exergie $\dot{E}x_{(Q_0)}$.

L'étude de la production du froid dans de conditions de température descendante se conduit d'une manière similaire que l'étude à la température constante, par l'introduction de „la température moyenne thermodynamique" définie par le professeur H. D. Baehr [2], par la relation $T_{0m} = \frac{i_2 - i_1}{s_2 - s_1}$. Les états physiques désignés par les indices 1 et 2 dans cette relation sont les états de l'agent frigorigène pendant la vaporisation, au commencement, respectivement à la fin du processus.

Pour pouvoir déterminer la relation de calcul du rendement exergétique du processus frigorifique à absorbtion on fait usage d'un schème de bilan exergétique (fig. 1) duquel on déduit :



1. Machine frigorifique
2. Milieu isolé
— Flux d'exergie
— Flux d'annergie

Fig. 1

Le flux de chaleur $\dot{Q}_v$ nécessaire pour le développement du processus à absorbtion fait pénétrer le flux d'exergie $\dot{E}x_{(v)}$ et le flux d'annergie $\dot{A}n_{(v)}$, l'échange d'énergie avec l'extérieur ayant lieu dans ce processus sous la forme de chaleur [1].

Le flux d'exergie $\dot{E}x_{(v)}$ est constitué de deux parts : le flux d'exergie $\dot{E}x_{(Q_0)}$ nécessaire pour le milieu réfrigéré, isolé du point de vue thermique (l'espace noté (2) dans la figure 1) et les pertes d'exergie, $\dot{E}x_{(p)}$, produites dans la machine frigorifique (1), (fig. 1).

De l'espace isolé (2) (fig. 1) on fait évacuer le flux de chaleur $\dot{Q}_0$, sous la forme (relation 5) :

$$\dot{Q}_0 = \dot{A}n_{(Q_0)} - |\dot{E}x_{(Q_0)}|.$$

De la machine frigorifique (1) (fig. 1) on fait évacuer, à la température ambiante, à l'aide de l'eau de refroidissement, c'est-à-dire sous la forme d'un flux d'annergie, le flux de chaleur de l'absorbiteur $\dot{Q}_{ab}$, et le flux de chaleur du condensateur, $\dot{Q}_k$.

Du schème de bilan ci-dessus résumé résulte l'expression du rendement exergétique comme rapport de l'exergie tirée du processus, $\dot{E}x_{(Q_0)}$, à l'exergie utilisée, $\dot{E}x_{(Q_0)} + \dot{E}x_{(p)}$, c'est-à-dire

$$\eta_{ex} = \frac{\dot{E}x_{(Q_0)}}{\dot{E}x_{(Q_0)} + \dot{E}x_{(p)}} = \frac{\dot{E}x_{(Q_0)}}{\dot{E}x_{(v)}} \tag{6}$$

Ce rendement caractérise les pertes d'énergie dues aux phénomènes irréversibles qui se produisent dans la machine frigorifique réelle ; ce rendement peut être examiné comparativement au rendement exergétique de toute autre machine frigorifique (comme type, processus, proportions etc.).

En faisant usage de l'expression du flux d'exergie basée sur le facteur Carnot (relation (2)) et d'une température moyenne $T_{v\,\mathrm{med}}$ dans le générateur à vapeur ($T_{v\,\mathrm{med}} = \frac{Tv_A + Tv_Z}{2}$, les indices A et Z indiquent le début, respectivement la fin de la séparation de la vapeur ammoniac-eau), on obtient l'expression de calcul du rendement exergétique pour le processus à absorbtion :

$$\eta_{ex} = \frac{T_a - T_0}{T_0} \cdot \frac{T_{v\,\mathrm{med}}}{T_{v\,\mathrm{med}} - T_a} \cdot \frac{q_0}{q_v} \tag{7}$$

On a étudié la variation des valeurs de ce rendement pour les marches les plus usuelles des processus à absorption, et ce matériel est résumé dans ce que suit :

1. *Le processus simple* (un étage, sans améliorations)

Le processus est présenté dans les figures 2 et 3, à l'aide des dia-

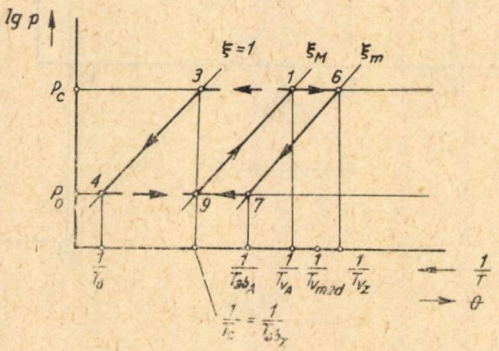


Fig. 2

grammes en coordonnés lg $p, \frac{1}{T}$, respectivement i, ζ (enthalpie-concentration). On a noté dans les diagrammes les températures qui intéressent tout d'abord (T_0, Tv_A et Tv_Z) et les valeurs spécifiques des quantités

de chaleur notées q_0 et q_v, utilisées dans la relation de calcul du rendement exergétique (7).

On a calculé les valeurs des rendements exergétiques et on a établi leurs variations entre les limites usuelles de la température de vaporisation θ_0, de —30°C à +10°C, et de la température de condensation θ_c,

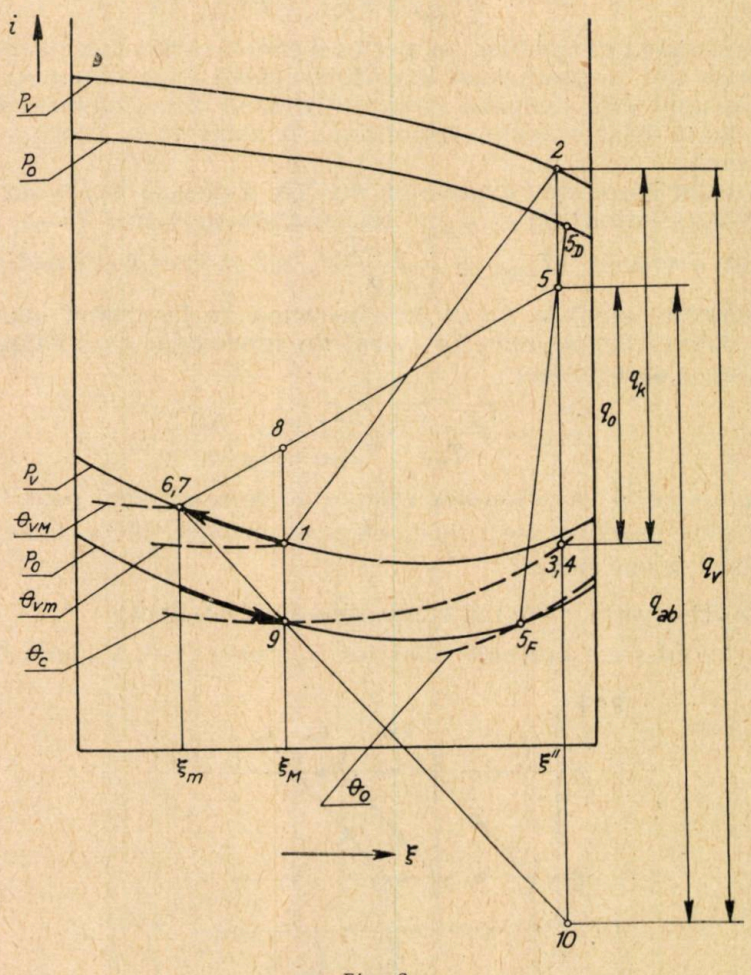


Fig. 3

de +25°C à +35°C. Les résultats sont synthétisés dans les figures numéros 4, 5 et 6, qui contiennent les courbes continues représentant les fonctions $\eta_{ex} = F(\theta_0)$. Superposées dans les mêmes figures, on a tracé quelques-unes des courbes exprimant les fonctions $\varepsilon = F'(\theta_0)$ (la variation des valeurs de l'efficacité frigorifique, correspondante) pour déduire la différence entre les allures des deux catégories de courbe.

On déduit de ce matériel, pour le processus simple :

— Les fonctions $\eta_{ex} = F(\theta_0)$, répresentant les variations des valeurs des rendements exergétiques par rapport à la température de vaporisation θ_0, les températures θ_c et θ_{vM} étant considérées comme paramètres, présentent de maxima pour certaines valeurs de θ_0. Ces maxima indiquent

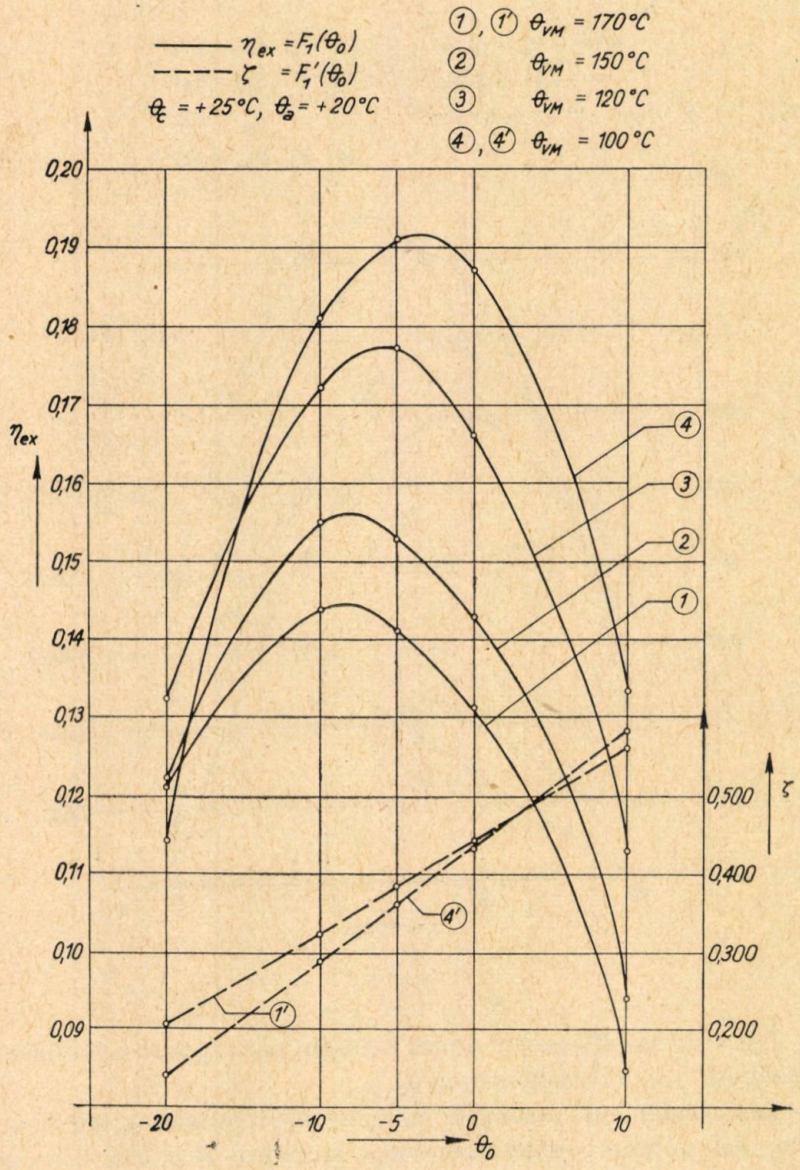


Fig. 4

les conditions meilleures des processus, ce qu'on ne peut pas établir à l'aide de l'efficacité frigorifique, ε.

— Les rendements exergétiques comme fonctions de la température θ_0 ($\eta_{ex} = F(\theta_0)$) baissent par rapport à l'augmentation de la température θ_{vM} (à laquelle se produit l'ébullition de la solution ammoniac-eau).

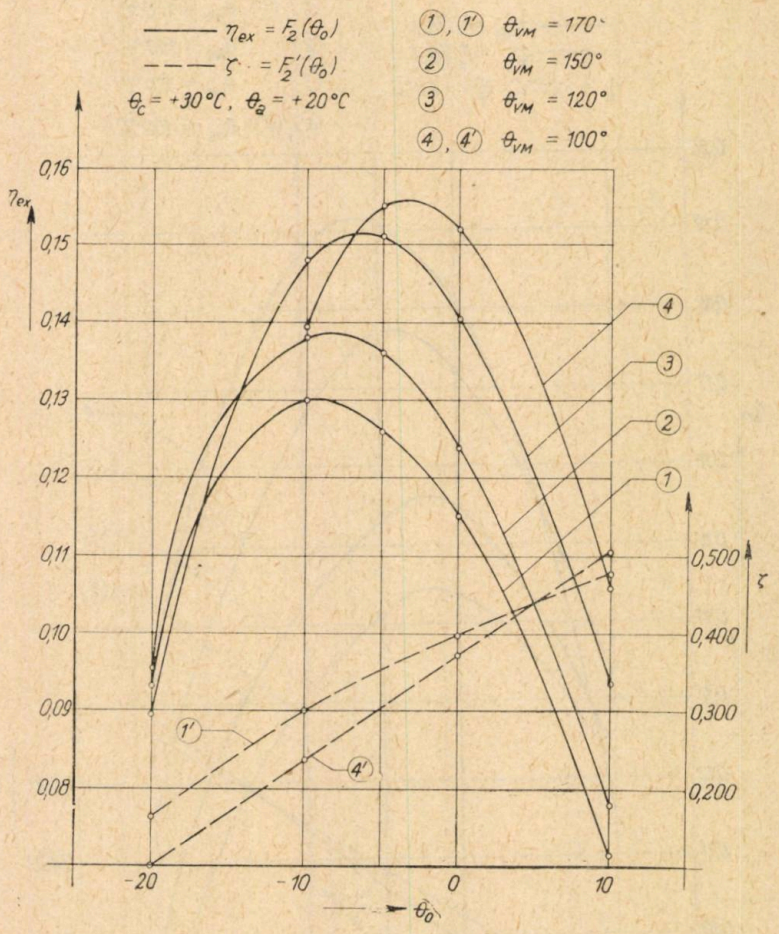


Fig. 5

— Les rendements exergétiques baissent par rapport à l'augmentation de la température de condensation θ_c.

— Les rendements exergétiques des processus à absorption, simples, ont des valeurs remarquablement moindres que ceux des processus par compression de la vapeur d'agent. Ces conditions sont dues aux

importants flux d'annergie contenus dans les flux de chaleur échangés dans le processus. Les flux d'annergie ont comme conséquence, sauf la baisse des valeurs des rendements exergétiques, l'augmentation des surfaces d'échange de chaleur des récipients de l'installation.

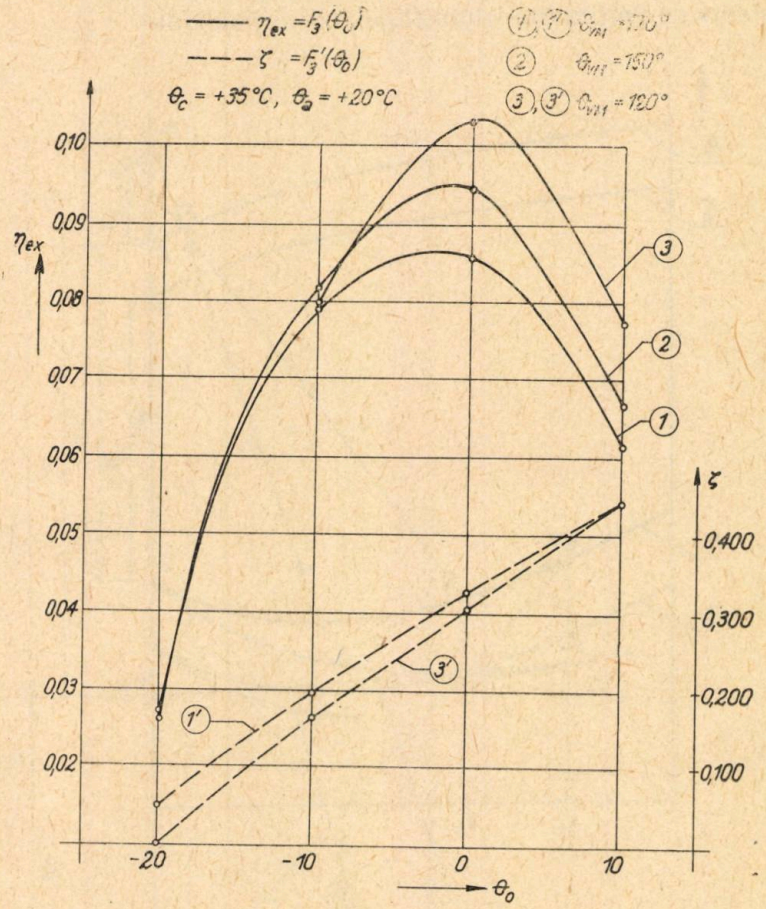


Fig. 6

2. *Le processus amélioré*

Les améliorations adoptées pour l'étude du processus amélioré ont été celles usuelles : l'échange de chaleur entre les solutions ammoniac-eau, de forte, respectivement de faible concentration et la rectification de la vapeur. Le processus théorique est présenté dans le diagramme de la figure $n°$ (7).

Les conclusions de cet étude, conduit d'une manière similaire que le précédent, se trouvent synthétisées par les courbes des figures 8, 9

et 10, qui représentent les variations des valeurs du rendement exergétique comme fonctions de la température θ_0, les températures θ_c et $\theta_{v\,M}$ étant paramètres. Superposées dans les mêmes figures se trouvent, tracées discontinu, quelques-unes des courbes exprimant les variations des valeurs de l'efficacité frigorifique, correspondante.

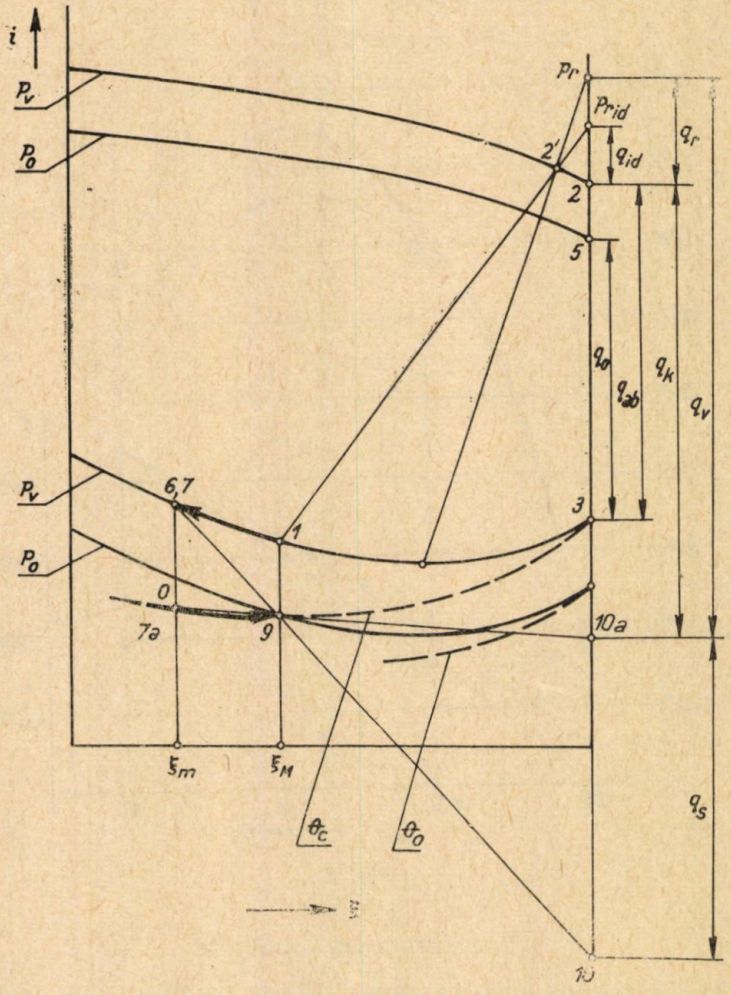


Fig. 7

On déduit de ce matériel pour le processus amélioré :

— Les courbes représentant les variations des valeurs du rendement exergétique ne présentent plus des maxima dans les limites compatibles des processus ; entre ces limites, les valeurs du rendement augmentent d'une manière continue, par rapport à la diminuation de la

température θ_0, tandis que les valeurs du coefficient d'efficacité frigorifique respectives ont des variations inverses.

— Les rendements exerqétiques sont remarquablement plus élevés que ceux des processus sans améliorations ; ils sont comparables aux rendements exergétiques des processus à compression de la vapeur, en

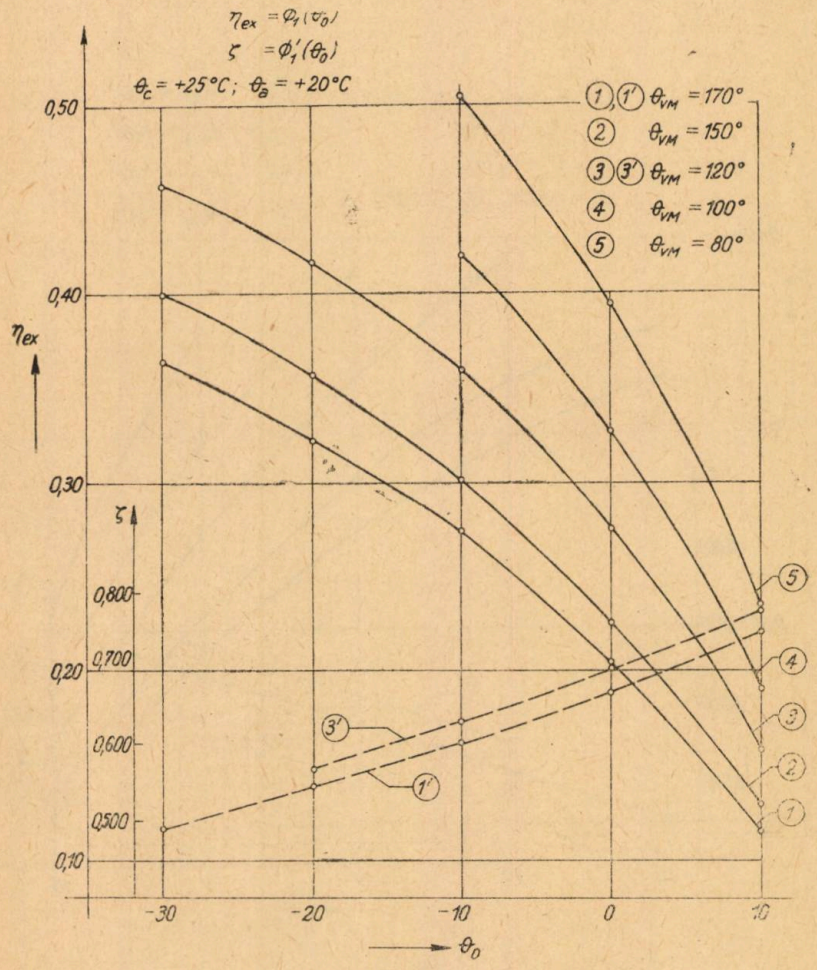


Fig. 8

restant, toutefois, moindres que ceux-ci, à cause des importants flux d'annergie des processus à absorption.

— Les processus améliorés sont, concernant la température de vaporisation θ_0, plus limités à cause de la marche de l'échange de chaleur dans l'échangeur solutions ammoniac-eau, de faible, respectivement de forte concentration.

3. *La caractéristique du processus*

Du matériel présenté ci-dessus résulte que dans les processus frigorifiques à absorption, l'indication sur l'économie du processus peut être donnée seulement par la valeur du rendement exergétique. Le coef-

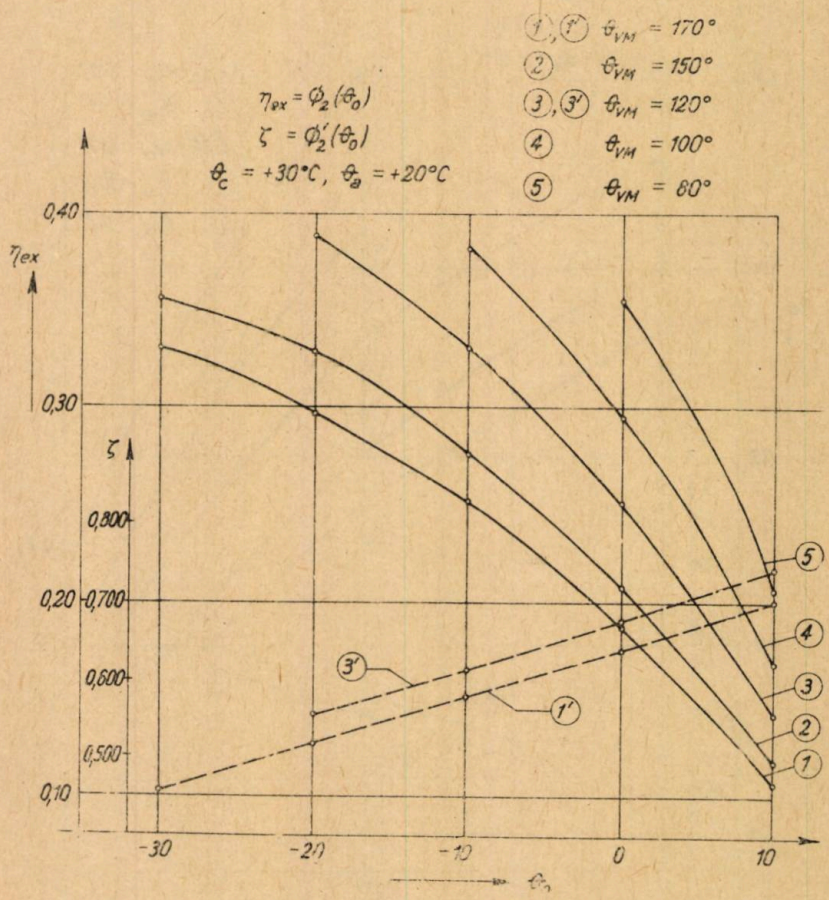


Fig. 9

ficient d'efficacité frigorifique, ζ, ne caractérise pas l'économie du processus, il ne représente pas un rendement ; l'efficacité frigorifique montre une variation inverse que le rendement exergétique, par rapport à la température θ_0. (D'ailleurs, l'étude, basée sur l'exergie, du processus à compression de la vapeur, aboutit à la même conclusion concernant l'importance du rendement exergétique [3]).

Mais le calcul du rendement exergétique du processus à absorption présente quelques difficultés, sa marche étant complexe. De plus pour pouvoir attribuer une qualité à un processus frigorifique, la connaissance d'une certaine valeur du rendement exergétique ne suffit pas : il faut connaître la courbe des valeurs de ce rendement par rapport aux valeurs des paramètres extérieurs données.

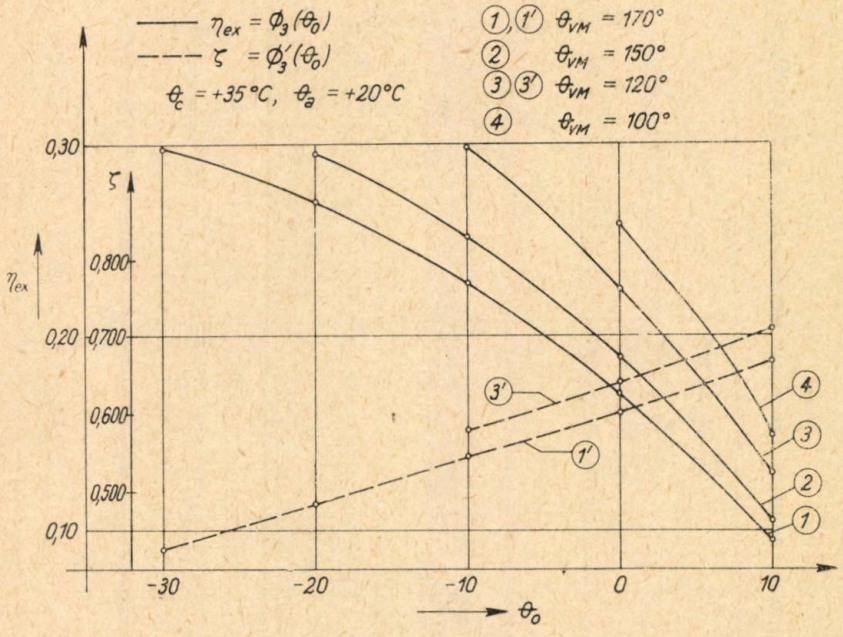


Fig. 10

Dans le but de pouvoir établir d'une manière simple la valeur du rendement exergétique et ses variations avec les paramètres extérieurs du processus à absorption ammoniac-eau, on fait adopter une „caractéristique du processus". La relation de définition et de calcul de cette caractéristique est basée sur l'observation que le rendement exergétique (relation 7) résulte du produit du coefficient d'efficacité frigorifique ($\zeta = \frac{q_0}{q_v}$, paramètre usuel tant dans les travaux de conception que dans l'exploitation) et du facteur noté ci-dessous K_a,

$$K_a = \frac{T_a - T_0}{T_0} \cdot \frac{T_{v\,med}}{T_{v\,med} - T_a} \tag{8}$$

Nous désignons ce facteur comme „caractéristique du processus" (ou „caractéristique de la qualité du processus") parce qu'il modifie les

Nomogramme pour le processus simple : $\Theta_a = +20°\,C$; $\Theta_e = +25°\,C$

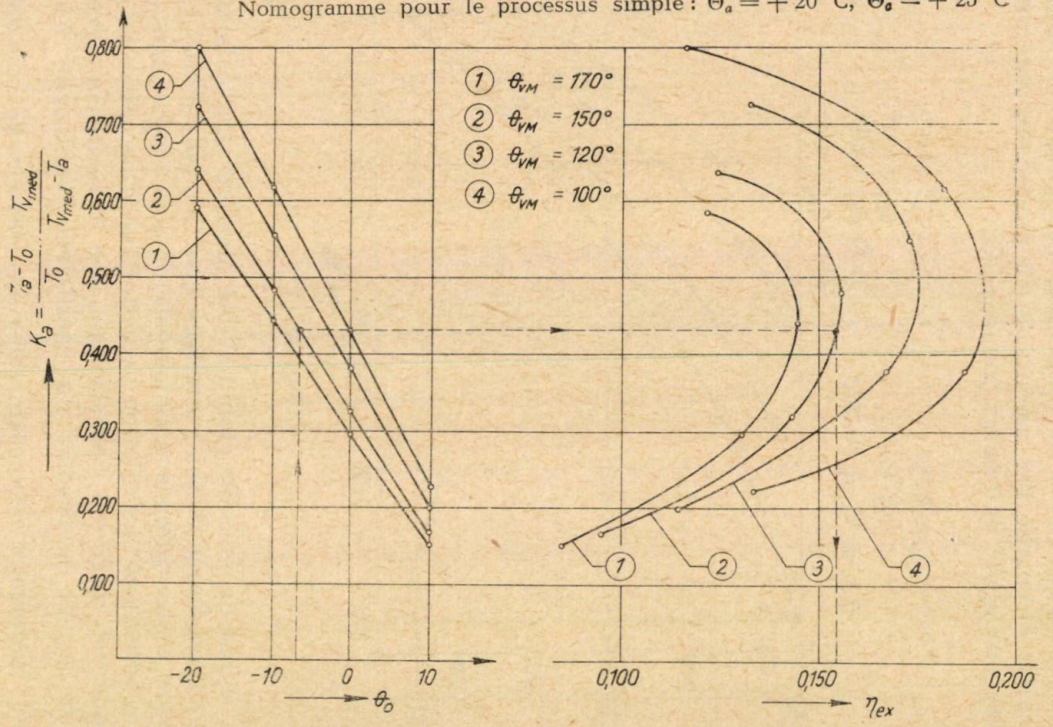


Fig. 11

Nomogramme pour le processus amélioré : $\Theta_a = +20°\,C$; $\Theta_c = +25°\,C$

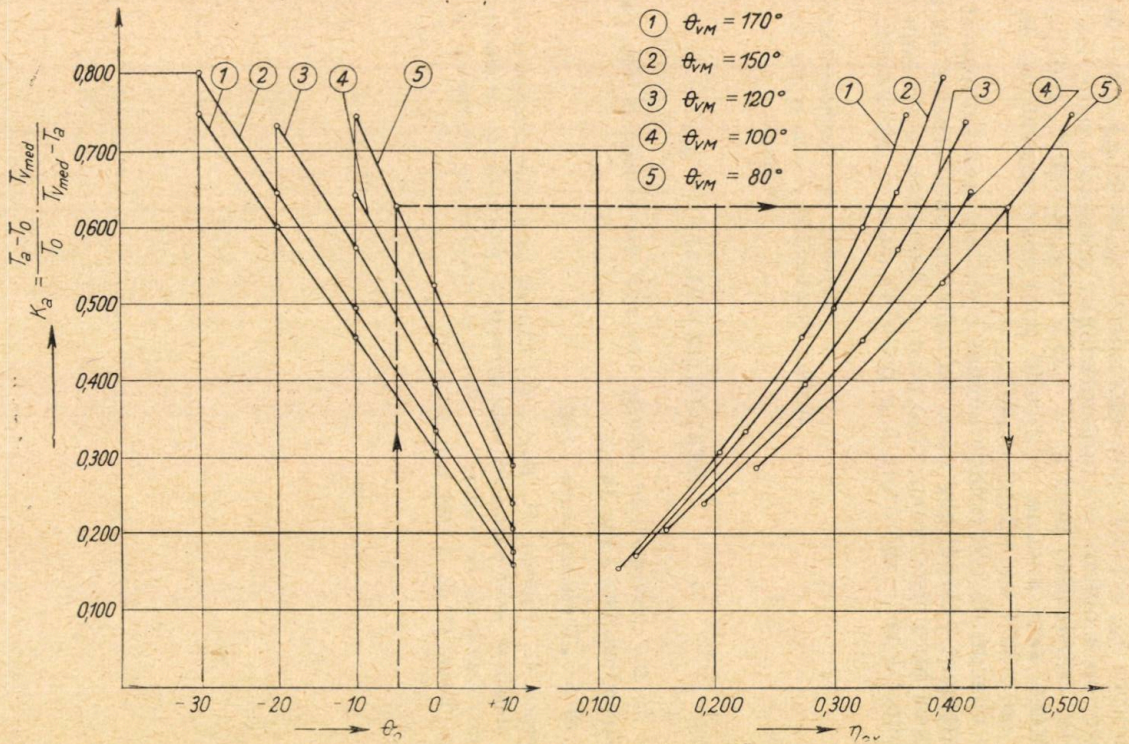


Fig. 12

valeurs des coefficients de l'efficacité frigorifique ε, pour en résulter les rendements exergétiques des processus respectifs.

En utilisant cette fonction $K_a = F_a(\theta_0)$ pour le processus simple avec les fonctions $\eta_{ex} = F(\theta_0)$ respectivement $\eta_{ex} = \Phi(\theta_0)$ pour le processus amélioré, on a obtenu les nomogrammes présentés dans les figures n°s 11 et 12, construites pour $\theta_c = +25°C$ et $\theta_a = +20°C$, qui peuvent être complétées, sans aucune difficulté, pour des températures de condensation θ_c de $+30°C$ et $+35°C$, usuelles.

De chacun de ces nomogrammes résultent non seulement la valeur du rendement exergétique avec laquelle on peut étudier un processus, mais aussi la sphère compatible pour la température de vaporisation θ_0 par rapport à la température θ_{vM} possible dans le générateur.

La chaire de thermotechnique
Institut Polytechnique „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *Baehr, M. D.*: „Exergie und Anergie und ihre Anwendung in der Kältetechnik", Kältetechnik 1965/1 pag. 14—22.

2. *Baehr, M. S.*: „Thermodynamik", 1962.

3. *Stamatescu, C., Grigoriu, M., Duicu, T.*: Criterii bazate pe randamentele exergetice la stabilirea unor parametri determinanți în procesele de producere a frigului prin comprimare de vapori" — Studii și cercetări de energetică și electrotehnică, Tomul 17, nr. 3, 1967, pag. 547—556.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC „GHEORGHE GHEORGHIU-DEJ"
BUCUREȘTI
Tomul XXIX — 1967, Numărul 6

NOTE

THE REPUBLICAN CONFERENCE OF INTERNAL COMBUSTION ENGINES

The Academy of the Socialist Republic of Romania, in cooperation with the Ministry of Machine Construction Industry, the Ministry of Education, the Oil Ministry, the Ministry for Automobile, Naval and Air Transports, the Ministry of Armed Forces, the Superior Council of Agriculture and the National Council of Engineers and Technicians, organized in Bucharest, between the 26th and 30th September 1967, the Republican conference of Internal Combustion Engines, where a large number of international participants have been present.

At the opening session, the participants have been greeted by professor Roman Moldovan, vice-president of the Council of Ministers, president of the National Council of Scientific Research, by academician Miron Nicolescu, president of the Academy of the Socialist Republic of Romania, and by professor Constantin Dinculescu, the president of the National Council of Engineers and Technicians.

The session for scientific reports have taken place in two sections; the schedule also included technical calls and certain cultural activities.

Furthers we reproduce observations made during the development of the work of the Conference, and the titles of the submitted reports.

1. ABOUT THE REPUBLICAN CONFERENCE OF INTERNAL COMBUSTION ENGINES

The objects of the Conference of Internal Combustion Engines has been achievement of a wide exchange of experience between all those concerned with internal combustion engines, the discussion of the results obtained in the research, designing, manufacturing and exploitation of these engines in Romania and abroad, the emphasizing of the main problems of this speciality and their solution according to the requirements of production, the intensification of the practical application of the performed studies.

The themes of the manifestation included a large range of problems. The debates have been organized in two sections i.e.

— energetic processes in internal combustion engines ;

— functional and construction problems of the internal combustion engine parts.

The discussed subjects pointed out the sustained concern of the research groups for solving some important problems of the internal combustion engines, which are at the same time particularly actual for our country. Thus, the Romanian authors presented the results of the researches carried out in view of a substantial cost reduction of internal combustion engines, the superior turning to account of some fuel assortments, the improvement of combustion chambers and injection equipment the power increase of rail wargand tractor engines manufactured in Romania. The working of truck engines at high altitudes, the acting of some internal combustion engines with heavy fuels, the behaviour in the engine of some oils produced in Romania, have also been analysed. A significant number of reports described the results achieved by various groups in the research of internal engine problems of dynamics, in the analysis of some engine parts operation, in the improvement of design methods and operation conditions.

The reports presented by the foreign participants have approached functional, construction or technologic problems of the internal combustion engines, whose themes were related to those of the Romanian authors.

The amplitude and variety of the problems which have been treated, the high value of the results, have shown that scientific research in the field of internal combustion engines has reached an advanced stage in Romania, closely connected with the speciality production, and that its achievements represent an important contribution to the enrichment of the scientific patrimony of this speciality. High level results have been obtained in the study of the problems concerning the balancing of the internal combustion engines. The results achieved in the estimation of thermic processes by analytic means, in the study of problems concerning high supercharging, in the researches effected upon the mechanisms of the internal combustion engines, in the computation of some engines parts, occupy advanced positions. The analysis of the processes ocurring in the engine main systems have led to fine achievements. More and more problems of technologic nature, or related to the internal combustion engines operation are scientifically approached. This situation which has been strikingly emphasized during the Conference, certifics the ascending course of scientific research in this field, the strong relation to the designing manufacturing and exploitation of internal combustion engines, the formation of a school of recognized value.

The reports of the foreign participants reached a high scientific level ; they have emphasized the interest shown to internal combustion engines, the important material means used for their continuous improvement.

Through the amplitude and the value of the submitted reports, the Conference was placed on the level of the most successful manifestations of this kind which taken place abroad.

A particularly positive fact achieved through the organization of the Conference is the meeting of practically all those who are concerned with internal combustion engines in Romania. The Conference has been an ideal setting for the direct knowledge of the preoccupations of the groups of specialists in factories and laboratories, in University Institutes and Reasearch Institutes. During the works of the Conference, in the discussions which followed, as well as during the technical inspections, the speciality research workers have become acquainted with the latest problems set by the manysided development of production, to the solution of which scientific research has also to contribute ; at the same time, the specialists working for production have become more amply acquainted with the achievements of scientific research, with the possibilities of turning them to account.

A significant contribution to the knowledge of the results obtained in Romania by scientific research in this field, as well as the stimulation of the turning to account of these results, has been brought by the printing of a booklet containing the titles of all the works published in Romania since 1948, in the field of internal combustion engines, a booklet which has been distributed to all the participants to the Conference, as well as to other specialists who could not be present to the sessions. This booklet which contains about 500 titles of papers, has pointed out at the same time, in Romania as well as abroad, the amplitude of the activity developed in our country in the research of internal combustion engines, reflecting at the same time the development of the specialized industrial production and the intensity of the preoccupations for its continous improvement.

The presence of a large number of specialists of high repute has contributed to the achievement of the particular setting in which the works of the Conference have been carried out. For instance, we mention the participation of professor Hans List-Austria, world famous specialist, of academician professor Slobodan Dobrosavlevic from the Federative Socialist Republic of Yougoslavia, of professor Eugen Huber from the Federal Republic of Germany, a scientific authority of high prestige, of professor Josef Kozoušek, the dean of the Technical University of Prague, of professor Iskander Nigmatulin, from the Bauman Polytechnical Institute in Moskow, of professor Robert Buty, the director of the Upper Internal Combustion Engine School of Paris, of professor Czseslav Kordzinski, from the Cracovian Polytechnical Institute, of professor Lars Collin from Sweden, a specialist of repute in big Diesel engines, of Dr. John Nestorides, a leader of the English National Institute for the Research of Internal Combustion Engines, of professor Arthur Sarsten from Norway, as wel as that of other specialists from Bulgaria, Tchekoslovakia, Denmark, France, the German Democratic Republic, the German Federal Republic, Italy, Yougoslavia, the Popular Republic of Poland.

During the Conference, the Romanian specialists have had a fruitful exchange of views with the participants from abroad. The discussions were concerned with new research methods in the field, with the development stage of apparatus and experiment methods, with the use of modern computation means in the internal combustion engines research, with the automation of experimental equipments, etc. At the same time, the Conference works, the discussions which followed, the participation to technical inspections, have made a good impression to the foreign guests who have shown a great desire to establish further cooperation ties. Our industry for the construction of internal combustion engines has also left a good impression. We can expect that the informations given to foreign speciality circles by the participants from abroad about the level reached in Romania in scientific research and in the production of internal combustion engines, will be a significant contribution to the increase of foreign interest for the respective products of our construction machine industry.

The sustained and active participation of guests from abroad is also due to the thorough organization of the Conference. The judicious elaboration of the program and its scrupulous observation, the correct translation of the Conference works in several languages, the very special way the guests were received during the technical inspections, the interesting and varied cultural program which has given the possibility to become acquainted with some achievements of our regime, have largely determined the very good opinion our guests from abroad have taken with them when they left.

Finally, it can be observed that the development of the republican Conference of internal combustion engine works has been an opportunity for romanian science and technique to assert itself within the country and abroad. It has strengthened the desire among Romanian specialists to tighten the bonds between scientifical research and production at the same time, the Conference has stressed the necessity of including in the research field other aspects of the speciality, the development of the material basis according to new principles, the extension of researches in the speciality factories.

The Conference has offered the opportunity of high repute, creating favourable premises for the establishment of manysided cooperation relations.

The results obtained by the Conference, the outlook of scientific research in Romania, the variation and continuous development of the speciality production, the creation of some scientific schools which have achieved remarkable results, are all supporting the suggestion made of organising periodically such manifestations, a suggestion which has been enthusiastically received by all the participants to the Conference.

THE PRESIDENT OF THE ORGANIZATION COMMITTEE
Prof. Eng. George Bărănescu
Corresponding member of the Academy of the Socialist Republic of ROMANIA

F 1130

DRSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRI ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1863

2. THE PROGRAM OF THE REPUBLICAN CONFERENCE OF INTERNAL COMBUSTION ENGINES

SECTION I

Energetic Processes in Internal Combustion Engines

1. — G. BĂRĂNESCU, TR. DUDAŞ, B. GRÜNWALD, A. MANOLE:
The calculus of the process of changing the cylinder charge, considering the oscillations within the gas distribution manifolds.

2. — J. KOŽOUŠEK: (The Socialist Republic of Czechoslovakia):
Vibrations within inlet and exhaust manifolds of the internal combustion engines.

3. — V. HOFFMAN, N. VERTEMEANU, M. EPUREANU, A. IONESCU:
Contributions to the experimental study of the non-stationary processes in the inlet manifold of the piston engine.

4. — H. LIST (Austria):
Procedures for the development and investigation of Diesel engines.

5. — C. MANEA, M. STRATULAT, D. S. MUNTEANU, F. PAPUC:
The study of the influence of the inlet manifolds on the performances of Diesel engine with direct injection.

6. — B. BARBESCU:
Experimental researches on some problems of changing the cylinder charge for the four-stroke high-supercharged Diesel engine.

7. — DIM. STAVRIEV, V. MARINOV (The Bulgarian People's Republic):
Some results of the researches on the two-stroke high-speed engines with carburettor.

8. — A. GUGLIELMOTTI (Italy):
Considerations on the measuring the efficiency of the two-stroke engines scavenging.

9. — I. ČECH (The Socialist Republic of Czechoslovakia):
Contribution to the problem of changing the charge for the two-stroke Diesel engines with loop scavenging.

10. — A. JANTE (The German Democratic Republic):
On the reference cycles for the internal combustion engines and practical ways for achieving them.

11. — B. GRÜNWALD, N. APOSTOLESCU :
Influence of rate of pressure rise in the phase of rapid combustion, on some improving indices of internal combustion engine cycle.

12. — C. A. VASILESCU :
Entropy diagram for calculating the evolution and flow of perfect gas mixtures.

13. — A. RADU-CERNEA, B. GRÜNWALD :
Contribution to the phase-theory of the combustion process in the spark ignition engines.

14. — C. A. VASILESCU, I. ȘTEFAN, N. STOICA :
Influences of the wedge-type combustion chamber on the performances of the spark ignition engine.

15. — V. BERINDEAN :
Investigation on "knock" in the homogeneous mixtures.

16. — C. A. VASILESCU, N. STOICA :
Researches on thermal processes in the spark ignition engines with combustion chamber in the piston.

17. — R. HERRMANN (France) :
Some problems concerning the multi-fuel engines.

18. — ST. KOVACEV, V. MINCEV (The Bulgarian People's Republic) :
Results of the investigation on Diesel engines operation with divided chamber, using different fuels.

19. — S. DOBROSAVLEVIČ (The Socialist Federal Republic of Yugoslavia) :
A new conception on the combustion chamber of Diesel engines.

20. — V. BERINDEAN :
Contributions to the study of the homogeneous mixture combustion, ignited by compression.

21. — N. NĂSTASE :
Experimental research on the dependance of the antechamber Diesel engine performance on the characteristics of the combustion chamber.

22. — V. BERINDEAN, N. CARAMAVRU, G. PURI :
Contributions to the utilization of mixtures of gas oil and petrol with reduced Octane number for the compression ignition engines.

23. — L. TEODORESCU :
The dependance of the energetic processes of the engine on the injection law and the spraying characteristics modified by the flow section of the nozzle.

24. — L. TEODORESCU :
Influence of the elastic characteristics of the injection equipment on the injection process.

25. — L. TEODORESCU :
The influence of the geometry of the flow section at the nozzle needle on the stability of the injector processes.

26. — AL. IORDĂNESCU :
Problems of mixture formation in the carburettor.

27. — P. J. CARP (Canada) :
Moto-propulsing units "Constant Power".

28. — C. A. VASILESCU, I. ŞTEFAN :
Method for determining the performances at altitude of spark ignition engines by data measured on ground level.

29. — N. APOSTOLESCU, B. GRÜNWALD :
On modelling conditions of the convective heat transfer in the internal combustion engine cylinder.

30. — G. WOSCHNI (The Federal Republic of Germany) :
Investigation on the heat transfer in internal combustion engines.

31. — I. M. UNTARU :
The influence of differential cooling on the spark ignition engine performances.

SECTION II

FUNCTIONAL AND STRUCTURAL PROBLEMS OF THE INTERNAL COMBUSTION ENGINES PARTS

1. — S. FAUR :
On the use of the heavy fuels for Diesel engines.

2. — N. BĂŢAGĂ, ST. KOVACS, R. ATANASIU, V. ROŞ :
Study on the formation of carbon deposits and their influence on the injection process of a Diesel engine.

3. — S. FAUR, ST. MANEA, I. MINEA, C. A. VASILESCU :
The influence of some quality indices of Diesel fuels on their behaviour in the Diesel engine.

4. — M. BĂNĂRESCU, I. ZĂGĂNESCU, T. RAICA, C. POPESCU, V. HOANCĂ, A. FERENCZ :
The use of romanian inferior fuels for the locomotive Diesel engines.

5 — I. MIHĂŢOIU, GH. CIULU :
Investigation on the behaviour of the tractor Diesel engines with various types of oils.

6. — C. NESTOR, N. MOISIDIS :
The equivalence between the bank test and the operation, on testing a new type of oil additive for the supercharged Diesel engines.

7. — L. MÜLLER (The German Democratic Republic) :
Determination of the principal engine dimensions — bore and stroke — considering the limit values of the specific power.

8. — G. BĂRĂNESCU, D. TARAZA :
Study of the balancing of the in-line engines by means of linear programming.

9. — G. CILIBERTO, R. MACIOTTA (Italy) :
Balancing of a series of high speed railway engines.

10 — E. J. NESTORIDES (Great Britain) :
Vibrations of multi-bank engine systems.

11. — F. SCHMIDT SØRENSEN (Denmark) :
Axial vibrations in marine engine schafting systems.

12. — G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU :
On balancing the inertia forces for the two-line cylinder engines.

13. — G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU :
Improvement of the balancing of the moment of inertia forces by a two-line cylinder arrangement.

14. — K. J. NĚMEC (The Socialist Republic of Czechoslovakia) :
Theoretical and experimental czechoslovakian researches on the silicon dampers for torsional vibrations.

15. — G. BĂRĂNESCU, D. TARAZA :
On a method used to calculate fatigue of internal combustion engine parts.

16. — G. BĂRĂNESCU, GH. ZĂTREANU, D. TARAZA :
On some problems of the fatigue of the screw fastenings used for the internal combustion engines.

17. — GH. VASILCA :
The persistance of tin film on the active surface of the engine bearings.

18. — H. GLÄSER (The German Democratic Republic) :
The optimum calculation of the sliding bearings of the internal combustion engines.

19. — CHR. PELECUDI, I. SAVA :
Synthesis of the laws of motion of cam mechanisms.

20. — A. SARSTEN, H. VALLAND (Norway) :
Computer — aided design of valve cams.

21. — CHR. PELECUDI, I. SAVA :
The theoretical and experimental study of the cam mechanism dynamics.

22. — I. POPESCU :
On the radial diagram of elastic pressure of a piston ring.

23. — G. BĂRĂNESCU, C. DOBRE, R. MANIȚIU :
On dimensioning the piston rings.

24. — I. POPESCU :
Instability phenomena of piston ring sealing
(Radial oscilation of piston ring).

25. — I. POPESCU :
Computation of the lubrication zones of piston rings.

26. — I. VLĂDEA, H. THEIL, N. NEISS :
Experimental research on the water and oil refrigerators for the 0-60-DA locomotive.

27. — P. GOUGNARD (France) :
Manufacturing of the engines aluminium crankcases.

28. — HERMAN BARTH :
Pistons for high performance engines.

29. — C. A. VASILESCU, B. BARBESCU :
Effect of supercharging pressure on the design parameters of ante-chambers.

30. — I. VLĂDEA :
Study for increasing the power of the railway traction 12 LDA 28 engine.

31. — T. BUDU, I. CIUBOTARIU, D. ABĂITANCEI, T. NAGY, C. SĂLĂJAN, F. TĂNASE :
The supercharging of D 103 engine.

32. — AL. GROZA, C. GEORGESCU, I. ȚIGĂNAȘ :
The operation behaviour of the romanian carburettors for lorries.

33. — GH. TIU, I. GĂGENEL :
The modernizing of the injection equipment of the D 105 engine.

34.— L. ISTRATE, M. CHIRIȚĂ :
Methods and equipments utilized in the wood-logging sector for adjusting the engine ignition and carburation.

35. — F. IONESCU :
The characteristic of durability of piston engines. The influence of the thermal level on the durability and fuel specific consumption of the MG 450 engine.

OR SZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS OSZTÁLY 1883

SUMMARY OF THE REVIEWS IN 1967

MATHEMATICS

I. M. Miu. Theorems of Means and Generalized Divided (1. 1967).

D. D. Bainov. Solving the Infinite Boundary Problem for a Quadratic Differential Equation (2. 1967).

D. Filipescu. On Some Geometrical Transformations Changes in Optics and in the Lie Groups (2. 1967).

I. Gh. Şabac. About Plane Motions of Perfect Compressible Fluids (3. 1967).

I. M. Miu. A Generalisation of Pompei's Mean Formula (3. 1967).

M. N. Roşculeţ. Investigations on Trigonometric Series (4. 1967).

N. Mirescu. Applications of the Nil Dihedral Device in Bunker Construction (5. 1967).

H. Bodnărescu, R. Bodnărescu, E. Voinea. Anomorphic Nomograms for the First Canonic Form of III Order Equations Achieved by Means of Monge Epures (5. 1967).

M. Craiu. Properties of the Fourier Series Associated to a Non Integrating Function of Given Singularities (5. 1967).

C. Naneş. Symmetrical Pan-evolutes (5. 1967).

Po-Fang Hsieh, Otis D. Shouse. The Reduction of Order of a System of Linear Non-homogeneous Ordinary Differential Equations (6. 1967).

H. Ionescu. Approximate Methods for the Integration of Some Differential Equations (6. 1967).

I. M. Miu. Contributions to the Zeros of Some Differential Equation Solutions (6. 1967).

A. Tănăsescu, R. Theodorescu. Graphic Solution of Matrix Games of $3 \times n$ Order (6. 1967).

GEOMETRY

H. Erfurt. The Use of Plane Transformations in the Constructive Geometry of a Space with Four Dimensions (3. 1967).

A. Tănăsescu. About Some Transformations in Affine Epure (3. 1967).

CHEMISTRY

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu. Volumetric and Colorimetric Method for Metering 2 Diethylamino 1 Chloretane (1. 1967).

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru, Fl. Popescu. Molybdenum Recovery from Vastes Resulting from Various Manufactures (2. 1967).

A. Ianu, Il. Niculescu, A. M. Lupu. The Titration of Ion Traces in the Presence of Fluorine Ions (1967).

Gr. Teodorescu, Il. Niculescu. Volumetric Method for Dosing N-N'-Tetramethyl Hexamethylene 1-6 Diamine (4. 1967).

Gr. Teodorescu. Volumetric and Colorimetric Method of Dosing Dimethyl-amino Ethanol (5. 1967).

Gr. Teodorescu. Volumetric Method for Dosing Dimethyl-amino-ethanol in the Presence of 2 Diethyl-amino 1 Chlore Ethane (6. 1967).

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu. The Anodic Dissolution of Manganese and its Alloys in Direct and Asymmetrical Alterning Current for Obtaining Permanganate (1. 1967).

I. Blum, Fr. Barca, D. Nichitovici. Study Upon Binding Material Consumption Reducing Coke Briquette Production (1. 1967).

T. D. Ionescu, Gh. Tudorache. Recovery by Ionic Exchange of the Copper Section in the Synthesis of Ammonia (1. 1967).

I. Drimuș, A. Măcelaru, Th. Spindler, I. Ionescu, V. Poleacov. Complex Utilisation of Dodecane by Air Oxidation in the Presence of Boric Acid (2. 1967).

C. Drăgulescu, O. Solomon, S. Zugrăvescu, E. Beral. The Behaviour by Thermal Decomposition, in Nonaqueous Media, of Some Complexes of Azo-bis-isobutironitrile with Lewis Acids (3. 1967).

Th. Bădescu. Contributions to the Establishment of an Objective Evaluating Criterion of the Paper-ink-machine Correlation in Polychromous Printing (3. 1967).

L. Literat. Catalytic Activity of Some Reducing Non-stoichiometrical Alumina (3. 1967).

I. Teoreanu. About the Mechanism in the Process of Tri-calcic Silicate and of β Bi-calcic Silicate Hardening (3. 1967).

B. Melega, I. Gh. Constantinescu. On the Theory of the Equilibrium of Solid-liquid Heterogeneous Reactions (4. 1967).

I. Cristea, Gh. Ioniță, I. Lupu. Stripping Films Based on Polyvinylic Alcohol for the Protection of surfaces Finished with Polyesthers (4. 1967).

I. A. Atanasiu, I. C. Răducanu. Contributions to the Thalium Cathodic Deposition (5. 1967).

I. Gh. Constantinescu, B. Melega. Study of the Desulphation of Brine in Sodium Carbonate Industry by Means of Barium Compounds (5. 1967).

B. Melega, I. Gh. Constantinescu. Contributions to the Establishment of the Best Technological Conditions in the Process of Producing Barium Carbonate from Barytine (6. 1967).

I. Ganea, S. Lică. Behaviour of Graphite/O_2 and Pt/O_2 Electrodes in Sulphuric Acid Potassium Hydroxide Media (6. 1967).

PHYSICS

H. N. Fuia, I. I. Ponner. A New Improved Radioactive Viscosimeter (1. 1967).

D. Iordache. Study of the Dynamical Magnetisation Curve of Some High Permeability Mixed Manganese and Zinc Ferrites (2. 1967).

A. Ichimescu, G. Teodorescu. Contributions to the Study of the Formation of Thin Silver Sulphide Laveres (4. 1967).

D. Bârcă-Gălățeanu, C. Demetrescu, D. Iordache, P. Volatie, C. Ghizdeanu. A. Study of the Infrared Absorption Spectra of Some Cyclohexiliden-hydrazides (5. 1967).

G. C. Moisil. Contributions to the Study of Stationary Fields in Isotropic and Heterogeneous Media (5. 1967).

I. Ringhiopol, I. Viță, H. Fuia. G. M. Counter Chamber for High Resolution Power Spectroscopy (5. 1967).

HYDRAULICS

D. Taşcă, G. Zidaru. The Definition of the Reference Speed Vector in Circular Profile Networks, in the Potential Plane Movement (6. 1967).

MECHANICS

C. Guţă, Al. Marinescu. Optimum Meeting Manoeuvre with Minimum Fuel Consumption, for Cosmic Apparatus Moving on Circular Orbits (1. 1967).

C. Guţă. Spatial Leaking Through the Turbomachines Profiles Networks (4. 1967).

P. A. Lebedev, B. N. Pevzner. Movement of a Contacting Lever Mechanism (upper coupling at mechanism) (1. 1967).

N. I. Manolescu, L. Buda. Contributions to the Unifying of the Graphical Calculations for the Railway Traction by Adopting the Unitarian Scales (1. 1967).

AVIATION

St. Staicu, Study of Supersonic Flow Around a Cross-shaped Empennage (2. 1967).

STRENGTH OF MATERIALS

A. Petre, Fluttering of the „Electrical Line Galloping" Type for Wires of Continuous Mass (3. 1967).

V. Drobotă. A General Method for Computing the Buckling Critical Load on Continuous Pendulum Beams under Transverse Loads (3. 1967).

T. Pană, Effect of Concentrated Masses on the Free Vibrations of Thin Wall Bars with Closed Cross Section (3. 1967).

I. N. Constantinescu, A. V. Darabont, Proper and Forced Oscillations in Compressed Air Ducts (3. 1967).

V. Drobotă, The Study of the Elastic Stability of Pendular Continuous Beams for Some Loadings (6. 1967).

THERMODYNAMICS

C. Stamatescu, M. Grigoriu, T. Duicu, A Feature of Quality in the Production of Cold through Absorption in Ammonia Solution (6. 1967).

DETAILS OF MACHINES

M. R. Mustafa, On the Statistical Distribution in Material Couples in Friction without Lubrication (1. 1967).

HEAT ENGINE

B. Grünwald, N. Apostolescu, On the Thermal Effect of the Recirculation of Exhaust Gases for the Motor with Compression Ignition (5. 1967).

ELECTRIC POWER

C. Dinculescu, P. Buhuş, Method for Establishing Computation Relations of Mean Operating. Durations in the Study of the Reliability of Complex Structures Having Reserve Elements (4. 1967).

ELECTRICAL NETWORK

M. Bercovici, A. Arie, M. Tudose, Aspects Regarding the Application of the Symmetrical Component Theory in the Computation of Electrical Network Non-symmetrical Regimes (4. 1967).

C. Dinculescu, G. Drăgan, T. Miclescu. Analysis of the Lightning Current Parameters (5. 1967).

Gh. Iacobescu, Influence of the Shortcircuit Type Upon the Restriking Voltage at the Breaker Terminals (5. 1967).

AUTOMATION

A. Petrescu, Dual Transformations of the Networks Used in Modelling Problems of Flow with Free Surface in Porrous Media (1. 1967).

P. Dimo, I. Sipoş, The Operational Amplifiers of the M.A.C.-1 Analog Computer (2. 1967).

P. Dimo, Design of the Operational Amplifiers of the Analogous Didactic Computer (3. 1967).

S. Florea, I. Dumitrache, Problems Concerning the Dynamics of Hydraulic Systems (6. 1967).

ELECTRICITY

L. Bompa, Theoretical Considerations on Asynchrone Coupling with Ferromagnetic Rotor (2. 1967).

I. S. Antoniu, A. Adămuţ, A New Criterion for the Determination of the Precision of Modeling with a Chain of Four-poles of Propagation of a Wave on a Long Electric Line (3. 1967).

C. I. Nitu, A Method for Improving the Performances of Automatic Systems Provided with Specialized Computers (6. 1967).

METAL TECHNOLOGY

P, Sonea, I. Sonea, Study on the Behaviour of Metal Particles in an Electric Arc Vibrated by Transverse Ultra-sound Oscillations, on a Hydro-dynamic Model (2. 1967).

ELECTRONICS

D. Dascălu, Simple Method for the Calculation of Vacuum Diode High-frequency Characteristics (2. 1967).

D. Dascălu, About the High-Frequency Operation of Unipolar Space Charge Limited Transistor (3. 1967).

M. Petrescu, Frequency Response of the Input Admittance of Impedance Sign Converters (4. 1967).

M. Petrescu, The Stability of the Negative Impedance Converters (5. 1967).

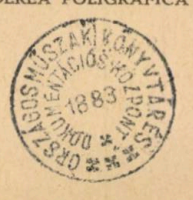
TRANSPORT

A. Popa, A. Carabulea, Contributions to the Technical and Economic Study on Electrical and Diesel System (2. 1967).

NOTES

The Republican Conference of Internal Combustion Engines (6. 1967).

INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREŞTI — c. 6567



INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1968 AUG 16